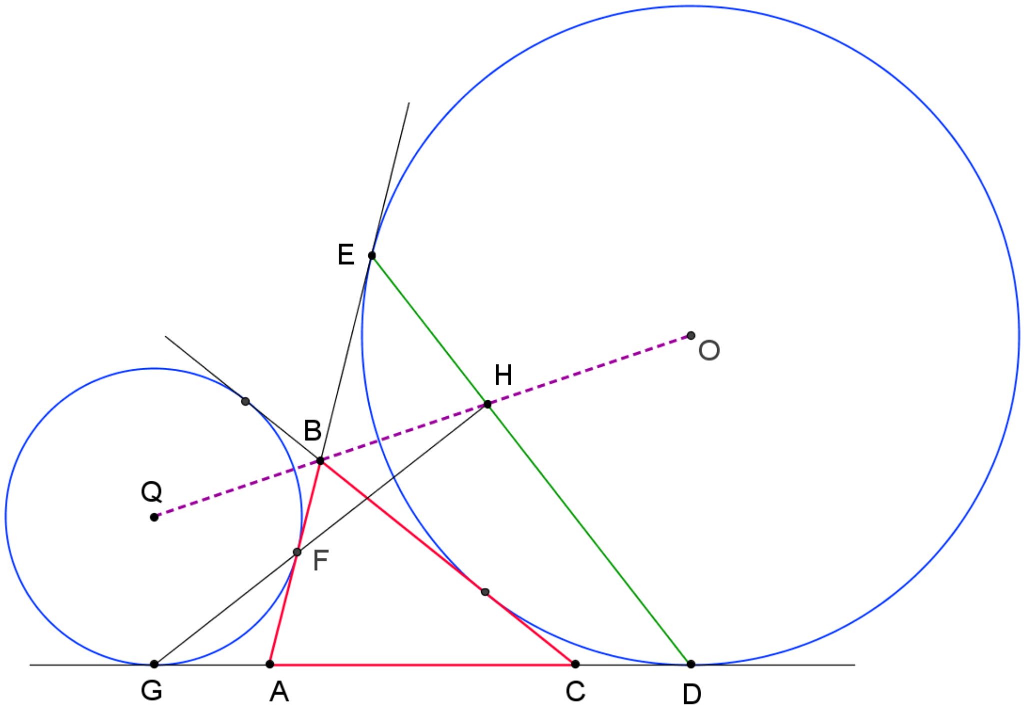
Svar på opgave 348 (Marts 2018)

Opgave:

I ΔABC tangerer den ydre røringscirkel over for C med centrum Q siderne AB og AC i F og G, og den ydre røringscirkel over for A med centrum O tangerer siderne AB og AC i E og D. Desuden skærer GF og DE hinanden i H.
Vis, at $GH \perp DE$ og at Q, B, H og O ligger på linje.



Besvarelse:

1. metode

I. Da $AG = AF$, er ΔAGF ligebenet, og da $\angle FAG = 180° - A$, er

$$\angle GFA = \angle FGA = \tfrac{1}{2} A \ .$$

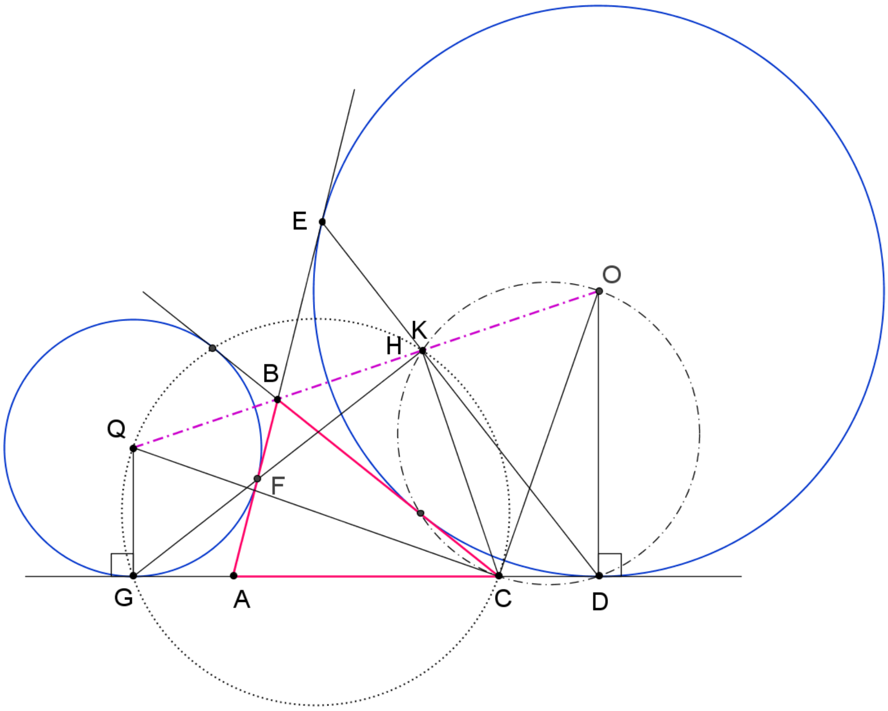
Da $AD = AE$, er ΔAED ligebenet, og da $\angle EAD = A$, er

$$\angle ADE = \angle AED = 90° - \tfrac{1}{2} A \ .$$

I ΔGHD har vi så, at

$$\angle HGD = \angle FGA = \tfrac{1}{2} A \quad \text{og} \quad \angle HDG = \angle ADE = 90° - \tfrac{1}{2} A \ .$$

Derfor er $\angle HGD + \angle HDG = 90°$, så $\angle GHD = 90°$.



