Svar på opgave 346
(Januar 2018)

Opgave:

Betragt talfølgen

$$71 \ , \ 701 \ , \ 7001 \ , \ 70001 \ , \ \ldots$$

Vis, at

a. Ingen af tallene er delelige med 13.
b. Uendelig mange blandt tallene er delelige med 17.

Besvarelse:

a. Vi sætter

$$n_0 = 71 \ , \ n_1 = 701 \ , \ n_2 = 7001 \ , \ \ldots$$

Så er

$$n_4 = 700\,001 = 10 \cdot 70001 - 9 = 10n_3 - 9$$

og i almindelighed er

$$n_k = 10n_{k-1} - 9 \ .$$

Vi får

$$n_3 = 10n_2 - 9 = 10 \cdot (13 \cdot 538 + 7) - 9 = 10 \cdot 13p + 61 \equiv 9 \pmod{13}$$
$$n_4 = 10n_3 - 9 \equiv 90 - 9 = 81 \equiv 3 \pmod{13}$$
$$n_5 = 10n_4 - 9 \equiv 30 - 9 = 21 \equiv 8 \pmod{13}$$
$$n_6 = 10n_5 - 9 \equiv 80 - 9 = 71 \equiv 6 \pmod{13}$$
$$n_7 = 10n_6 - 9 \equiv 60 - 9 = 51 \equiv 12 \pmod{13}$$
$$n_8 = 10n_7 - 9 \equiv 120 - 9 = 111 \equiv 7 \pmod{13}$$
$$n_9 = 10n_8 - 9 \equiv 70 - 9 = 61 \equiv 9 \pmod{13} \ .$$

Derefter gentages resterne med en periodelængde på 6. Altså er ingen af tallene n_k delelige med 13.

b. Efter Fermats sætning er $10^{16} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$. Idet

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

får vi for $x = 10^{16}$, at

$$10^{16n} - 1 = (10^{16} - 1)(1 + 10^{16} + 10^{32} + \cdots + 10^{16n-16})$$

er delelig med 17.

Vi ser, at

$$n_1 = 701 = 1700 - 1000 + 1 = 17 \cdot 10^2 - 10^3 + 1$$

$$n_2 = 7001 = 17000 - 10000 + 1 = 17 \cdot 10^3 - 10^4 + 1 \ ,$$

og i almindelighed er

$$n_k = 17 \cdot 10^{k+1} - (10^{k+2} - 1) \ . \qquad (1)$$

Hvis vi i (1) vælger $k + 2 = 16n$ eller $k = 16n + 2$, er begge led delelige med 17 og dermed er n_k delelig med 17 for uendelig mange værdier af k.