Svar på opgave 328 (Marts 2016)

Opgave:

Vis, at der for positive reelle tal a og b gælder

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a} \ .$$

Besvarelse:

1. metode.

Efter uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal (A-G-uligheden) gælder

$$\tfrac{1}{2}\left(2a^2+\tfrac{1}{2}b\right) \geq \sqrt{2a^2\cdot\tfrac{1}{2}b} \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2+\tfrac{1}{2}b \geq 2a\sqrt{b} \ ,$$

og tilsvarende

$$2b^2+\tfrac{1}{2}a \geq 2b\sqrt{a} \ .$$

A-G-uligheden giver desuden

$$\tfrac{1}{2}\left(2ab+\tfrac{1}{2}b\right) \geq \sqrt{2ab\cdot\tfrac{1}{2}b} \quad \Leftrightarrow \quad 2ab+\tfrac{1}{2}b \geq 2b\sqrt{a} \ ,$$

og tilsvarende

$$2ab+\tfrac{1}{2}a \geq 2a\sqrt{b} \, .$$

Addition af disse fire uligheder giver

$$2a^2+\tfrac{1}{2}b+2b^2+\tfrac{1}{2}a+2ab+\tfrac{1}{2}b+2ab+\tfrac{1}{2}a \geq 4a\sqrt{b}+4b\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a^2+2b^2+b+a+4ab \geq 4a\sqrt{b}+4b\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a^2+b^2+2ab)+a+b \geq 4a\sqrt{b}+4b\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a} \ .$$

2. metode.

Uligheden er ensbetydende med

$$\frac{a+b}{2}\cdot\left(a+b+\tfrac{1}{2}\right) \geq \sqrt{ab}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) .$$

Efter A-G-uligheden er

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ ,$$

så vi får

$$\frac{a+b}{2}\cdot\left(a+b+\tfrac{1}{2}\right)\geq\sqrt{ab}\cdot\left(a+b+\tfrac{1}{2}\right).$$

Vi ønsker derfor at vise, at

$$\sqrt{ab}\cdot\left(a+b+\tfrac{1}{2}\right)\geq\sqrt{ab}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

eller at

$$a+b+\tfrac{1}{2}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}\ .$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$a-\sqrt{a}+b-\sqrt{b}+\tfrac{1}{2}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{a}-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}+\left(\sqrt{b}-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{a}-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\tfrac{1}{2}\right)^2\geq 0\ ,$$

hvilket er opfyldt.

3. metode.

Vi har, at

$$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{\frac{a+b}{2}}\ .$$

Multiplikation med $a + b$ giver

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}\geq 2\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{2}}\ .$$

Nu er (se neden for)

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}}\geq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \quad\text{og}\quad \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\ ,$$

så vi får

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}\geq 2\cdot\sqrt{ab}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}=a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\ .$$

For god ordens skyld foretager vi omskrivningen

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}}\geq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b} \quad\Leftrightarrow\quad 2a+2b\geq a+b+2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow\quad a+b-2\sqrt{ab}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0\ ,$$

hvilket er sandt.

4. metode.

Vi viser gennem en række ensbetydende omskrivninger, at uligheden er ækvivalent med en ulighed, der ses at være opfyldt for alle $a, b > 0$. Undervejs benyttes, at $a, b > 0$ og til sidst den generelle ulighed $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, som gælder for alle $x, y > 0$.

Vi begynder med at gange dem givne ulighed med den positive faktor $\frac{4}{ab}$:

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2(a+b)^2}{ab}+\frac{a+b}{ab}\geq\frac{4a\sqrt{b}+4b\sqrt{a}}{ab}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\left(\frac{a}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{\sqrt{ab}}\right)^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\geq\frac{4}{\sqrt{b}}+\frac{4}{\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2-4\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+4+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2-4\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+4\geq 8$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-2\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-2\right)^2\geq 8.$$

Denne ulighed er opfyldt for alle a, $b > 0$, fordi første led mindst er $2\cdot 2^2$ og de to sidste led er ikke-negative.