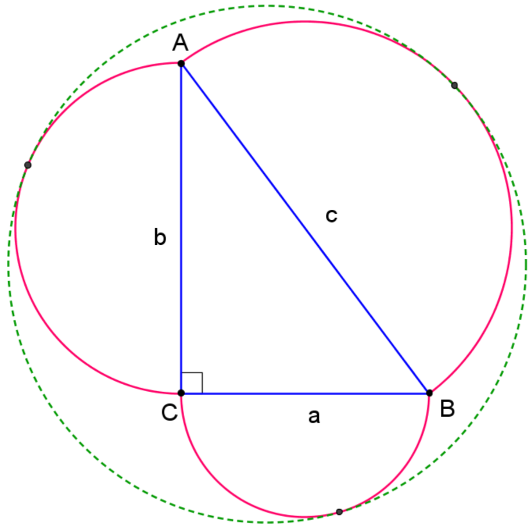
Svar på opgave 354 (November 2018)

Opgave:

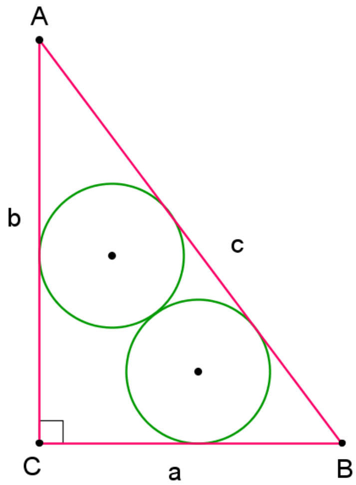
a.

I den retvinklede ΔABC er C ret og kateterne har længder a og b. Med de tre sider som diametre trækkes halvcirkler udad. En stor cirkel tangerer de tre halvcirkler som vist.
Bestem denne cirkels radius r udtrykt ved a, b og c.



b.

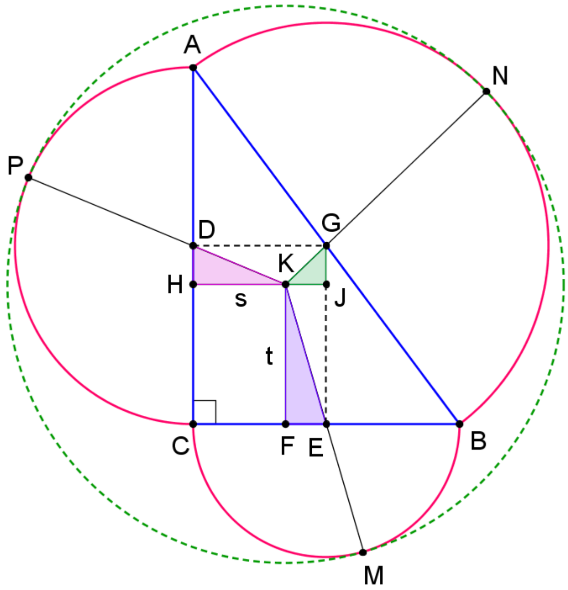
I den retvinklede ΔABC er C ret og kateterne har længder a og b.
Der indskrives to lige store cirkler med radius r i trekanten, således at de tangerer hinanden og hver for sig tangerer en katete og hypotenusen som vist.
Bestem cirklernes radius r udtrykt ved a, b og c.



Besvarelse:

(se næste side)

a. Forbindelseslinjerne mellem side-midtpunkterne D, E og G og cirklernes røringspunkter P, M og N går gennem centrum K for den store cirkel.



