Svar på opgave 327 (Februar 2016)

Opgave:

Løs uligheden

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}>\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Besvarelse:

1. metode

Vi har åbenbart, at $x > 1$. Multiplikation med $\sqrt{x}$ giver

$$1+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}>\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}<1\,.$$

Vi sætter $a = \frac{1}{x}$, så $0 < a < 1$:

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{a}}}{\sqrt{\frac{1}{a}-1}}-\frac{\sqrt{\frac{1}{a}}}{\sqrt{\frac{1}{a}+1}}<1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-a}}-\frac{1}{\sqrt{1+a}}<1\,.$$

Da begge sider af ulighedstegnet er positive, kan vi kvadrere:

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}-\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}<1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{1-a^2}-\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}<1\,. \tag{1}$$

Vi sætter

$$p=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{dvs.} \quad p=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$

så vi af (1) får

$$2p^2 - 2p < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2p^2 - 2p - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2} < p < \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,. \tag{2}$$

Nu er

$$p=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{x}{\sqrt{x^2}}=1\,, \tag{3}$$

så vi af (2) og (3) får

$$1 < p < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1<\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}<\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,.$$

Venstre ulighed giver, idet begge sider er positive og $x > 1$:

$$1<\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad \Leftrightarrow \quad 1<\frac{x^2}{x^2-1}\,,$$

hvilket er opfyldt for alle x.

Højre ulighed giver

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x^2-1} < \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 < \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x^2 - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2\left(1-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < -1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} > 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > \frac{2}{\sqrt{3}}+1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1{,}468 \ .$$

2. metode

Vi forudsætter $x > 1$ og ganger med $\sqrt{x-1}$ så uligheden er ensbetydende med

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} > 1 \ .$$

Vi sætter

$$f_1(x) = \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x} \quad \text{og} \quad f_2(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1-\frac{2}{x+1} \ ,$$

og bemærker, at $f_1(x)$ og $f_2(x)$ er voksende. Så er også funktionen

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

som sum af voksende funktioner selv voksende. Vi skal derfor blot finde en værdi af x, så $g(x) = 1$.
Vi får ved kvadrering:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x} + \frac{x-1}{x+1} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x(x+1)}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2(x-1)}{\sqrt{x(x+1)}} = 1 - \frac{x-1}{x} - \frac{x-1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2(x-1)}{\sqrt{x(x+1)}} = \frac{1+2x-x^2}{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x-1)\cdot x(x+1) = (1+2x-x^2)\cdot\sqrt{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x-1)\sqrt{x(x+1)} = 1+2x-x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2\cdot(x^2+x) = (1+2x-x^2)^2 \ .$$

Denne ligning omskrives med lidt kedsommelig algebra til

$$3x^4 - 6x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 1{,}46789 \ .$$

Uligheden er derfor opfyldt for $x > \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}$.