Svar på opgave 355 (December 2018)

Opgave:

a. Vis, at hvis $p > 7$ er et primtal, er p^6 - 1 delelig med 504.

b. Om fire forskellige primtal, der alle er større end 5, gælder, at forskellen mellem det største og det mindste er mindre end 10.
Vis, at summen af de fire primtal er delelig med 60.

Besvarelse:

a.

1. metode. Til orientering finder vi, at

$$11^6 - 1 = 504 \cdot 3515 \quad , \quad 13^6 - 1 = 504 \cdot 9577 \quad , \quad 17^6 - 1 = 504 \cdot 47892 \ .$$

Vi har, at $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$,

Da p og 7 er indbyrdes primiske, gælder efter Fermats lille sætning, at

$$p^{7-1} \equiv 1 \pmod 7 \ ,$$

dvs. $p^6 - 1$ er delelig med 7.

Da p er ulige, er $p - 1$ og $p + 1$ konsekutive lige tal. Derfor er det ene deleligt med 2 og det andet med 4. Altså er $(p + 1)(p - 1) = p^2 - 1$ deleligt med 8.

Nu er

$$p^6 - 1 = (p^2)^3 - 1 = (p^2 - 1)(p^4 + p^2 + 1) \ ,$$

og dermed er $p^6 - 1$ deleligt med $8 = 2^3$.

Produktet $(p - 1) \cdot p \cdot (p + 1)$ af tre konsekutive tal er deleligt med 3. Da p er et primtal større end 7, er p ikke deleligt med 3. Derfor er $(p - 1)(p + 1) = p^2 - 1$ deleligt med 3.

Vi opløser $p^6 - 1$ i faktorer sådan:

$$p^6 - 1 = (p^2 - 1)(p^4 + p^2 + 1) = (p^2 - 1) \cdot [(p^2 - 1)^2 + 3p^2] \ .$$

Her er som nævnt $p^2 - 1$ delelig med 3, så indholdet af den sidste kantede parentes også er deleligt med 3. Derfor er produktet

$$(p^2 - 1) \cdot [(p^2 - 1)^2 + 3p^2]$$

deleligt med 3^2.

I alt har vi fundet, at $p^6 - 1$ er delelig med 7, med 2^3 og med 3^2. Dermed er $p^6 - 1$ dele- lig med produktet $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

2. metode. Vi undersøger delelighed med 7, 8 og 9 for $p^6 - 1$.

Delelighed med 7. Efter Fermats lille sætning er $p^6 - 1$ delelig med 7, da p og 7 er indbyrdes primiske.

Delelighed med 8. Vi har, at

$$p^6 - 1 = (p^3 - 1)(p^3 + 1) .$$

Nu kan p skrives på formen $4k + 1$ eller $4k - 1$ for et $k > 1$. Hvis $p = 4k + 1$, er

$$p^3 - 1 = (4k + 1)^3 - 1 = 64k^3 + 3 \cdot 16k^2 + 3 \cdot 4k + 1 - 1 = 4(16k^3 + 12k^2 + 3k) ,$$

og hvis $p = 4k - 1$ er

$$p^3 + 1 = (4k - 1)^3 + 1 = 64k^3 - 3 \cdot 16k^2 + 3 \cdot 4k - 1 + 1 = 4(16k^3 - 12k^2 + 3k) .$$

I begge tilfælde er den ene faktor i produktet $(p^3 - 1)(p^3 + 1)$ delelig med 4. Den anden faktor er delelig med 2, så $p^6 - 1$ er delelig med 8.

Delelighed med 9. Igen er

$$p^6 - 1 = (p^3 - 1)(p^3 + 1)$$

og p kan skrive på formen $3k + 1$ eller $3k - 1$ for et $k > 0$. Hvis p = 3k + 1, er

$$p^3 - 1 = (3k + 1)^3 - 1 = 27k^3 + 3 \cdot 9k^2 + 3 \cdot 3k + 1 - 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k) ,$$

og hvis $p = 3k - 1$, er

$$p^3 + 1 = (3k - 1)^3 + 1 = 27k^3 - 3 \cdot 9k^2 + 3 \cdot 3k - 1 + 1 = 9(3k^3 - 3k^2 + k) .$$

I begge tilfælde er en af faktorerne i produktet $(p^3 - 1)(p^3 + 1)$ delelig med 9 og dermed er $p^6 – 1$ delelig med 9.

