Svar på opgave 336 (Januar 2017)

Opgave:

De komplekse tal a, b og c opfylder ligningssystemet

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= b\\ (b+c)(b+a) &= c\\ (c+a)(c+b) &= a\ .\end{aligned}$$

Vis, at a, b og c er reelle.

Besvarelse:

1. metode

Lad

$$P(x) = x^3 - sx^2 + qx - p$$

være polynomiet af 3. grad med rødderne a, b og c. Så er

$$x^3 - sx^2 + qx - p = (x-a)(x-b)(x-c)\ ,$$

hvoraf de tre Viètes former:

$$s = a + b + c\ \ ,\ \ q = ab + bc + ca\ \ ,\ \ p = abc\ .$$

De tre givne ligninger omskrives til

$$\begin{aligned} a^2 + ab + ac + bc = b \quad&\Leftrightarrow\quad sa + bc = b\\ b^2 + ab + bc + ca = c \quad&\Leftrightarrow\quad sb + ca = c\\ c^2 + ca + cb + ab = a \quad&\Leftrightarrow\quad sc + ab = a\ .\end{aligned} \tag{1}$$

Addition af disse ligninger giver

$$s(a+b+c) + bc + ca + ab = a + b + c$$

$$\Leftrightarrow\quad s^2 + q = s \quad\Leftrightarrow\quad q = s - s^2\ .$$

Ved multiplikation af ligningerne (1) med henholdsvis a, b og c får vi

$$\begin{aligned} sa^2 + abc &= ab\\ sb^2 + abc &= bc\\ sc^2 + abc &= ac\ ,\end{aligned}$$

og addition af disse ligninger giver

$$s(a^2 + b^2 + c^2) + 3p = q \quad\Leftrightarrow\quad 3p = s - s^2 - s(a^2 + b^2 + c^2)\ . \tag{2}$$

Nu er

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca) = s^2 - 2q\ ,$$

så vi af (2) får

$$3p = s - s^2 - s(s^2 - 2q) = s - s^2 - s^3 + 2sq = s - s^2 - s^3 + 2s(s - s^2) = -3s^3 + s^2 + s$$

hvoraf

$$p = \tfrac{1}{3}(-3s^3 + s^2 + s) \tag{3}$$

De tre givne ligninger omskrives til

$$\begin{aligned}(s - c)(s - b) &= b\\ (s - a)(s - c) &= c\\ (s - b)(s - a) &= a\ ,\end{aligned}$$

og multiplikation af disse giver

$$\begin{aligned}&((s - a)(s - b)(s - c))^2 = abc\\ \Leftrightarrow\quad &[s^3 - (a + b + c)s^2 + (ab + bc + ca)s - abc]^2 = abc\\ \Leftrightarrow\quad &(s^3 - s^3 + qs - p)^2 = p\\ \Leftrightarrow\quad &[(s - s^2)s - \tfrac{1}{3}(-3s^3 + s^2 + s)]^2 = \tfrac{1}{3}(-3s^3 + s^2 + s)\ .\end{aligned}$$

Et orgie i kedsommelig algebra forvandler denne ligning til

$$s(s + 1)^2(4s - 3) = 0$$

Hvis $s = 0$, er $q = s - s^2 = 0$ og efter (3) er $p = 0$, så $P(x) = x^3$ med rødderne $a = b = c = 0$. Altså er a, b og c reelle.

Hvis $s = -1$ er

$$q = s - s^2 = -2 \quad \text{og} \quad p = \tfrac{1}{3}(3+1-1) = 1$$

så $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$. En tabel over funktionsværdier er:

x	-2	-1	0	1	2
$P(x)$	-1	1	-1	-1	7

De tre rødder a, b og c er altså reelle og ligger i intervallerne]-2;-1[,]-1;0[og]1;2[.

Hvis endelig s = $\tfrac{3}{4}$ er

$$q = s - s^2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16} \quad \text{og} \quad p = \frac{1}{3}\left(-3\cdot\frac{27}{64} + \frac{9}{16} + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{64}\ ,$$

hvoraf

$$P(x) = x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{3}{16}x - \tfrac{1}{64} = \tfrac{1}{64}(64x^3 - 48x^2 + 12x - 1) = \tfrac{1}{64}(4x - 1)^3\ .$$

Her er de reelle rødder $a = b = c = \tfrac{1}{4}$.