II. Det er klart, at Q, B og O ligger på linje, fordi både BQ og BO er vinkelhalverings- linjer for to nabovinkler til B, der desuden er topvinkler.

Lad nu GF skære linjen QBO i K. I ΔBFK får vi

$$\angle BKF + \angle BFK = 180° - \angle FBK = \angle EBK \ ,$$

hvoraf

$$\angle BKF = \angle EBK - \angle BFK \ . \tag{1}$$

Da BO er halveringslinje for $\angle CBE$, er

$$\angle EBK = 90° - \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}C \ .$$

Desuden er (se oven for under I)

$$\angle BFK = \angle GFA = \tfrac{1}{2}A \ .$$

Af (1) får vi så

$$\angle QKG = \angle BKF = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}C = \angle QCA = \angle QCG \ . \tag{2}$$

Da vinklerne QKG og QCG begge spænder over linjestykket QG, er $\square QKCG$ indskrivelig, og da $\angle QGC$ er ret, er også $\angle QKC$ ret.

Nu har vi, at

$$90° = \angle QKC = \angle CKO = \angle ODC \ , \tag{3}$$

hvilket medfører, at $\square CKOD$ er indskrivelig. Dette giver, at

$$\angle COD = \angle CKD \ , \tag{4}$$

da de er periferivinkler over samme bue i firkantens omskrevne cirkel.

Da CO er halveringslinje for nabovinklen til C, er

$$\angle DCO = 90° - \tfrac{1}{2}C \ ,$$

og i den retvinklede ΔCOD fås så, at

$$\angle COD = \tfrac{1}{2}C \ . \qquad (5)$$

Efter (2) får vi

$$\angle QKG = \angle BKF = \angle BKG = \tfrac{1}{2}C \ .$$

Videre får vi efter (4), (5) og (3):

$$\angle GKD = \angle QKD - \angle QKG = \angle QKD - \tfrac{1}{2}C$$

$$= \angle QKD - \angle COD = \angle QKD - \angle CKD = \angle QKC = 90°.$$

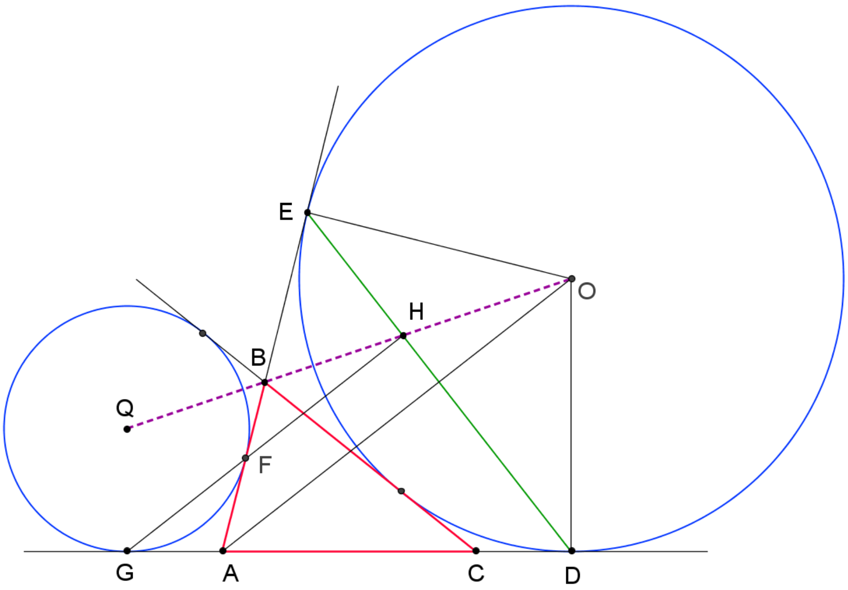
Dermed er $GK \perp KD$. Derfor falder K og H sammen, og Q, B, H og O ligger på linje.

2. metode (Walther Janous, Innsbruck)

Da ΔFGA er ligebenet med $\angle FAG$ = 180° - A, er

$$\angle FGA = \angle GFA = \tfrac{1}{2}A \, .$$

Desuden er $\angle OAC = \tfrac{1}{2}A$ og dermed er $FH \parallel AO$, så $FH \perp ED$, idet $\square ADOE$ er en dragefirkant.



