Svar på opgave 351 (August 2018)

Opgave:

To rektangler R og S med hele sidelængder kaldes *venskabelige*, hvis omkredsen af R er lig med arealet af S og omkredsen af S er lig med arealet af R.
Således er rektanglerne 4×6 og 2×10 et par af venskabelige rektangler.

Bestem alle par af venskabelige rektangler.

Besvarelse:

1.metode

Vi antager, at rektanglerne $a \times b$ og $c \times d$ er venskabelige. Har kan vi gå ud fra, at $a \leq b$, $c \leq d$ og $a \leq c$. Så er

$$2(a+b) = cd \quad \text{og} \quad 2(c+d) = ab\ .$$

Den sidste ligning giver

$$d = \tfrac{1}{2}ab - c\ . \tag{1}$$

Dette indsættes i den første ligning:

$$2a + 2b = c \cdot (\tfrac{1}{2}ab - c) \quad \Leftrightarrow \quad c^2 - \tfrac{1}{2}ab \cdot c + 2a + 2b = 0\ . \tag{2}$$

Heraf kan vi isolere b:

$$2b - \tfrac{1}{2}abc = -c^2 - 2a \;\Leftrightarrow\; b(2 - \tfrac{1}{2}ac) = -c^2 - 2a \;\Leftrightarrow\; b = \frac{2c^2 + 4a}{ac - 4}\ .$$

Af (1) finder vi

$$d = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2c^2 + 4a}{ac - 4} - c = \frac{2a^2 + 4c}{ac - 4}\ .$$

Vi ønsker at finde nogle begrænsninger for variationen af de variable. Ligningen (2) omformes til

$$\left(c - \tfrac{1}{4}ab\right)^2 - \tfrac{1}{16}a^2b^2 + 2a + 2b = 0 \;\Leftrightarrow\; (ab - 4c)^2 = a^2b^2 - 32(a+b). \tag{3}$$

Af (1) følger, at

$$2d = ab - 2c \quad \Leftrightarrow \quad ab - 4c = 2d - 2c \geq 0\ . \tag{4}$$

Da $c \geq 1$ gælder efter (4), at

$$0 \leq ab - 4c \leq ab - 4\ . \tag{5}$$

Dermed får vi af (3) og (5):

$$(ab - 4)^2 \geq (ab - 4c)^2 = a^2b^2 - 32(a+b)\ .$$

Denne ulighed omskrives til

$$a^2b^2 + 16 - 8ab \geq a^2b^2 - 32a - 32b \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 4b + 2 - ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a + 2 \geq b(a - 4) \ . \tag{6}$$

Da $a \leq b$ følger af (6), at

$$4a + 2 \geq b(a - 4) \geq a(a - 4)$$

hvoraf

$$4a + 2 \geq a^2 - 4a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 8a - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 4)^2 \leq 18 \ .$$

Altså er $a \leq 8$. Af symmetrigrunde er også $c \leq 8$, idet a og c er de korte sider i de to rektangler. Vi har derfor fundet, at

$$1 \leq a \leq c \leq 8 \ .$$

Nu er der tilbage at gennemgå de mulige tilfælde.

***a* = 1.** Af ligningerne ovenfor fås

$$b = \frac{2c^2 + 4}{c - 4} \ , \ d = \frac{2 + 4c}{c - 4} \ .$$

Dette giver tabellen

c	5	6	7	8
b	54	38	34	33
d	22	13	10	$\frac{17}{2}$

Dermed har vi fundet de venskabelige rektangler

$$1 \times 54 \text{ og } 5 \times 22 \quad , \quad 1 \times 38 \text{ og } 6 \times 13 \quad , \quad 1 \times 34 \text{ og } 7 \times 10 \ .$$

***a* = 2.** Nu er

$$b = \frac{2c^2 + 8}{2c - 4} \ , \ d = \frac{8 + 4c}{2c - 4} \ .$$

Vi får tabellen

c	3	4	5	6	7	8
b	13	10	$\frac{29}{3}$	10	$\frac{53}{5}$	$\frac{34}{3}$
d	10	6		4		

Dette giver de venskabelige rektangler

$$2 \times 13 \text{ og } 3 \times 10 \quad , \quad 2 \times 10 \text{ og } 4 \times 6 \ .$$

