Svar på opgave 349 (April 2018)

Opgave:

Lad a og b være positive reelle tal, så $ab \geq 1$.
Vis, at

$$\left(a+2017b+\frac{2017}{a+2016}\right)\cdot\left(b+2017a+\frac{2017}{b+2016}\right)\geq 2019^2 .$$

Besvarelse:

1. metode

Lidt snedigt skriver vi

$$a=\frac{a+2016}{2017}+\frac{2016a-2016}{2017} ,$$

så den første parentes kan vurderes sådan:

$$\begin{aligned}&\frac{a+2016}{2017}+\frac{2017}{a+2016}+\frac{2016a-2016}{2017}+2017b\\&=\frac{a+2016}{2017}+\frac{2017}{a+2016}+\frac{2016a-2016+2017^2b}{2017}\\&\geq 2+\frac{2016a-2016+2017^2b}{2017}=\frac{2\cdot 2017+2016a-2016+2017^2b}{2017}\\&=\tfrac{1}{2017}\left(2018+2016a+2017^2b\right) .\end{aligned}$$

Vi har her benyttet, at der for positive tal x gælder, at $x+\frac{1}{x}\geq 2$
På samme måde får vi for den anden parentes vurderingen

$$b+2017a+\frac{2017}{b+2016}\geq\frac{1}{2017}\left(2018+2016b+2017^2a\right) .$$

Hvis vi med V betegner venstre side i den givne ulighed, får vi

$$\begin{aligned}V&\geq\frac{1}{2017^2}\left(2018+2016a+2017^2b\right)\left(2018+2016b+2017^2a\right)\\&=\frac{1}{2017^2}(2018^2+2018(2016+2017^2)(a+b)+(2016^2+2017^4)\,ab\\&\qquad+2016\cdot 2017^2(a^2+b^2)) .\end{aligned}$$

Nu benytter vi, at

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}\geq 2 \quad\text{og}\quad a^2+b^2\geq 2ab\geq 2 ,$$

så vi får

$$V \geq \frac{1}{2017^2}(2018^2 + 2\cdot 2018(2016 + 2017^2) + 2016^2 + 2017^4 + 2\cdot 2016\cdot 2017^2)$$

$$= \frac{1}{2017^2}\cdot 2017^2 \cdot 2019^2 = 2019^2 \ .$$

***2. metode* (Con Amore Problemgruppe)**

Vi sætter for nemheds skyld $n = 2016$, $a + b = x$ og $ab = y$. Den velkendte identitet

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

og det givne medfører, at

$$x^2 \geq 4y \geq 4 \ .$$

Vi viser, at påstanden gælder for ethvert naturligt tal n, altså at der gælder

$$\left((a+b)+nb+\frac{n+1}{n+a}\right)\cdot\left((a+b)+na+\frac{n+1}{n+b}\right) \geq (n+3)^2 \ . \tag{1}$$

Venstresiden af (1) giver ved besværlige udregninger:

$$\text{VS} = x^2 + x^2n + yn^2 + \frac{xn+x}{n+b} + \frac{xn+x}{n+a} + \frac{bn^2+bn}{n+b} + \frac{an^2+an}{n+a} + \frac{n^2+2n+1}{n^2+xn+y}$$

$$= x^2 + x^2n + yn^2 + \frac{\left(2xn^2+x^2n+2xn+x^2\right)+\left(xn^3+2yn^2+xn^2+2yn\right)+\left(n^2+2n+1\right)}{n^2+nx+y} \ . \tag{2}$$

Vi skal godtgøre, at udtrykket i (2) er større end eller lig med $n^2 + 6n + 9$. Vi ganger med $n^2 + nx + y$ og skal så vise, at

$$(x^2 + x^2n + yn^2)(n^2 + nx + y) + 2xn^2 + xyn + x^2n + x^2 + xn^3 + 2yn^2 + xn^2 + 2yn + n^2 + 2n + 1$$

$$\geq (n^2 + 6n + 9)(n^2 + nx + y) \ .$$

Vi ganger ud og ordner efter potenser af n. For venstre- og højre side finder vi

$$yn^4 + (x^2 + xy + x)n^3 + (x^3 + x^2 + y^2 + 3x + 2y + 1)n^2$$

$$+ (x^3 + x^2y + x^2 + 2x + 2y + 2)n + (x^2y + x^2 + 1) \tag{3}$$

og

$$n^4 + (x + 6)n^3 + (6x + y + 9)n^2 + (9x + 6y)n + 9y \ . \tag{4}$$

En sammenligning af (3) og (4) leder os til at udnytte, at summen af koefficienterne i (3) er mindst

$$y + 4x + (4x + 4y + y + 3x + 2y + 1) + (4x + 4y + 4y + 2x + 2y + 2) + (2x + 4y + 1)$$

$$= 19x + 22y + 4 \ , \tag{5}$$

og i (4) er summen

$$1 + (x + 6) + (6x + y + 9) + (9x + 6y) + 9y = 16x + 16y + 16 \ . \tag{6}$$

Af (5) og (6) fremgår straks, at påstanden gælder for $n = 1$. Og da

$$n^4 \geq n^3 \geq n^2 \geq n \geq 1 \ ,$$

viser den måde, (5) er dannet på, at det for ethvert naturligt tal n gælder, at summen (3) er større end eller lig med summen (4) - og desuden, at lighedstegnet for ethvert natur- ligt tal n gælder, hvis og kun hvis $x = 2$ og $y = 1$.

Hermed er (1) og dermed den givne ulighed bevist. Desuden er godtgjort, at der gæl- der lighedstegn i (1) for ethvert naturligt tal n hvis og kun hvis $a + b = 2$ og $ab = 1$, dvs. hvis og kun hvis $a = b = 1$.

Bemærkning

Walther Janous, Innsbruck, bemærker, at der for alle positive reelle tal a og b hvor $ab \geq 1$ og for $k \geq \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right) \approx 2{,}618$ gælder

$$\left(a+kb+\frac{k}{a+k-1}\right)\cdot\left(b+ka+\frac{k}{b+k-1}\right) \geq (k+2)^2 .$$

Besvarelser modtaget fra

Jens-Søren Andersen, Walther Janous, Hans Mortensen, Con Amore Problemgruppe.