Svar på opgave 343 (Oktober 2017)

Opgave:

Tallene a, b og c er positive, og $a + b + c = 4$.

Vis, at $\frac{ab}{4+c}+\frac{bc}{4+a}+\frac{ca}{4+b} \le 1$.

Besvarelse:

1. metode.

Da $a + b + c = 4$ er

$$\frac{ab}{4+c}=\frac{ab}{a+b+2c} \quad , \quad \frac{bc}{4+a}=\frac{bc}{2a+b+c} \quad , \quad \frac{ca}{4+b}=\frac{ca}{a+2b+c} \ .$$

Da a, b og c er positive, er

$$\frac{4}{a+2b+c} \le \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{a+2b+c} \le \frac{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}}{2} \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+2b+c}{2} \ge \frac{2}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(a+b)+(b+c)}{2} \ge \frac{2}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}} \ .$$

Dette er sandt, fordi det er uligheden mellem aritmetisk og harmonisk middeltal for de to positive tal $a + b$ og $b + c$.

Uligheden, vi skal vise, er ensbetydende med

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{a+2b+c} \le \frac{1}{4}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4ab}{a+b+2c}+\frac{4bc}{2a+b+c}+\frac{4ca}{a+2b+c} \le a+b+c \ .$$

Efter (1) er

$$\frac{4ab}{a+b+2c}+\frac{4bc}{2a+b+c}+\frac{4ca}{a+2b+c}$$

$$\le ab\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{c+b}\right)+bc\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{a+c}\right)+ca\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)$$

$$=\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ca}{a+b}=b+a+c \ ,$$

hvilket skulle bevises.

For god ordens skyld viser vi uligheden mellem aritmetisk middeltal A og harmonisk middeltal H for to positive tal. Den fremgår ved ensbetydende regninger:

$$A \ge H \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+y}{2} \ge \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}\right) \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1 \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 \ ,$$

og dette er en kendt ulighed.

2. metode.

For alle reelle tal x og y gælder

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy \geq 4xy \ ,$$

og lighedstegnet gælder netop hvis $x = y$.

Altså gældfer for alle positive reelle tal a, b og c, at

$$(a+b+2c)^2 = ((a+c)+(b+c))^2 \geq 4(a+c)(b+c) \ ,$$

og lighedstegnet gælder netop hvis $a = b$. Vi har dermed

$$\frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{1}{4(a+c)(b+c)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a+b+2c} \leq \frac{a+b+2c}{4(a+b)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right).$$

Heraf fås, at

$$\frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$

og lighedstegnet gælder netop hvis $a = b$. Af denne ulighed og de to analoge finder vi ved addition, at

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{c+b}+\frac{ca}{a+b}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ca}{b+a}\right) = \frac{1}{4}(b+a+c) = 1 \ ,$$

og heraf fremgår den ønskede ulighed. Yderligere har vi vist, at der gælder lighedstegn i den givne ulighed netop hvis $a = b = c = \frac{4}{3}$.

Bemærkning. Walther Janous, Innsbruck, nævner, at der gælder følgende sætning:

For ikke-negative tal k gælder uligheden

$$\frac{ab}{a+b+kc}+\frac{bc}{b+c+ka}+\frac{ca}{c+a+kb} \leq \frac{a+b+c}{k+2}$$

for alle positive reelle tal a, b og c netop hvis $0 \leq k \leq 2$.