***a* = 3.** Her er

$$b = \frac{2c^2 + 12}{3c - 4} \ , \ d = \frac{18 + 4c}{3c - 4} \ .$$

og vi får tabellen

c	3	4	5	6	7	8

b	6	$\frac{11}{2}$	$\frac{62}{11}$	6	$\frac{110}{17}$	7
d	6			3		$\frac{5}{2}$

Venskabelige rektangler er

$$3 \times 6 \quad \text{og} \quad 3 \times 6 \ .$$

***a* = 4.** Her er

$$b = \frac{2c^2 + 16}{4c - 4} \ , \ d = \frac{32 + 4c}{4c - 4} \ .$$

Kun c = 4 giver hele værdier for b og d, nemlig b = d = 4, så venskabelige rektangler er

$$4 \times 4 \quad \text{og} \quad 4 \times 4 \ .$$

***a* = 5.** Her er

$$b = \frac{2c^2 + 20}{5c - 4} \ , \ d = \frac{50 + 4c}{5c - 4} \ .$$

For $c \geq 5$ fås ingen hele løsninger.

***a* = 6.** Vi får, at

$$b = \frac{2c^2 + 24}{6c - 4} \ , \ d = \frac{72 + 4c}{6c - 4} \ .$$

For $c \geq 6$ får vi løsningen b = d = 3, så venskabelige rektangler er

$$6 \times 3 \quad \text{og} \quad 6 \times 3 \ .$$

***a* = 7 og *a* = 8.** Ingen hele værdier for b og d.

I alt har vi fundet 7 sæt af venskabelige rektangler, som vi sammenfatter i tabellen herunder.

Rektangler	1×34 , 7×10		1×38 , 6×13		1×54 , 5×22		2×10 , 4×6	
Omkreds	70	34	78	38	110	54	24	20
Areal	34	70	38	78	54	110	20	24

Rektangler	2×13 , 3×10		3×6 , 3×6		4×4 , 4×4	
Omkreds	30	26	18	18	16	16
Areal	26	30	18	18	16	16

2.metode

Vi antager igen, at rektanglerne $a \times b$ og $c \times d$ er venskabelige og forudsætter, at $a \leq b$, $c \leq d$ og $a \leq c$.

Vi har, at

$$2(a + b) = cd \quad \text{og} \quad 2(c + d) = ab \ .$$

Addition giver

$$2a + 2b + 2c + 2d = ab + cd \quad \Leftrightarrow \quad (a - 2)(b - 2) + (c - 2)(d - 2) = 8 \ . \tag{7}$$

Vi deler op i tilfælde.

I. *a* ≥ 3. Så er på grund af forudsætningerne

$$8 = (a - 2)(b - 2) + (c - 2)(d - 2) \geq (a - 2)(a - 2) + (a - 2)(a - 2) = 2(a - 2)^2 \ .$$

Dermed er $a = 3$ eller $a = 4$.

***a* = 3.** Vi får

$$2(3 + b) = cd \quad \Leftrightarrow \quad b = \tfrac{1}{2}cd - 3 \ .$$

Så er

$$2(c + d) = 3b \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot\left(\tfrac{1}{2}cd - 3\right) - 2(c + d) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3cd - 4c - 4d - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9cd - 12c - 12d - 54 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3c - 4)(3d - 4) = 70 \ . \tag{8}$$

Nu er

$$70 = 1\cdot 70 = 2\cdot 35 = 5\cdot 14 = 7\cdot 10 \ .$$

Kun mulighederne $2\cdot 35$ og $5\cdot 14$ giver meningsfyldte værdier for c og d, nemlig

$$(c,d) \ : \ (2,13) \ , \ (3,6) \ .$$

Muligheden (2,13) forkastes, da vi har forudsat $a \leq c$.

