# Svar på opgave 347 (Februar 2018)

## *Opgave:*

Lad $a$, $b$ og $c$ være reelle tal, så $ab + bc + ca = 1$.

Vis, at $\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2}+\frac{(b+c)^2+1}{a^2+2}+\frac{(c+a)^2+1}{b^2+2} \geq 3$ .

## *Besvarelse:*

***1. metode***

Vi har, at

$$c^2 + 2 = c^2 + ab + bc + ca + 1 = (c + a)(c + b) + 1.$$

Uligheden kan derfor skrives sådan:

$$\frac{(a+b)^2+1}{(c+a)(c+b)+1}+\frac{(b+c)^2+1}{(a+b)(a+c)+1}+\frac{(c+a)^2+1}{(b+a)(b+c)+1} \geq 3 .$$

Vi sætter

$$x = a + b \ , \ y = b + c \ , \ z = a + c \ ,$$

så uligheden nu er

$$\frac{x^2+1}{yz+1}+\frac{y^2+1}{xz+1}+\frac{z^2+1}{xy+1} \geq 3 . \tag{1}$$

Nu er

$$0 < 2yz \leq y^2 + z^2 \quad , \quad 0 < 2xz \leq x^2 + z^2 \quad , \quad 0 < 2xy \leq x^2 + y^2 \ ,$$

og vi får

$$\frac{x^2+1}{yz+1}+\frac{y^2+1}{xz+1}+\frac{z^2+1}{xy+1} \geq \frac{x^2+1}{\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2+1}+\frac{y^2+1}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}z^2+1}+\frac{z^2+1}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+1}{yz+1}+\frac{y^2+1}{xz+1}+\frac{z^2+1}{xy+1} \geq 2\cdot\frac{x^2+1}{y^2+1+z^2+1}+2\cdot\frac{y^2+1}{x^2+1+z^2+1}+2\cdot\frac{z^2+1}{x^2+1+y^2+1}$$

Vi sætter

$$p = x^2 + 1 \ , \ q = y^2 + 1 \ , \ r = z^2 + 1 \ ,$$

og får, at højre side kan skrives således:

$$2\cdot\frac{p}{q+r}+2\cdot\frac{q}{p+r}+2\cdot\frac{r}{p+q} .$$

Den kendte *Nesbitts ulighed* for positive tal $p$, $q$ og $r$ er

$$\frac{p}{q+r}+\frac{q}{p+r}+\frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2} .$$

Altså er

$$2\cdot\frac{p}{q+r}+2\cdot\frac{q}{p+r}+2\cdot\frac{r}{p+q}\geq 3\ ,$$

og dermed er den ønskede ulighed vist.

***2. metode***

Vi benytter betegnelserne fra 1. metode og skal bevise uligheden (1). Hvis $yz + 1 \geq 0$, er

$$yx+1\leq\sqrt{(y^2+1)(z^2+1)}\quad\Leftrightarrow\quad y^2z^2+1+2yz\leq y^2z^2+y^2+z^2+1$$

$$\Leftrightarrow\quad 2yz\leq y^2+z^2\quad\Leftrightarrow\quad (y-z)^2\geq 0\ ,$$

hvilket er sandt. Hvis $yz + 1 < 0$ er uligheden også sand. Vi får så

$$\frac{x^2+1}{yz+1}+\frac{y^2+1}{xz+1}+\frac{z^2+1}{xy+1}\geq\frac{x^2+1}{\sqrt{(y^2+1)(z^2+1)}}+\frac{y^2+1}{\sqrt{(x^2+1)(z^2+1)}}+\frac{z^2+1}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{x^2+1}{yz+1}+\frac{y^2+1}{xz+1}+\frac{z^2+1}{xy+1}\geq\frac{p}{\sqrt{qr}}+\frac{q}{\sqrt{pr}}+\frac{r}{\sqrt{pq}}\ .$$

