Svar på opgave 330 (Maj 2016)

Opgave:

a. Bestem det mindste positive hele tal n, så

$$s = \operatorname{int}\sqrt{1} + \operatorname{int}\sqrt{2} + \cdots + \operatorname{int}\sqrt{n} \geq 1000 \ .$$

b. Bestem det mindste positive hele tal m, så

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{m} \geq 1000 \ .$$

Besvarelse:

a. Vi ser, at

$$\begin{aligned} \operatorname{int}\sqrt{k} &= 1 \ \text{ for } \ k = 1,2,3 \ \ (3 \text{ tal}) \\ \operatorname{int}\sqrt{k} &= 2 \ \text{ for } \ k = 4,5,6,7,8 \ \ (5 \text{ tal}) \\ \operatorname{int}\sqrt{k} &= 3 \ \text{ for } \ k = 9,10,\ldots,15 \ \ (7 \text{ tal}) \quad \text{osv.} \end{aligned}$$

Derfor får vi summen

$$\operatorname{int}\sqrt{1} + \operatorname{int}\sqrt{2} + \operatorname{int}\sqrt{3} + \cdots = 3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 3 + \cdots \ ,$$

og det gælder om at afgøre, hvornår denne sum, netop passerer tallet 1000, dvs. vi søger et helt tal m, så

$$3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 3 + \cdots + (2m+1)\cdot m < 1000 \leq 3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 3 + \cdots + (2m+3)\cdot(m+1)$$

eller

$$\sum_{k=1}^{m} (2k+1)\cdot k < 1000 \leq \sum_{k=1}^{m+1} (2k+1)\cdot k \ .$$

Venstre side omskrives sådan:

$$\sum_{k=1}^{m} (2k+1)\cdot k = 2\sum_{k=1}^{m} k^2 + \sum_{k=1}^{m} k$$

$$= 2\cdot \tfrac{1}{6} m(m+1)(2m+1) + \tfrac{1}{2} m(m+1) = \tfrac{1}{6} m(m+1)(4m+5) \ .$$

Vi har her brugt de kendte formler for summen af de m første kvadrattal samt summen for de første m tal i talrækken. For $m = 10$ og $m = 11$ får vi

$$\tfrac{1}{6}\cdot 10\cdot 11\cdot 45 = 825 \quad \text{og} \quad \tfrac{1}{6}\cdot 11\cdot 12\cdot 49 = 1078 \ .$$

Altså er

$$3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 3 + \cdots + 21\cdot 10 = 825$$

summen af $3 + 5 + 7 + \cdots + 21$ tal af formen $\operatorname{int}\sqrt{k}$, dvs. summen af 120 tal, så

$$\text{int}\sqrt{1}+\text{int}\sqrt{2}+\text{int}\sqrt{3}+\cdots+\text{int}\sqrt{120}=825 .$$

Vi skal finde *n* så

$$\text{int}\sqrt{1}+\text{int}\sqrt{2}+\text{int}\sqrt{3}+\cdots+\text{int}\sqrt{120}+\text{int}\sqrt{121}+\cdots+\text{int}\sqrt{n}\geq 1000$$

eller

$$825 + (n - 120) \cdot 11 \geq 1000 ,$$

hvoraf

$$825 + 11n - 1320 \geq 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 135{,}909 .$$

Altså er $n = 136$, og summen er

$$825 + 16 \cdot 11 = 1001 .$$

b. Vi sætter

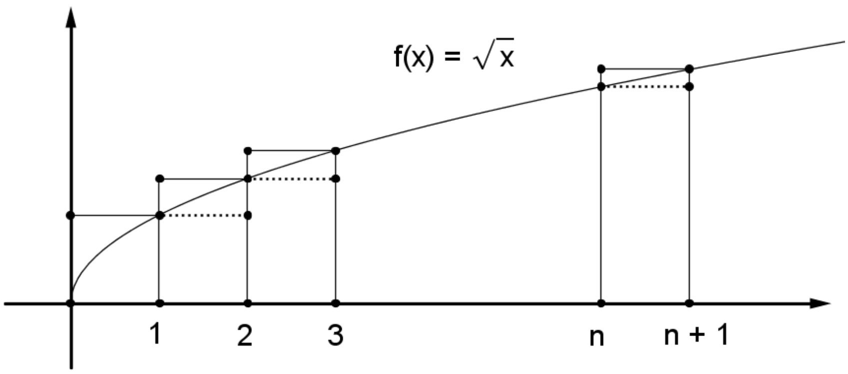
$$s(n) = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} .$$

En højresum for funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ i intervallet $[0;n]$ giver vurderingen

$$\int_0^n \sqrt{x}\,dx < s(n) \quad \Leftrightarrow \quad s(n) > \tfrac{2}{3}n\sqrt{n} ,$$

og en venstresun i intervallet $[1;n+1]$ giver

$$s(n) < \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,dx \quad \Leftrightarrow \quad s(n) < \tfrac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}-\tfrac{2}{3} .$$



Altså er

$$\tfrac{2}{3}n\sqrt{n} < s(n) < \tfrac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}-\tfrac{2}{3} . \tag{1}$$

Vi ønsker, at $\frac{2}{3}n\sqrt{n}$ ligger 'i nærheden' af 1000 og for $n = 130$ får vi

$$\tfrac{2}{3}\cdot 130\cdot\sqrt{130} < s(139) < \tfrac{2}{3}\cdot 131\cdot\sqrt{131}-\tfrac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 988{,}152 < s(130) < 998{,}909$$

og for $n = 131$:

$$999{,}576 < s(131) < 1010{,}376 .$$

Vi kan ikke heraf slutte, at 131 led er nok. Vi kan imidlertid tage de 4 første led ud særskilt i summen oven for:

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\int_4^n \sqrt{x}dx < s(n) < \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\int_5^{n+1} \sqrt{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}8129+\tfrac{2}{3}n\sqrt{n} < s(n) < \tfrac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}-1{,}3073 .$$

For n = 130 og n = 131 får vi

$$988{,}965 < s(130) < 998{,}268 \quad \text{og} \quad 1000{,}287 < s(131) < 1009{,}736 .$$

Altså passerer summen tallet 1000 ved led nr. 131.

Se i øvrigt Opgavehjørnet nr. 102 (september 1993).