Vi har, at

$$\tfrac{1}{2}A = \angle OAD = \angle GFA = \angle EFH \ ,$$

så ΔADO og ΔFEH er ensvinklede, og vi får

$$EH = EF \cdot \sin \tfrac{1}{2}A \ . \qquad (6)$$

Nu gælder for længderne af de stykker på trekantsiderne, der dannes af de ydre røringscirklers røringspunkter, at

$$EF = FB + BE = (s - a) + (s - c) = 2s - (a + c) = b \ ,$$

så vi efter (6) får

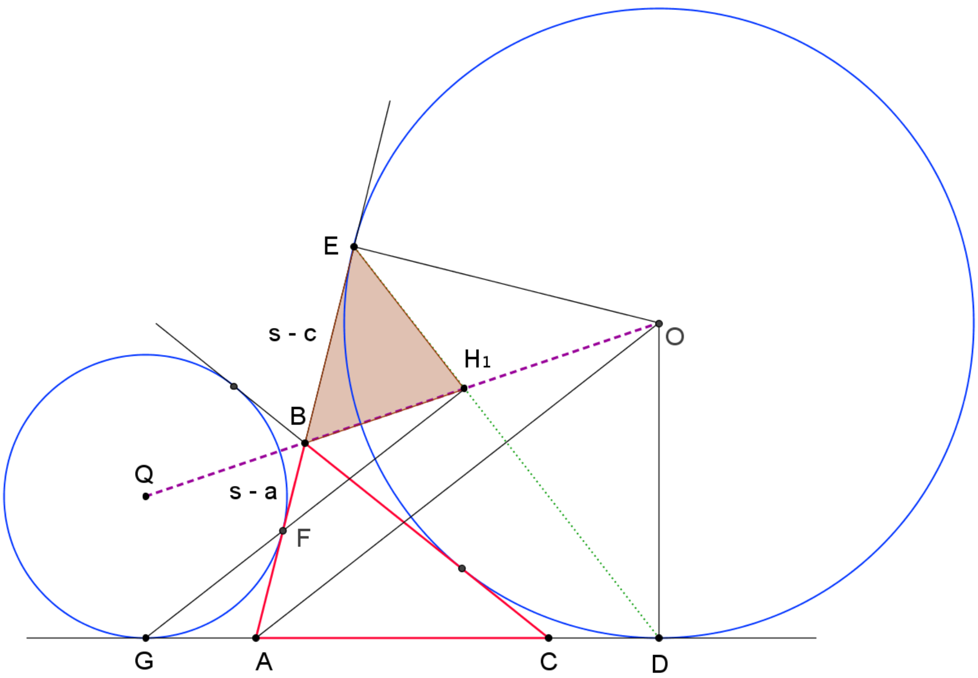
$$EH = b \cdot \sin \tfrac{1}{2} A \ .$$

Lad H_1 være skæringspunkt mellem OQ og ED. Så er ΔAED ligebenet, så

$$\angle AED = 90° - \tfrac{1}{2} A \quad \text{og} \quad \angle H_1 BE = 90° - \tfrac{1}{2} B \ ,$$

og da BH_1 er vinkelhalveringslinje for $\angle EBC$, er

$$\angle H_1 BE = 90° - \tfrac{1}{2} B \ .$$



I ΔEBH_1 er dermed

$$\angle EH_1 B = 180° - (90° - \tfrac{1}{2} A) - (90° - \tfrac{1}{2} B) = \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B = 90° - \tfrac{1}{2} C \ .$$

I ΔEBH_1 giver sinusrelationen

$$\frac{EH_1}{\sin \angle H_1 BE} = \frac{BE}{\sin \angle EH_1 B} \quad \Leftrightarrow \quad EH_1 = BE \cdot \frac{\sin(90° - \frac{1}{2} B)}{\sin(90° - \frac{1}{2} C)} \quad \Leftrightarrow \quad EH_1 = (s - c) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C} \ .$$

Punkterne H og H_1 falder sammen netop hvis $EH = EH_1$, dvs. hvis

$$b \cdot \sin \tfrac{1}{2} A = (s - c) \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C} \ . \tag{7}$$

I enhver 'ordentlig' formelsamling af ældre dato finder man de kendte (!) formler:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \ , \quad \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \quad , \quad \cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

Ligningen (7) får derfor udseendet

$$b \cdot \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = (s-c) \cdot \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{s(s-c)}} \ .$$

Kvadrering giver

$$b^2 \cdot \frac{(s-b)(s-c)}{bc} = (s-c)^2 \cdot \frac{s(s-b)}{ac} \cdot \frac{ab}{s(s-c)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{c} \cdot (s-b)(s-c) = \frac{s(s-c)(s-b) \cdot b}{c \cdot s} \ ,$$

hvilket åbenbart er sandt.

Besvarelser modtaget fra:

Jens Søren Andersen, Walther Janous, Hans Mortensen, Palle Bak Petersen.