Svar på opgave 332 (September 2016)

Opgave:

a. Vis, at der findes præcis to reelle løsninger til ligningssystemet

$$x + y^2 + z^4 = 0$$
$$y + z^2 + x^4 = 0$$
$$z + x^2 + y^4 = 0$$

b. For hvilke værdier af a har følgende ligningssystem løsninger (x,y)?

$$x + y = a$$
$$x^3 + y^3 = a$$
$$x^5 + y^5 = a$$

Besvarelse:

a.

Af den første ligning følger, at $x \le 0$, af den anden at $y \le 0$ og af den tredje, at $z \le 0$.
På grund af symmetrien kan vi antage, at

$$z \le y \le x \le 0 \quad \text{eller} \quad y \le z \le x \le 0 .$$

Vi gennemgår de to muligheder.

I. $z \le y \le x \le 0$.

Her er

$$0 \le x^2 \le y^2 \le z^2 \quad \text{og} \quad 0 \le x^4 \le y^4 \le z^4 .$$

Subtraktion af den tredje ligning fra den første giver

$$(x - z) + (y^2 - x^2) + (z^4 - y^4) = 0 .$$

Hver af parenteserne er ikke-negativ, så vi får, at $x = z = y$.

II. $y \le z \le x \le 0$.

Her er

$$0 \le x^2 \le z^2 \le y^2 \quad \text{og} \quad 0 \le x^4 \le z^4 \le y^4 .$$

Subtraktion af den anden ligning fra den første giver

$$(x - y) + (y^2 - z^2) + (z^4 - x^4) = 0 .$$

Hver af parenteserne er ikke-negativ, så vi igen får, at $x = y = z$.
Da nu en løsning opfylder, at $x = y = z$, er

$$x + x^2 + x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^3 + x + 1) = 0 .$$

Ligningen $x^3 + x + 1 = 0$ har løsningen x = -0,6823, så ligningssystemet har løsningerne

$$(x,y,z)\ :\ (0,0,0,)\ ,\ (-0{,}6823\ ,\ -0{,}6823\ ,\ -0{,}6823)\ .$$

I øvrigt fås ved hjælp af teorien for tredjegradsligningen, at den eksakte værdi for x, y og z er

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{31}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{31}{108}}}\ .$$

b.

1. metode.

Hvis $a = 0$ er løsningerne $(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = (k,-k)$, hvor k er et reelt tal. Antag, at $a \neq 0$. Vi sætter $xy = r$ og ser, at x og y er løsninger til andengradsligningen

$$t^2 - at + r = 0\ . \tag{1}$$

Så er

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2r\ ,$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = a(a^2 - 3r) = a^3 - 3ar\ ,$$
$$x^4 + y^4 = (x + y)(x^3 + y^3) - xy(x^2 + y^2) = a(a^3 - 3ar) - r(a^2 - 2r) = a^4 - 4a^2r + 2r^2\ ,$$
$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 + y^4) - xy(x^3 + y^3) = a(a^4 - 4a^2r + 2r^2) - r(a^3 - 3ar) = a^5 - 5a^3r + 5ar^2\ .$$

Nu har vi

$$x^3 + y^3 = a \quad\Leftrightarrow\quad a^3 - 3ar = a \quad\Leftrightarrow\quad r = \frac{a^2-1}{3}$$

Desuden er

$$x^5 + y^5 = a \quad\Leftrightarrow\quad a^5 - 5a^3r + 5ar^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a^4 - 5a^2r + 5r^2 = 1\ .$$

Heri indsættes udtrykket for r:

$$a^4 - 5a^2\cdot\frac{a^2-1}{3} + 5\cdot\left(\frac{a^2-1}{3}\right)^2 = 1\ ,$$

hvilket efter lidt algebra er ensbetydende med

$$a^4 - 5a^2 + 4 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2 = 1\ \vee\ a^2 = 4\ .$$

De mulige værdier er altså $a = \pm 1$ og $a = \pm 2$.

Vi bemærker, at andengradsligningen (1) har diskriminanten

$$d = a^2 - 4r = a^2 - 4\cdot\tfrac{1}{3}(a^2 - 1) = \tfrac{1}{3}(4 - a^2) \geq 0\ ,$$

idet $-2 \leq a \leq 2$.

Hvis $a = 1$ er $r = 0$ og systemet

$$x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = 1$$

har løsningerne $(x,y) = (1,0)$ og $(x,y) = (0,1)$.

Hvis $a = -1$ er $r = 0$, og systemet

$$x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = -1$$

har løsningerne $(x,y) = (-1,0)$ og $(x,y) = (0,-1)$.

Hvis $a = 2$ er $r = 1$, og systemet

$$x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = 2$$

har løsningen $(x,y) = (1,1)$.

Hvis $a = -2$ er $r = 1$, og systemet

$$x + y = x^3 + y^3 = x^5 + y^5 = -2$$

har løsningen $(x,y) = (-1,-1)$.

2. metode. (Hans Benner, Randers).

Igen antager vi, at $a \neq 0$. Af den første ligning fås $y = a - x$, som indsættes i den anden:

$$x^3 + (a - x)^3 = a \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = a$$

$$\Leftrightarrow \quad 3ax^2 - 3a^2x + a^3 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3ax + a^2 - 1 = 0\ .$$

Diskriminanten er

$$d = 9a^2 - 12(a^2 - 1) = 12 - 3a^2\ .$$

Vi må derfor kræve, at $-2 \leq a \leq 2$. Vi får, at

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{12 - 3a^2}}{6}\ ,\ \ y = a - \frac{3a \pm \sqrt{12-3a^2}}{6} = \frac{3a \mp \sqrt{12-3a^2}}{6}\ .$$

Disse udtryk indsættes i den tredje ligning, idet vi på grund af symmetrien kan vælge det ene sæt fortegn:

$$a = x^5 + y^5 =$$

$$\left(\frac{3a + \sqrt{12-3a^2}}{6}\right)^5 + \left(\frac{3a - \sqrt{12-3a^2}}{6}\right)^5 = \frac{1}{6^5}\left(\left(3a + \sqrt{12-3a^2}\right)^5 + \left(3a + \sqrt{12-3a^2}\right)^5\right)$$

Nu er

$$(p + q)^5 + (p - q)^5 = 2p^5 + 20p^3q^2 + 10pq^4\ ,$$

så vi får

$$6^5 \cdot a = 2 \cdot (3a)^5 + 20 \cdot (3a)^3 \cdot (12 - 3a^2) + 10 \cdot 3a \cdot (12 - 3a^2)^2$$

Denne ligning reduceres ved kedsommelig algebra til

$$a^4 - 5a^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 2 \ \vee \ a = \pm 1\ .$$

Løsningerne til ligningssystemet fås derefter som oven for.