Uligheden mellem algebraisk og geometrisk middeltal giver, at

$$\frac{1}{3}\left(\frac{p}{\sqrt{qr}}+\frac{q}{\sqrt{pr}}+\frac{r}{\sqrt{pq}}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{p}{\sqrt{qr}}\cdot\frac{q}{\sqrt{pr}}\cdot\frac{r}{\sqrt{pq}}}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{p}{\sqrt{qr}}+\frac{q}{\sqrt{pr}}+\frac{r}{\sqrt{pq}}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{pqr}{pqr}}=3\ ,$$

og dermed er

$$\frac{x^2+1}{yz+1}+\frac{y^2+1}{xz+1}+\frac{z^2+1}{xy+1}\geq 3\ .$$

***3. metode* (Walther Janous, Innsbruck)**

Vi minder om Cauchy-Schwarz ulighed for positive tal:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ .$$

Vi vælger at sætte

$$a_1=\frac{u}{\sqrt{p}}\ ,\ a_2=\frac{v}{\sqrt{q}}\ ,\ a_3=\frac{w}{\sqrt{r}}\ ,\ b_1=\sqrt{p}\ ,\ b_2=\sqrt{q}\ ,\ b_3=\sqrt{r}\ ,$$

så vi får

$$(u+v+w)^2\leq\left(\frac{u^2}{p}+\frac{v^2}{q}+\frac{w^2}{r}\right)\cdot(p+q+r)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{(u+v+w)^2}{p+q+r}\leq\frac{u^2}{p}+\frac{v^2}{q}+\frac{w^2}{r}\ .$$

Hvis vi sætter

$$u=a+b\ ,\ v=b+c\ ,\ w=c+a\ ,\ p=c^2+2\ ,\ q=a^2+2\ ,\ r=b^2+2\ ,$$

får vi vurderingen

$$\frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{a^2+b^2+c^2+6} \le \frac{(a+b)^2}{c^2+2}+\frac{(b+c)^2}{a^2+2}+\frac{(c+a)^2}{b^2+2} .$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} \le \frac{(a+b)^2}{c^2+2}+\frac{(b+c)^2}{a^2+2}+\frac{(c+a)^2}{b^2+2} .$$

Da $ab + bc + ca = 1$ er

$$\frac{4(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} = \frac{4a^2+8ab+8bc+8ca+4b^2+4c^2}{a^2+b^2+c^2+6}$$

$$= \frac{4(a^2+b^2+c^2)+8}{a^2+b^2+c^2+6} = 4 - \frac{16}{a^2+b^2+c^2+6} .$$

Dermed er

$$4 - \frac{16}{a^2+b^2+c^2+6} \le \frac{(a+b)^2}{c^2+2}+\frac{(b+c)^2}{a^2+2}+\frac{(c+a)^2}{b^2+2} . \tag{2}$$

Vi minder om uligheden mellem harmonisk middeltral $H$ og algebraisk middeltal $A$ for tre positive tal:

$$H \le A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \frac{x+y+z}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{x+y+z} \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} ,$$

hvoraf

$$\frac{9}{a^2+b^2+c^2+6} \le \frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2} . \tag{3}$$

Addition af ulighederne (2) og (3) giver

$$4 - \frac{7}{a^2+b^2+c^2+6} \le \frac{(a+b)^2+1}{c^2+2}+\frac{(b+c)^2+1}{a^2+2}+\frac{(c+a)^2+1}{b^2+2} . \tag{4}$$

Vi benytter den kendte ulighed for positive tal:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca , \tag{5}$$

så

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 1 .$$

Af (4) følger så

$$3 = 4 - \frac{7}{1+6} \le 4 - \frac{7}{a^2+b^2+c^2+6} \le \frac{(a+b)^2+1}{c^2+2}+\frac{(b+c)^2+1}{a^2+2}+\frac{(c+a)^2+1}{b^2+2} ,$$

hvilket skulle bevises.

For god ordens skyld viser vi uligheden (5):

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0 ,$$

hvilket er sandt.