2. metode

Vi trækker den anden ligning fra den første og får

$$(a + b)(a + c) - (b + c)(b + a) = b - c \quad \Leftrightarrow \quad (a + b)(a - b) = b - c\ . \tag{4}$$

Analogt fås ved parvis subtraktion af de øvrige ligninger:

$$(b + c)(b - c) = c - a \quad \text{og} \quad (c + a)(c - a) = a - b\ . \tag{5}$$

Hvis to af tallene a, b og c er ens, får vi af disse ligninger, at alle tre tal er ens. Det oprindelige ligningssystem er da

$$2a \cdot 2a = a \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee a = \tfrac{1}{4}.$$

Antag så, at der ikke findes to ens tal blandt de tre. Multiplikation af ligningerne (4) og (5) giver

$$(a + b)(a - b)(b + c)(b - c)(c + a)(c - a) = (b - c)(c - a)(a - b)$$
$$\Leftrightarrow \quad (a + b)(b + c)(c + a) = 1 \ .$$

Hvis vi benytter de oprindelige ligninger, får vi

$$b(b + c) = c(c + a) = a(a + b) = 1 \ . \tag{6}$$

Hvis et af de tre tal a, b og c er reelt, fx a, er

$$a + b = \tfrac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad b = \tfrac{1}{a} - a \ ,$$

så også b er reel. Derefter er også c reel.

Antag så, at ingen af de tre tal er reelle. To af tallene

$$\arg a \ , \arg b \ , \arg c$$

ligger i et af intervallerne]0;π] eller]π;2π[. Antag, at det drejer sig om tallene $\arg a$ og $\arg b$. Så vil også (vektor)summen $a + b$ have et argument i det samme interval og der- med har vi efter (6):

$$\arg a \leq \arg a + \arg(a + b) = \arg a(a + b) = \arg 1 = 0$$

i strid med, at $\arg a$ ligger i]0;π] eller]π;2π[. Antagelsen om, at ingen af de tre tal er reelle er dermed falsk. Mindst et af tallene er derfor reelt og efter ovenstående er så alle tre reelle.

3. metode

Vi sætter

$$x = a + b + c \quad , \quad y = ab + bc + ca \quad , \quad z = abc \ . \tag{1}$$

Ligningssystemet omskrives til

$$\begin{aligned} a = (c + a)(c + b) \quad &\Leftrightarrow \quad a = c^2 + ab + bc + ca \quad \Leftrightarrow \quad a = c^2 + y \\ b = (a + b)(a + c) \quad &\Leftrightarrow \quad b = a^2 + y \\ c = (b + a)(b + c) \quad &\Leftrightarrow \quad c = b^2 + y \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Ved addition fås

$$x = a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 + 3y \ . \tag{3}$$

Desuden fås

$$\begin{aligned} ab &= (c + a)^2(a + b)(b + c) \\ bc &= (a + b)^2(b + c)(c + a) \\ ca &= (b + c)^2(b + c)(c + a) \ , \end{aligned} \tag{4}$$

hvoraf ved addition

$$\begin{aligned} y = ab + bc + ca &= (a + c)(a + b)(b + c) \cdot [c + a + a + b + b + c] \\ &= (c + a)(a + b)(b + c) \cdot 2x \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Vi har, at

$$x^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \ ,$$

og ved hjælp af (5) omformes dette til

$$x^2 = x - 3y + 2y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x - y \ . \tag{6}$$

Videre er

$$xy - z = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc \ .$$

Ved udregning af begge sider af lighedstegnet kontrolleres, at

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = (a + b)(b + c)(c + a) ,$$

så vi har, at

$$(a + b)(b + c)(c + a) = xy - z . \tag{7}$$

Af (5) og (7) får vi

$$y = (xy - z)\cdot 2x . \tag{8}$$

Ved multiplikation af ligningerne i (4) får vi ved hjælp af (7) og (8):

$$a^2b^2c^2 = (c + a)^4(b + c)^4(a + b)^4 \quad \Leftrightarrow \quad abc = [ab + bc + ca]^2$$

$$\Leftrightarrow \quad abc = (xy - z)^2 = \left(\tfrac{y}{2x}\right)^2 . \tag{9}$$

Her forudsættes $x \neq 0$.

Antag nu, at $x = 0$, dvs. at $a + b + c = 0$. Det oprindelige ligningssystem får udseendet

$$\begin{array}{lcl} -c\cdot(-b) = b & & bc = b \\ -a\cdot(-c) = c & \text{eller} & ac = c \\ -b\cdot(-a) = a & & ab = a \ . \end{array}$$

Løsningerne er $(a,b,c) = (0,0,0)$ og $(a,b,c) = (1,1,1)$. Da $x = 0$ forkastes den sidste mulighed.