Hvis $(c,d) = (3,6)$ får vi

$$b = \tfrac{1}{2}cd - 3 = \tfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 6 - 3 = 6 \ .$$

Dermed har vi fundet rektanglerne:

$$R \ : \ 3 \times 6 \quad , \quad S \ : \ 3 \times 6 \quad ,$$

og kontrol viser, at de er løsning til problemet.

***a* = 4.** Her er

$$2(4 + b) = cd \quad \Leftrightarrow \quad b = \tfrac{1}{2}cd - 4 \ .$$

Så er

$$2(c + d) = 4b \quad \Leftrightarrow \quad 2(c + d) = 4\cdot\left(\tfrac{1}{2}cd - 4\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad c + d = cd - 8 \quad \Leftrightarrow \quad (c - 1)(d - 1) = 9 \ .$$

Vi får, at $(c,d) = (2,10)$ eller $(c,d) = (4,4)$. På grund af forudsætningen $a \leq c$ er kun $(c,d) = (4,4)$ brugbar. Vi får, at

$$b = \tfrac{1}{2}cd - 4 = 4 \ .$$

Vi har dermed funder rektanglerne

$$R \ : \ 4 \times 4 \quad , \quad S \ : \ 4 \times 4 \ .$$

Kontrol viser, at de er løsning til problemet.

II. a = 2. Efter (7) er

$$(2 - 2)(b - 2) + (c - 2)(d - 2) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad (c - 2)(d - 2) = 8 \ .$$

Dette giver mulighederne $(c,d) = (3,10)$ eller $(c,d) = (4,6)$. Desuden er

$$2(a + b) = cd \quad \Leftrightarrow \quad b = \tfrac{1}{2}cd - a \ ,$$

så vi får

$$(c,d) = (3,10) \ : \ b = \tfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 10 - 2 = 13$$
$$(c,d) = (4,6) \ : \ b = \tfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6 - 2 = 10 \ .$$

Dermed har vi rektanglerne

$$(c,d) = (3,10) \ : \quad R : 2 \times 13 \quad , \quad S : 3 \times 10 \ ,$$
$$(c,d) = (4,6) \ : \quad R : 2 \times 10 \quad , \quad S : 4 \times 6 \ .$$

Kontrol viser, at disse er løsninger til problemet.

III. *a* = 1. Vi får, at

$$2(1 + b) = cd \quad \text{og} \quad 2(c + d) = b \ ,$$

hvoraf

$$b = \tfrac{1}{2}cd - 1 \quad \text{og} \quad b = 2c + 2d \ .$$

Altså har vi

$$\tfrac{1}{2}cd - 1 - 2c - 2d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad cd - 2 - 4c - 4d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c - 4)(d - 4) = 18 \ .$$

Dette giver mulighederne

$$(c,d) \ : \ (5,22) \ , \ (6,13) \ , \ (7,10) \ .$$

Disse giver

$$b = \tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 22 - 1 = 54 \quad , \quad b = \tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 13 - 1 = 38 \quad , \quad b = \tfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 10 - 1 = 34 \ .$$

Vi har dermed rektanglerne

$$(c,d) = (5,22) \ : \quad R : 1 \times 54 \quad , \quad S : 5 \times 22$$
$$(c,d) = (6,13) \ : \quad R : 1 \times 38 \quad , \quad S : 6 \times 13$$
$$(c,d) = (7,10) \ : \quad R : 1 \times 34 \quad , \quad S : 7 \times 10 \ .$$

Disse er løsninger til problemet.

3. metode. Vi antager igen, at rektanglerne $a \times b$ og $c \times d$ er venskabelige og antager, at $a = \min\{a,b,c,d\}$ og $c \le d$. Vi har, at

$$2(a + b) = cd \quad \text{og} \quad 2(c + d) = ab \ .$$

Vi får så, at

$$a + b + c + d = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}cd \ . \tag{9}$$

Vi deler op i tilfælde.

