Svar på opgave 344 (November 2017)

Opgave:

Bestem samtlige sæt af seks konsekutive naturlige tal med følgende egenskab:
Produktet af to af tallene lagt sammen med produktet af to andre af tallene er lig med produktet af de to sidste tal.
Med andre ord: Udfyld hver af ruderne i regneskemaet

$$\square\cdot\square+\square\cdot\square=\square\cdot\square$$

med hver sit af seks konsekutive naturlige tal.

Besvarelse:

1. metode

Lad talsættet være $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$. Præcis to af de seks tal er delelige med 3, fx a_p og a_{p+3}. Hvis disse to tal ikke multipliceres sammen, får vi en ligning af typen

$$a_p\cdot a_q + a_{p+3}\cdot a_r = a_s\cdot a_t \quad \text{eller} \quad a_p\cdot a_q + a_s\cdot a_t = a_{p+3}\cdot a_r\ .$$

I det første tilfælde er venstre side delelig med 3 og højre side ikke. I det andet tilfælde er venstre side ikke delelig med 3, mens højre side er det. Derfor skal produktet $a_p\cdot a_{p+3}$ optræde i ligningen.

Lad n og $n + 3$ være delelige med 3. Produktet $n(n + 3)$ optræder altså i ligningen. To af de fire resterende tal er kongruente med 1 modulo 3 og de to sidste tal er kongruente med 2 modulo 3. De to resterende produkter er derfor kongruente med $1\cdot 1 = 1 \pmod 3$, med $1\cdot 2 = 2 \pmod 3$ eller med $2\cdot 2 = 1 \pmod 3$.

Vi slutter, at produktet $n(n + 3)$ ikke kan optræde på højre side i ligningen , som der- ved ville være delelig med 3. De fire øvrige tal kan nemlig så ikke fordeles i de resterende fire ruder, så summen bliver delelig med 3. Modulo 3 har vi nemlig mulighe- derne

$$1\cdot 1 + 2\cdot 2 \equiv 2 \pmod 3 \quad \text{eller} \quad 1\cdot 2 + 1\cdot 2 \equiv 1 \pmod 3$$

Tre af de skes tal er lige og tre er ulige. Tallene n og $n + 3$ har modsat paritet, så to af de resterende tal er lige og to er ulige. Da $n(n + 3)$ er lige, må de to resterende ulige tal op- træde i hver sit led.

Vi deler op i tilfælde:

I. De seks tal er $n - 2\ ,\ n - 1\ ,\ n\ ,\ n + 1\ ,\ n + 2\ ,\ n + 3$.

Produktet af de to tal på højre side af lighedstegnet skal være større end $n(n + 3)$. Den eneste mulighed er

$$(n - 2)(n - 1) + n(n + 3) = (n + 1)(n + 2) \quad \Leftrightarrow \quad n = 3\ .$$

Dermed får vi talsættet (1,2,3,4,5,6) og

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 5 \, .$$

II. De seks tal er $n - 1$, n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$.

Ligningen

$$(n + 4)(n - 1) + n(n + 3) = (n + 1)(n + 2) \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 3n - 2 = 0$$

har ingen hele løsninger, så $n + 4$ må optræde på højre side og skal multipliceres med et tal med modsat paritet, dvs. med $n + 1$ eller $n - 1$. Vi får derfor mulighederne

$$(n + 2)(n - 1) + n(n + 3) = (n + 1)(n + 4) \quad \Leftrightarrow \quad n = 3$$

og

$$(n + 2)(n + 1) + n(n + 3) = (n - 1)(n + 4) \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 3n + 6 = 0 \, ,$$

som ikke har løsninger. Vi har funder løsningen (2,3,4,5,6,7) og

$$5 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 7 \; .$$

III. De seks tal er n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, $n + 5$.

Vi får mulighederne

$$(n + 1)(n + 2) + n(n + 3) = (n + 4)(n + 5) \quad \Leftrightarrow \quad n = 6$$

$$(n + 2)(n + 5) + n(n + 3) = (n + 1)(n + 4) \;\; \text{: ingen løsninger}$$

$$(n + 1)(n + 4) + n(n + 3) = (n + 2)(n + 5) \quad \Leftrightarrow \quad n = 2 \, .$$

Dermed har vi fundet talsættene

$$(6,7,8,9,10,11) \quad \text{og} \quad (2,3,4,5,6,7)$$

og

$$7 \cdot 8 + 6 \cdot 9 = 10 \cdot 11 \quad \text{og} \quad 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 4 \cdot 7$$

I alt har vi fundet talsættene

$$(1,2,3,4,5,6) \;\; \text{med} \;\; 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 5$$

$$(2,3,4,5,6,7) \;\; \text{med} \;\; 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 7$$

$$(6,7,8,9,10,11) \;\; \text{med} \;\; 6 \cdot 9 + 7 \cdot 8 = 10 \cdot 11 \; .$$

2. metode

Tallene i ruderne på højre side af lighedstegnet i skemaet

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square = \square \cdot \square$$

kan blandt tallene

$$x \, , \, x + 1 \, , \, x + 2 \, , \, x + 3 \, , \, x + 4 \, , \, x + 5$$

vælges på K(6,2) = 15 måder. De resterende fire tal, som vi benævner a_1, a_2, a_3 og a_4 kan på venstre side placeres i ruderne på 3 måder, nemlig

$$a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 \quad , \quad a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 \quad , \quad a_1 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_3 \; .$$

