Svar på opgave 342 (September 2017)

Opgave:

a. Vis, at der for alle reelle tal x gælder, at

$$\cos^3\tfrac{x}{3}+\cos^3\tfrac{x+2\pi}{3}+\cos^3\tfrac{x+4\pi}{3}=\tfrac{3}{4}\cos x\ .$$

b. Vis, at ΔABC er ligebenet netop hvis

$$a\cdot\cos B + b\cdot\cos C + c\cdot\cos A = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\ .$$

Besvarelse:

a. Efter formlen for tredobbelt vinkel gælder

$$\cos t = 4\cos^3\tfrac{t}{3}-3\cos\tfrac{t}{3}\ .$$

Vi sætter $t = x$, $t = x + 2\pi$ og $t = x + 4\pi$ og får

$$\cos x = 4\cos^3\tfrac{x}{3}-3\cos\tfrac{x}{3}\ ,$$

$$\cos(x+2\pi) = 4\cos^3\tfrac{x+2\pi}{3}-3\cos\tfrac{x+2\pi}{3}\ ,$$

$$\cos(x+4\pi) = 4\cos^3\tfrac{x+4\pi}{3}-3\cos\tfrac{x+4\pi}{3}\ .$$

Addition giver

$$3\cos x = 4\left(\cos^3\tfrac{x}{3}+\cos^3\tfrac{x+2\pi}{3}+\cos^3\tfrac{x+4\pi}{3}\right)-3\left(\cos\tfrac{x}{3}+\cos\tfrac{x+2\pi}{3}+\cos\tfrac{x+4\pi}{3}\right)\ .$$

Den sidste patrentes udregnes til

$$\cos\tfrac{x}{3}+\cos\tfrac{x+2\pi}{3}+\cos\tfrac{x+4\pi}{3}=\cos\tfrac{x+2\pi}{3}+2\cos\tfrac{2x+4\pi}{6}\cdot\cos\tfrac{4\pi}{6}$$

$$=\cos\tfrac{x+2\pi}{3}+2\cos\tfrac{x+2\pi}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=0\ .$$

Dermed er

$$3\cos x = 4\left(\cos^3\tfrac{x}{3}+\cos^3\tfrac{x+2\pi}{3}+\cos^3\tfrac{x+4\pi}{3}\right),$$

hvilket er ensbetydende med det ønskede.

b.

1. metode

Efter sinusrelationerne er

$$a = 2R\cdot \sin A \ , \quad b = 2R\cdot \sin B \ , \quad c = 2R\cdot \sin C \ ,$$

hvor R er radius i trekantens omskrevne cirkel. Formlen er derfor ensbetydende med

$$2R\cdot \sin A\cdot \cos B + 2R\cdot \sin B\cdot \cos C + 2R\cdot \sin C\cdot \cos A$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(2R\cdot\sin A + 2R\cdot\sin B + 2R\cdot\sin C\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A\cdot \cos B + \sin B\cdot \cos C + \sin C\cdot \cos A = \sin A + \sin B + \sin C \ . \qquad (1)$$

Idet

$$2\sin x\cdot \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$$

er (1) ensbetydende med

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) + \sin(B + C) + \sin(B - C) + \sin(C + A) + \sin(C - A)$$

$$= \sin A + \sin B + \sin C \ . \qquad (2)$$

Nu er

$$\sin(A + B) = \sin C \ , \ \sin(B + C) = \sin A \ , \ \sin(C + A) = \sin B \ ,$$

så vi kan skrive (2) om til

$$\sin C + \sin(A - B) + \sin A + \sin(B - C) + \sin B + \sin(C - A) = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(A - B) + \sin(B - C) + \sin(C - A) = 0 \ . \qquad (3)$$

I almindelighed gælder formlen

$$\sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x) = -4\sin\tfrac{x-y}{2}\cdot\sin\tfrac{y-z}{2}\cdot\sin\tfrac{z-x}{2} \ ,$$

så (3) er ensbetydende med

$$4\sin\tfrac{A-B}{2}\cdot\sin\tfrac{B-C}{2}\cdot\sin\tfrac{C-A}{2} = 0 \ .$$

Heraf følger, at (mindst) to af vinklerne er i trekanten er lige store, så den er ligebenet (ligesidet). Hvis omvendt to vinkler i trekanten er lige store, kan vi regne tilbage og slutte, at den givne formel er opfyldt.

2. metode

Vi foretager følgende omskrivninger:

$$a\cdot \cos B + b\cdot \cos C + c\cdot \cos A = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2b} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2c} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c^2-a^2}{b} + b + \frac{a^2-b^2}{c} + c + \frac{b^2-c^2}{a} + a = a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c^2-a^2}{b} + \frac{a^2-b^2}{c} + \frac{b^2-c^2}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(c+a)(c-a)}{b} + \frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{(b+c)(b-c)}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(2s-b)(c-a)}{b} + \frac{(2s-c)(a-b)}{c} + \frac{(2s-a)(b-c)}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2s(c-a)}{b} - (c-a) + \frac{2s(a-b)}{c} - (a-b) + \frac{2s(b-c)}{a} - (b-c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{s(c-a)}{b}+\frac{s(a-b)}{c}+\frac{s(b-c)}{a}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad ac(c - a) + ab(a - b) + bc(b - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ac^2 - a^2c + a^2b - ab^2 + bc(b - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b - c)a^2 - (b^2 - c^2)a + bc(b - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b - c)(a^2 - (b + c)a + bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b - c)(a - b)(a - c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = c \ \vee \ a = b \ \vee \ a = c \ .$$