Lad H og F være projektionerne af K på AC og BC. Vi sætter $s = HK = CF$ og $t = KF = CH$. Så er

$$DH = CD - CH = \tfrac{b}{2} - t$$

og

$$EF = CE - CF = \tfrac{a}{2} - s \ .$$

Desuden er

$$KD = KP - DP = r - \tfrac{b}{2}$$

og

$$KE = KM - EM = r - \tfrac{a}{2}$$

Så får vi i ΔDHK, at

$$s^2 + \left(\tfrac{b}{2} - t\right)^2 = \left(r - \tfrac{b}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

og i ΔEFK, at

$$\left(\tfrac{a}{2} - s\right)^2 + t^2 = \left(r - \tfrac{a}{2}\right)^2 \ . \qquad (2)$$

Lad HK og GE skære hinanden i J. Så ligger G, J og E på linje og $GD \parallel BC$. Dermed er

$$KJ = HJ - HK = CE - CF = \tfrac{a}{2} - s \quad \text{og} \quad GJ = GE - JE = CD - CH = \tfrac{b}{2} - t \ .$$

Endelig er

$$KG = KN - GN = r - \tfrac{c}{2} \ .$$

Af ΔKGJ får vi

$$\left(\tfrac{a}{2} - s\right)^2 + \left(\tfrac{b}{2} - t\right)^2 = \left(r - \tfrac{c}{2}\right)^2 \ . \qquad (3)$$

Subtraktion af (3) fra (2) giver

$$t^2 - \left(\tfrac{b}{2} - t\right)^2 = \left(r - \tfrac{a}{2}\right)^2 - \left(r - \tfrac{c}{2}\right)^2 \ ,$$

og ved hjælp af elementær algebra reduceres dette til

$$t = \frac{c-a}{b} r \ . \qquad (4)$$

Subtraktion af (3) fra (1) giver

$$s^2 - \left(\tfrac{a}{2} - s\right)^2 = \left(r - \tfrac{b}{2}\right)^2 - \left(r - \tfrac{c}{2}\right)^2 \ ,$$

som ved reduktion giver

$$s = \frac{c-b}{a} r \ . \qquad (5)$$

Vi indsætter (4) og (5) i (2):

$$\left(\frac{a}{2} - \frac{c-b}{a} r\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b} r\right)^2 = \left(r - \frac{a}{2}\right)^2 .$$

Dette reduceres til

$$r^2 \cdot \left(\frac{c^2+b^2-2bc}{a^2} + \frac{c^2+a^2-2ac}{b^2} - 1 \right) + (a+b-c)\cdot r = 0 \;,$$

Da $r \neq 0$ fås heraf den søgte formel for r:

$$r = \frac{a^2b^2(a+b-c)}{a^2b^2 - b^2(c-b)^2 - a^2(c-a)^2} \;.$$

b. *1. metode.* Vi indfører bogstavbetegnelser som på figuren. Vi sætter $AM = AE = p$. Da $\square MPQN$ er et rektangel, er $MN = 2r$ og $BN = BG = c - p - 2r$. Da $FC = r$, får vi

$$EF = PL = b - p - r$$

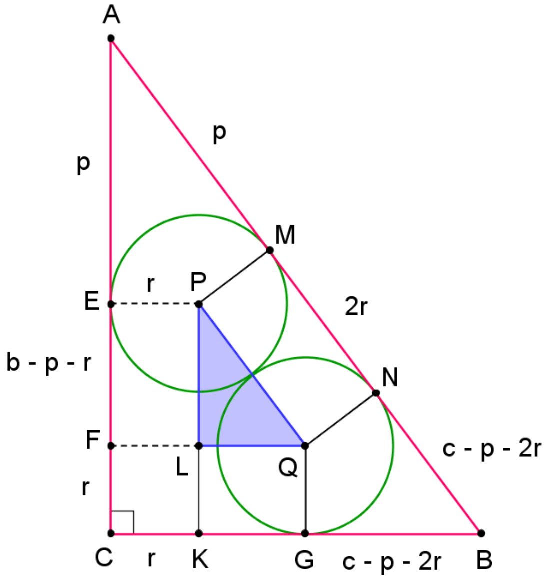
og

$$LQ = KG = BC - CK - GB$$

$$= a - r - (c - p - 2r) \;= a + r + p - c \;.$$

Nu er ΔABC og ΔPQL ensvinklede, så

$$\frac{b}{PL} = \frac{a}{QL} = \frac{c}{PQ} \Leftrightarrow \quad \frac{b}{b-p-r} = \frac{a}{a+r+p-c} = \frac{c}{2r} \;.$$