I alt findes derfor $15 \cdot 3 = 45$ måder at anbringe de seks konsekutive tal i skemaets ruder. Disse muligheder ses i skemaet herunder, idet vi skriver

$$a \cdot b + c \cdot d = e \cdot f \, .$$

	$a\cdot b+c\cdot d$	$e\cdot f$	$a\cdot b+c\cdot d-e\cdot f$	D	
1	$2x^2+6x+6$	$x^2+9x+20$	$x^2-3x-14$		
2	$2x^2+6x+3$	$x^2+9x+20$	$x^2-3x-17$		
3	$2x^2+6x+2$	$x^2+9x+20$	$x^2-3x-18$	D = 81	x= 6
4	$2x^2+7x+8$	$x^2+8x+15$	x^2-x-7		
5	$2x^2+7x+4$	$x^2+8x+15$	x^2-x-11		
6	$2x^2+7x+2$	$x^2+8x+15$	x^2-x-13		
7	$2x^2+8x+12$	$x^2+7x+10$	x^2+x+2		
8	$2x^2+8x+4$	$x^2+7x+10$	x^2+x-6	D = 25	x= 2
9	$2x^2+8x+3$	$x^2+7x+10$	x^2+x-7		
10	$2x^2+9x+12$	x^2+6x+5	x^2+3x+7		
11	$2x^2+9x+8$	x^2+6x+5	x^2+3x+3		
12	$2x^2+9x+6$	x^2+6x+5	x^2+3x+1		
13	$2x^2+10x+14$	x^2+5x	$x^2+5x+14$		
14	$2x^2+10x+11$	x^2+5x	$x^2+5x+11$		
15	$2x^2+10x+10$	x^2+5x	$x^2+5x+10$		
16	$2x^2+8x+10$	$x^2+7x+12$	x^2+x-2	D = 9	x = 1
17	$2x^2+8x+5$	$x^2+7x+12$	x^2+x-7		
18	$2x^2+8x+2$	$x^2+7x+12$	x^2+x-10		
19	$2x^2+9x+15$	x^2+6x+8	x^2+3x+7		
20	$2x^2+9x+5$	x^2+6x+8	x^2+3x-3		
21	$2x^2+9x+3$	x^2+6x+8	x^2+3x-5		
22	$2x^2+10x+15$	x^2+5x+4	$x^2+5x+11$		
23	$2x^2+10x+10$	x^2+5x+4	x^2+5x+6	D = 1	
24	$2x^2+10x+6$	x^2+5x+4	x^2+5x+2		
25	$2x^2+11x+17$	x^2+4x	$x^2+7x+17$		
26	$2x^2+11x+13$	x^2+4x	$x^2+7x+13$		
27	$2x^2+11x+11$	x^2+4x	$x^2+7x+11$		
28	$2x^2+10x+20$	x^2+5x+6	$x^2+5x+14$		
29	$2x^2+10x+5$	x^2+5x+6	x^2+5x-1		
30	$2x^2+10x+4$	x^2+5x+6	x^2+5x-2		
31	$2x^2+11x+20$	x^4+4x+3	$x^2+7x+17$		
32	$2x^2+11x+10$	x^4+4x+3	x^2+7x+7		
33	$2x^2+11x+8$	x^4+4x+3	x^2+7x+5		
34	$2x^2+12x+22$	x^2+3x	$x^2+9x+22$		
35	$2x^2+12x+14$	x^2+3x	$x^2+9x+14$	D = 25	
36	$2x^2+12x+13$	x^2+3x	$x^2+9x+13$		
37	$2x^2+12x+20$	x^2+3x+2	$x^2+9x+18$	D = 9	
38	$2x^2+12x+15$	x^2+3x+2	$x^2+9x+13$		
39	$2x^2+12x+12$	x^2+3x+2	$x^2+9x+10$		
40	$2x^2+9x+15$	x^2+2x	$x^2+7x+15$		

41	$2x^2+9x+5$	x^2+2x	x^2+7x+5		
42	$2x^2+9x+3$	x^2+2x	x^2+7x+3		
43	$2x^2+14x+26$	x^2+x	$x^2+13x+26$		
44	$2x^2+14x+23$	x^2+x	$x^2+13x+23$		
45	$2x^2+14x+22$	x^2+x	$x^2+13x+22$	D = 81	

Vi ser på de polynomier, hvis diskriminant er et kvadrattal, og hvis rod *x* er et naturligt tal. De tre løsninger er $x = 1, 2, 6$, som giver

$$x = 1 \;:\; 1\cdot 2 + 3\cdot 6 = 4\cdot 5$$
$$x = 2 \;:\; 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 4\cdot 7$$
$$x = 6 \;:\; 6\cdot 9 + 7\cdot 8 = 10\cdot 11\,.$$

Generalisation

Kan man udfylde regneskemaer af typen

$$\square\cdot\square\cdot\square+\square\cdot\square=\square\cdot\square$$
$$\square\cdot\square\cdot\square+\square\cdot\square=\square\cdot\square\cdot\square$$

med 7 eller 8 konsekutive naturlige tal? Eller andre talskemaer af denne familie?
Redaktøren hører gerne nærmere herom.