***a* > 4.** Efter forudsætningerne om størrelsesforholdene mellem *a*, *b*, *c* og *d* er

$$\tfrac{1}{2}ab > 2b \ge a + b \quad \text{og} \quad \tfrac{1}{2}cd \ge \tfrac{1}{2}ad > 2d \ge c + d \ .$$

Addition giver

$$\tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}cd > a + b + c + d$$

i strid med (9). Altså må $a \le 4$.

***a* = 4.** Vi har

$$\tfrac{1}{2}ab = 2b \ge a + b \quad \text{og} \quad \tfrac{1}{2}cd \ge \tfrac{1}{2}ad = 2d \ge c + d\ . \tag{10}$$

Heraf fås, at

$$a + b + c + d \le \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}cd\ ,$$

og da (9) gælder, kan alle ulighedstegn i (10) kan erstattes med lighedstegn, når $a = b = c = d$. Så er

$$a + b + c + d = \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}cd$$

kun opfyldt når $a = b = c = d = 4$. For disse værdier er desuden ligningerne

$$2(a + b) = cd \quad \text{og} \quad 2(c + d) = ab$$

opfyldte.

***a* = 3.** Vi får, at

$$2(c + d) = ab \quad \Leftrightarrow \quad b = \tfrac{2}{3}(c + d)\ ,$$

så at

$$2(a + b) = cd \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(3 + \tfrac{1}{3}(c + d)\right) = cd \quad \Leftrightarrow \quad 4c + 4d + 18 = 3cd \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{4c + 18}{3c - 4}\ .$$

Her er d en aftagende funktion af c for $c \ge \tfrac{4}{3}$, dvs. for $c \ge a$. Vi lader c gennemløbe voksende hele værdier indtil $d \le c$ (vi har jo i begyndelsen forudsat $c \le d$).

For $c = 3$ fås $d = 6$ og $b = 6$. For $c = 4$ fås $d = \tfrac{17}{4} < c$. Altså har vi fundet en løsning, nemlig $a = c = 3$ og $b = d = 6$.

***a* = 2.** Her får vi, at

$$2(c + d) = ab \quad \Leftrightarrow \quad b = c + d\ .$$

Dette giver

$$2(a + b) = cd \quad \Leftrightarrow \quad 2(2 + c + d) = cd \quad \Leftrightarrow \quad 2c + 2d + 4 = cd$$

$$\Leftrightarrow \quad d = \frac{2c + 4}{c - 2} = 2 + \frac{8}{c - 2}\ .$$

Her er d en aftagende funktion af c for $c > 2 = a$. Som før indsætter vi voksende hele værdier af c (hvor c - 2 går op i 8 og $c > 2$) indtil $d \le c$. Vi har mulighederne:

$$c = 3:\ d = 10 \text{ og } b = 13 \quad , \quad c = 4:\ d = 6 \text{ og } b = 10\ .$$

For $c = 6$ fås $d < 6 \le c$. Vi har fundet to løsninger.

***a* = 1.** Vi får

$$2(c + d) = ab \quad \Leftrightarrow \quad b = 2(c + d)\ ,$$

og dette giver

$$2(a + b) = cd \quad \Leftrightarrow \quad 2(1 + 2(c + d)) = cd \quad \Leftrightarrow \quad 4c + 4d + 2 = cd$$

$$\Leftrightarrow \quad d = \frac{4c + 2}{c - 4} = 4 + \frac{18}{c - 4}\ .$$

Vi ser, at d er en aftagende funktion af c. For $c < 4$ fås negative værdier for d og for $c = 4$ har ligningen $4c + 4d + 2 = cd$ ingen løsninger. Vi indsætter voksende værdier af c, hvor $c > 4$ og hvor $c - 4$ går op i 18, indtil $c \geq d$. Vi får mulighederne:

$c = 5$: $d = 22$ og $b = 54$, $c = 6$: $d = 13$ og $b = 38$, $c = 7$: $d = 10$ og $b = 34$.

For $c = 10$ fås $d = 7 < c$. Altså er der tre løsninger i dette tilfælde.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Walther Janous
- Asger Olsen
- Con Amore Problemgruppe