Dette giver

$$\frac{c}{2r} = \frac{b}{b-p-r} \quad \Leftrightarrow \quad bc - pc - rc = 2br$$

$$\Leftrightarrow \quad r(2b+c) = bc - pc \;, \qquad (6)$$

og

$$\frac{c}{2r} = \frac{a}{a+r+p-c} \quad \Leftrightarrow \quad 2ra = cr + ac + pc - c^2 \quad \Leftrightarrow$$

(7)

Vi indsætter (7) i (6):

$$r(2b + c) = bc - [r(2a - c) - ac + c^2] \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{c\cdot(a+b-c)}{2(a+b)} \;.$$

Dermed er den søgte radius fundet. Vi kan desuden finde, at

$$p = \frac{c\cdot(b+c-a)}{2(a+b)} \;.$$

2. metode. Lad AH være vinkelhalveringslinjen fra A gennem P. Så er

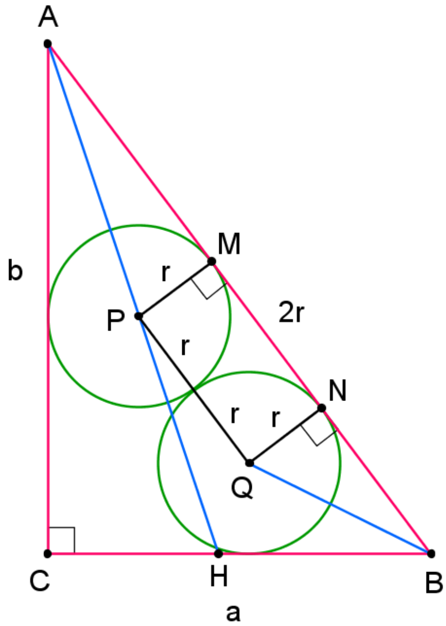
$$\frac{CH}{BH} = \frac{b}{c} \quad \text{og} \quad CH + BH = a \;.$$

Heraf fås

$$CH = \frac{ab}{b+c} \;.$$

I ΔACH er

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{b} = \frac{a}{b+c} \;.$$



Tilsvarende fås ved brug af vinkelhalveringslinjen fra *B* gennem *Q*, at

$$\tan\tfrac{B}{2} = \frac{b}{a+c}\ .$$

Nu er

$$MN = PQ = 2r\ .$$

I ΔAPM og ΔBQN får vi, at

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{r}{AM} \quad\Leftrightarrow\quad AM = \frac{r}{\tan\frac{A}{2}} \qquad \text{og} \qquad \tan\tfrac{B}{2} = \frac{r}{BN} \quad\Leftrightarrow\quad BN = \frac{r}{\tan\frac{B}{2}}\ ,$$

og dermed

$$c = AB = AM + MN + BN = \frac{r}{\tan\frac{A}{2}} + 2r + \frac{r}{\tan\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = r\cdot\frac{b+c}{a} + 2r + r\cdot\frac{a+c}{b} \quad\Leftrightarrow\quad abc = rb(b+c) + 2rab + ra(a+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad abc = rb^2 + ra^2 + rbc + rac + 2rab \quad\Leftrightarrow\quad abc = r(a^2 + b^2 + 2ab + bc + ac)$$

$$\Leftrightarrow \quad abc = r(a+b)(a+b+c) \quad\Leftrightarrow\quad r = \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)}\ .$$

Simpel algebra viser, at de to fundne udtryk for *r* stemmer overens.

Besvarelser modtaget fra:
Jens-Søren Andersen, Hans Chr. Hulvej, Walther Janous, Jørgen Olesen,
Jan Erik Pedersen, Jens Skak-Nielsen, Con Amore Problemgruppe.