Svar på opgave 338 (Marts 2017)

Opgave:

Løs inden for de komplekse tal ligningssystemet

$$x(x - y)(x - z) = 3$$
$$y(y - x)(y - z) = 3$$
$$z(z - x)(z - y) = 3$$

Besvarelse:

1. metode

En løsning (x,y,z) opfylder, at $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$.
Division af (1) med (2), (1) med (3) og (2) med (3) giver

$$\frac{x(x-y)(x-z)}{y(y-x)(y-z)} = 1 \iff x^2 + xz = -y^2 + yz \iff x^2 + y^2 = xz + yz \tag{4}$$

$$\frac{x(x-y)(x-z)}{z(z-x)(z-y)} = 1 \iff x^2 - xy = -z^2 + y^2 \iff x^2 + z^2 = xy + yz \tag{5}$$

$$\frac{y(y-x)(y-z)}{z(z-x)(z-y)} = 1 \iff y^2 - xy = -z^2 + xz \iff y^2 + z^2 = xy + xz. \tag{6}$$

Addition heraf giver

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz \ . \tag{7}$$

Subtraktion af (5) fra (4) giver

$$y^2 - z^2 = xz - xy \iff (y + z)(y - z) = x(z - y) \iff y + z + x = 0 \ .$$

Kvadrering giver

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 0 \ ,$$

og ved at indsætte (7) i dette fås

$$xy + yz + xz + 2xy + 2yz + 2xz = 0 \iff xy + yz + xz = 0 \ ,$$

så vi i alt får

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz = 0 \ . \tag{8}$$

Ligningerne (4) og (8), (5) og (8) samt (6) og (8) giver

$$z^2 = xy \quad , \quad y^2 = xz \quad , \quad x^2 = yz \ .$$

Multiplikation af disse ligninger med henholdsvis *z*, *y* og *x* giver

$$z^3 = xyz \quad , \quad y^3 = xyz \quad , \quad x^3 = xyz \ ,$$

så

$$x^3 = y^3 = z^3 = xyz \ .$$

Altså er *x*, *y* og *z* de komplekse kubikrødder af det komplekse tal $a = xyz$, så vi kan skrive, at

$$x = \sqrt[3]{a} \quad , \quad y = \varepsilon \sqrt[3]{a} \quad , \quad z = \varepsilon^2 \sqrt[3]{a} \ , \tag{9}$$

hvor ε er den komplekse 3. enhedsrod

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

som opfylder

$$\varepsilon^3 = 1 \ \text{ og } \ \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \ .$$

Ved indsættelse i (1) fås

$$\sqrt[3]{a} \cdot \left(\sqrt[3]{a} - \varepsilon \sqrt[3]{a} \right) \cdot \left(\sqrt[3]{a} - \varepsilon^2 \sqrt[3]{a} \right) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2) = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad a(1-\varepsilon^2-\varepsilon+\varepsilon^3) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a(-\varepsilon^2-\varepsilon-1+3) = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot 3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \ .$$

Af (9) følger, at løsningerne (*x*,*y*,*z*) til det oprindelige ligningssystem er de seks talsæt

$$(x,y,z) \ : \ (1,\varepsilon,\varepsilon^2) \ , \ (1,\varepsilon^2,\varepsilon) \ , \ (\varepsilon,1,\varepsilon^2) \ , \ (\varepsilon,\varepsilon^2,1) \ , \ (\varepsilon^2,1,\varepsilon) \ , \ (\varepsilon^2,\varepsilon,1) \ .$$

2. metode

Som under 1. metode får vi

$$x + y + z = 0 \quad \text{så} \quad y = -x - z \ ,$$

og $xy = z^2$. Dermed er

$$x(-x-z) = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + zx + z^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-z \pm \sqrt{-3z^2}}{2} = \tfrac{1}{2} z \left(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3} \right) \ .$$

Derefter er

$$y = -z - x = -z - \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \tfrac{1}{2} z \left(-1 \mp \mathrm{i}\sqrt{3} \right) .$$

Vi indsætter de fundne værdier for x og y i systemets første ligning. Først bruger vi

$$(x,y) = \left(\tfrac{1}{2} z(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}), \tfrac{1}{2} z(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}) \right) = \left(\varepsilon z , \varepsilon^2 z \right)$$

og får

$$\varepsilon z \cdot (\varepsilon z - \varepsilon^2 z) \cdot (\varepsilon z - z) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^2 z(z - \varepsilon z)(\varepsilon z - z) = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon^2 z(z-\varepsilon z)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon^2 z^3 (1-\varepsilon)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad z^3(-\varepsilon^2 - \varepsilon^4 + 2\varepsilon^3) = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3(-\varepsilon^2 - \varepsilon + 2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad z^3(\varepsilon + 1 - \varepsilon + 2) = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 \vee z = \varepsilon \vee z = \varepsilon^2 \ .$$

Dermed har vi løsningerne

$$(x,y,z) \ : \ (\varepsilon,\varepsilon^2,1) \ , \ (\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon) \ , \ (\varepsilon^3,\varepsilon^4,\varepsilon^2)$$

eller

$$(x,y,z)\ :\ (\varepsilon,\varepsilon^2,1)\ ,\ (\varepsilon^2,1,\varepsilon)\ ,\ (1,\varepsilon,\varepsilon^2)\ .$$

Ved at benytte

$$(x,y)=\left(\tfrac{1}{2}z(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}),\tfrac{1}{2}z(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})\right)=\left(\varepsilon^2 z\,,\varepsilon z\right)$$

får vi på samme måde løsningerne

$$(x,y,z)\ :\ (\varepsilon,,1,\varepsilon^2)\ ,\ (1,\varepsilon^2,\varepsilon)\ ,\ (\varepsilon^2,\varepsilon,1)\ .$$