### *4. metode* (Palle Bak Petersen, Hillerød)

Cauchys ulighed for ikke-negative tal er

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) .$$

Vi sætter

$$x_1 = \sqrt{\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2}} \quad , \quad x_2 = \sqrt{\frac{(b+c)^2+1}{a^2+2}} \quad , \quad x_3 = \sqrt{\frac{(c+a)^2+1}{b^2+2}} \quad ,$$

$$y_1 = \sqrt{c^2+2} \quad , \quad y_2 = \sqrt{a^2+2} \quad , \quad y_3 = \sqrt{b^2+2} \quad .$$

Så er

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{(a+b)^2+1}+\sqrt{(b+c)^2+1}+\sqrt{(c+a)^2+1}\right)^2\\ &\le \left(\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2}+\frac{(b+c)^2+1}{a^2+2}+\frac{(c+a)^2+1}{b^2+2}\right)\cdot\left(c^2+2+a^2+2+b^2+2\right) \qquad (6)\end{aligned}$$

For nemheds skyld sætter vi

$$U = \frac{(a+b)^2+1}{c^2+2}+\frac{(b+c)^2+1}{a^2+2}+\frac{(c+a)^2+1}{b^2+2} \quad ,$$

$$K = \sqrt{(a+b)^2+1}\cdot\sqrt{(b+c)^2+1}+\sqrt{(a+b)^2+1}\cdot\sqrt{(c+a)^2+1}+\sqrt{(b+c)^2+1}\cdot\sqrt{(c+a)^2+1}$$

Af (6) får vi

$$\begin{aligned}&(a+b)^2+1+(b+c)^2+1+(c+a)^2+1+2K \le U\cdot(a^2+b^2+c^2+6)\\ &\Leftrightarrow \quad U \ge \frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2+3+2K}{a^2+b^2+c^2+6}\\ &\Leftrightarrow \quad U \ge \frac{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)+3+2K}{a^2+b^2+c^2+6}\\ &\Leftrightarrow \quad U \ge \frac{2(a^2+b^2+c^2)+5+2K}{a^2+b^2+c^2+6} \quad . \qquad (7)\end{aligned}$$

Vi ser på leddene i $K$, og når vi bruger, at

$$ab + bc + ca = 1 \quad \text{og} \quad 2ab + 2bc = 2 - 2ca$$

får vi

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a+b)^2+1}\cdot\sqrt{(b+c)^2+1} = \sqrt{1+(a+b)^2+(b+c)^2+(ab+ac+bc+b^2)^2}\\ &= \sqrt{1+a^2+2b^2+c^2+2ab+2bc+(1+b^2)^2}\\ &= \sqrt{1+a^2+2b^2+c^2+2-2ac+1+2b^2+b^4}\\ &= \sqrt{2+a^2+4b^2+c^2+2-2ac+b^4} = \sqrt{(2+b^2)^2+(a-c)^2} \ge 2+b^2 \quad .\end{aligned}$$

Analogt fås for de øvrige led i $K$:

$$\sqrt{(a+b)^2+1}\cdot\sqrt{(c+a)^2+1} \ge 2+a^2 \quad \text{og} \quad \sqrt{(b+c)^2+1}\cdot\sqrt{(c+a)^2+1} \ge 2+c^2 \quad .$$

Så får vi af (7):

$$\begin{aligned}&U \ge \frac{2(a^2+b^2+c^2)+5+2(2+b^2+2+a^2+2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+6}\\ &\Leftrightarrow \quad U \ge \frac{4(a^2+b^2+c^2)+17}{a^2+b^2+c^2+6} \quad .\end{aligned}$$

Nu er

$$\frac{4(a^2+b^2+c^2)+17}{a^2+b^2+c^2+6} \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4(a^2+b^2+c^2)+17 \geq 3(a^2+b^2+c^2)+18$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq 1\,.$$

Dette er sandt, fordi

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc=1\,.$$

**Besvarelser modtaget fra:**

Jens Søren Andersen, Walther Janous, Palle Bak Petersen, Con Amore Problemgruppe.