Antag så, at $x \neq 0$. Af (6) får vi

$$y = x - x^2 , \tag{10}$$

og af (9) følger

$$z = \left(\frac{y}{2x}\right)^2 = \left(\frac{x - x^2}{2x}\right)^2 = \frac{(1-x)^2}{4} . \tag{11}$$

De fundne udtryk for y og z indsættes i (8):

$$x - x^2 = 2x\cdot\left(x\cdot(x - x^2) - \frac{(1-x)^2}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = 2\left(x^2(1-x) - \tfrac{1}{4}(1-x)^2\right) . \tag{12}$$

Her er $x = 1$ en løsning. Hvis $x = 1$ følger af (10) og (11), at $y = 0$ og $z = 0$. Af (1) følger, at to af tallene a, b og c er 0. Men så viser ligningssystemet (2), at $a = b = c = 0$. Dette strider imidlertid imod, at $x = 1$.

Antag derfor, at $x \neq 1$. Af (12) får vi

$$1 = 2(x^2 - \tfrac{1}{4}(1-x)) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}x = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \vee x = \tfrac{3}{4} .$$

Vi får af (10) og (11), at

$$x = -1 \quad \text{giver} \quad y = -2 \text{ og } z = 1$$

$$x = \tfrac{3}{4} \quad \text{giver} \quad y = \tfrac{3}{16} \quad \text{og} \quad z = \tfrac{1}{64} .$$

Vi har, at

$$(u - a)(u - b)(u - c) = u^3 - (a + b + c)u^2 + (ab + bc + ca)u - abc = u^3 - xu^2 + yu - z .$$

Hvis (a,b,c) er en løsning til det oprindelige ligningssystem, er a, b og c rødder i poly- nomiet

$$P(u) = u^3 - xu^2 + yu - z .$$

Vi gennemgår de to muligheder.

I. $(x,y,z) = (-1,-2,1)$. Her er

$$P(u) = u^3 + u^2 - 2u - 1 .$$

Vi finder tabellen over funktionsværdier:

u	-2	-1	0	2
$P(u)$	-1	1	-1	7

Altså findes en rod i hvert af intervallerne]-2;-1[,]-1;0[og]0;2[, dvs. tre reelle løsnin- ger, så a, b og c er reelle tal. Ved at gøre prøve, kan man efterse, at de faktisk er løsnin- ger.

II. $(x,y,z) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{64}\right)$. Her får vi

$$P(u) = u^3 - \tfrac{3}{4}u^2 + \tfrac{3}{16}u - \tfrac{1}{64} = \left(u - \tfrac{1}{4}\right)^3 ,$$

så $\frac{1}{4}$ er tredobbelt rod. Altså er $a = b = c = \frac{1}{4}$. Vi efterprøver, at disse tal er løsninger til det oprindelige ligningssystem.

I alle tilfælde har vi fundet, at a, b og c er reelle tal.

4. metode

Hvis $b = 0$ ser ligningssystemet sådan ud:

$$a(a + c) = 0$$
$$ca = c$$
$$(c + a)c = a .$$

Vi ser på den første ligning. Hvis $a = 0$ giver den anden ligning, at $c = 0$. Hvis $a + c = 0$, giver den tredje ligning $a = 0$ og dermed får vi igen af den anden ligning, at $c = 0$.

Altså gælder, at hvis en af de ubekendte er 0, er også de to andre 0. Dermed er $(a,b,c) = (0,0,0)$ en løsning.

Antag så, at hverken a, b eller c er 0. Ved division får vi

$$\frac{a+c}{b+c} = \frac{b}{c} \quad \text{og} \quad \frac{a+b}{a+c} = \frac{c}{a} .$$

Her er det nærliggende at bruge substitutionerne $a = s \cdot c$ og $b = t \cdot c$, hvor $s, t \neq 0$. Så får vi

$$\frac{sc+c}{tc+c} = \frac{tc}{c} \quad \text{og} \quad \frac{sc+tc}{sc+c} = \frac{c}{sc} ,$$

hvoraf

$$\frac{s+1}{t+1} = t \quad \text{og} \quad \frac{s+t}{s+1} = \frac{1}{s} .$$

Den første ligning giver, at

$$s = t^2 + t - 1 ,$$

hvilket indsat i den anden fører til

$$\frac{t^2+t-1+t}{t^2+t-1+1} = \frac{1}{t^2+t-1} \quad \Leftrightarrow \quad t^4 + 3t^3 - t^2 - 4t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(t^3 + 4t^2 + 3t - 1) = 0 .$$

Hvis $t = 1$ er $s = 1$, så $a = b = c$. Ligningerne forvandles til

$$4a^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1}{4} ,$$

idet $a \neq 0$. Dermed fås løsningen $(a,b,c) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Ligningen

$$t^3 + 4t^2 + 3t - 1 = 0 \tag{1}$$

har tre reelle løsninger. Da $s = t^2 + t - 1$, er også s reel. Det oprindelige ligningssystem ser sådan ud:

$$\begin{aligned} (sc+tc)\cdot(sc+c) &= tc \\ (tc+c)\cdot(tc+sc) &= c \\ (c+sc)\cdot(c+tc) &= sc \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (s+t)\cdot c\cdot(s+1) &= t \\ (t+1)\cdot c\cdot\ (s+t) &== 1 \\ (s+1)\ \cdot c\cdot(t+1) &= s\ . \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$c = \frac{t}{(s+t)(s+1)} = \frac{1}{(t+1)(s+t)} = \frac{s}{(s+1)(t+1)}\ .$$

De tre brøker er ens på grund af sammenhængen $s = t^2 + t - 1$. Vi får ved indsættelse af de tre reelle værdier for t tre reelle værdier for c og dermed er også $a = sc$ og $b = tc$ re- elle.

Ligningen (1) har i øvrigt løsningerne

$$t = \tfrac{1}{3}\left[2\sqrt{7}\cdot\cos\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{Arc}\cot\tfrac{-\sqrt{3}}{9}\right)-4\right]\quad,\quad t = \tfrac{1}{3}\left[2\sqrt{7}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{Arctan}\tfrac{\sqrt{3}}{9}+\tfrac{\pi}{3}\right)-4\right]\ ,$$

$$t = \tfrac{1}{3}\left[2\sqrt{7}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{3}\operatorname{Arctan}\tfrac{\sqrt{3}}{9}\right)-4\right]\ .$$

5. metode

Vi sætter

$$x = a + b\ ,\ y = a + c\ ,\ z = b + c\ .$$

Vi får heraf, at

$$2a = x + y - z\quad,\quad 2b = x - y + z\quad,\quad 2c = -x + y + z\ .$$

Ligningssystemet er nu ensbetydende med

$$\begin{aligned} 2xy &= x - y + z \\ 2xz &= -x + y + z \\ 2yz &= x + y - z\ . \end{aligned}$$

Af den første lignings fås

$$z = 2xy - x + y\ ,$$

hvilket indsættes i de to andre:

$$2x(2xy - x + y) = -x + y + 2xy - x + y \quad\Leftrightarrow\quad (2x^2 - 1)y = x(x - 1)\ , \tag{1}$$

og

$$2y(2xy - x + y) = x + y - 2xy + x - y \quad\Leftrightarrow\quad (2x + 1)y^2 = x\ . \tag{2}$$

Vi antager, at $2x^2 - 1 \neq 0$ og at $2x + 1 \neq 0$. Af (1) fås

$$(2x^2 - 1)\cdot y^2 = x^2(x - 1)^2\ ,$$

og heri indsættes (2), idet vi forudsætter $x \neq 0$:

$$(2x^2-1)^2\cdot\frac{x}{2x+1} = x^2(x-1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad (2x^2-1)^2 = x(2x+1)(x-1)^2\ . \tag{3}$$

Hvis $x = 0$ er $y = 0$ og $z = 0$ og dermed er $(a,b,c) = (0,0,0)$ en reel løsning.

Ligningen (3) omskrives til

$$4x^4 + 1 - 4x^2 = (2x^2 + x)(x^2 - 2x + 1) \quad\Leftrightarrow\quad 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (2x - 1)(x^3 + 2x^2 - x - 1) = 0\ .$$

Løsningen $x = \frac{1}{2}$ giver $y = z = \frac{1}{2}$, så $(a,b,c) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ er en løsning til ligningssyste- met.

Polynomiet

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$$

har tre reelle rødder i intervallerne]-3;-2[,]-1;0[og]0;1[. Hver af disse indsættes i (1):

$$y = \frac{x(x-1)}{2x^2-1} \ ,$$

og derefter sammen med *y*-værdierne i

$$z = 2xy - x + y \ ,$$

så *y* og *z* også er reelle. Endelig er som nævnt

$$2a = x + y - z \quad , \quad 2b = x - y + z \quad , \quad 2c = -x + y + z \ ,$$

så *a*, *b* og *c* er reelle.