Vi konkluderer, at $p^6 - 1$ er delelig med $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

b.

1. metode. Lad p være det mindste af de fire primtal. På grund af kravene til primtallene, må de findes blandt de fem ulige tal

$$p\ ,\ p + 2\ ,\ p + 4\ ,\ p + 6\ ,\ p + 8\ . \tag{1}$$

Blandt tre konsekutive hele tal er præcis et deleligt med 3. I talrækken (1) har vi mulighederne:

I. p er deleligt med 3. Umuligt, da p er et primtal.

II. $p + 2$ er deleligt med 3. Så er også $p + 8$ deleligt med 3. Men dette er umuligt, fordi der så ville være to sammensatte tal blandt de fem i strid med, at rækken indeholder fire primtal.

III. $p + 6$ er deleligt med 3. Så er også p deleligt med 3. Umuligt.

IV. $p + 8$ er deleligt med 3. Så er også $p + 2$ deleligt med 3. Umuligt.

Vi slutter, at $p + 4$ er deleligt med 3.

Blandt de fem ulige tal i rækken (1) findes præcis et, der er deleligt med 5. Der er nemlig følgende muligheder for fordelingen af det sidste ciffer i de fem tal:

1, 3, 5, 7, 9 - 3, 5, 7, 9, 1 - 5, 7, 9, 1, 3 - 7, 9, 1, 3, 5 - 9, 1, 3, 5, 7 .

Det tal, der er deleligt med 5, må være det midterste $p + 4$. Thi var det et af de øvrige, ville dette sammen med $p + 4$ være sammensat, så rækken kun indeholdt tre primtal i strid med forudsætningen om, at den indeholder fire primtal.

Dermed har vi fundet, at $p + 4$ delelig med både 3 og 5. De fire primtal i (1) har summen

$$p + p + 2 + p + 6 + p + 8 = 4(p + 4) .$$

Denne sum er delelig med 3 og 5, fordi $p + 4$ er det, og desuden delelig med 4. Altså er summen delelig med $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

2. metode. Da $60 = 5 \cdot 12$ og sfd(5,12) = 1, skal vi vise, at 5 og 12 går op i summen af de fire primtal. Lad primtallene være p_1, p_2, p_3 og p_4, så

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 \quad \text{og} \quad p_4 - p_1 < 10 .$$

I. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ er delelig med 5.

Ethvert primtal $p > 5$ kan skrives på formen $p = 10k + r$, hvor r er et af tallene 1, 3, 7 el- ler 9, Da $p_4 - p_1 < 10$, må hver af de fire mulige rester optræde netop én gang blandt de fire primtal. Dette giver de fire muligheder i skemaet:

p_1	p_2	p_3	p_4	$p_1 + p_2 + p_3 + p_4$
$10k + 1$	$10k + 3$	$10k + 7$	$10k + 9$	$40k + 20$
$10k + 3$	$10k + 7$	$10k + 9$	$10k + 11$	$40k + 30$
$10k + 7$	$10k + 9$	$10k + 11$	$10k + 13$	$40k + 40$
$10k + 9$	$10k + 11$	$10k + 13$	$10k + 7$	$40k + 50$

I alle tilfælde er summen delelig med 5.

II. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ er delelig med 12.

Ethvert primtal $p > 5$ kan skrives på formen $p = 6k - 1$ eller $p = 6k + 1$ for et $k > 0$.
Tallene $\{6k \pm 1 \mid k \in N\}$ ligger i en afstand på skiftevis 2 og 4 fra hinanden, når de stilles

op i rækkefølge. Da $p_4 - p_1 < 10$, må der findes et k, så

$$p_1 = 6k - 1 \quad , \quad p_2 = 6k + 1 \quad , \quad p_3 = 6k + 5 \quad , \quad p_4 = 6k + 7 .$$

Summen er

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 24k + 12 ,$$

som er delelig med 12.

Bemærkning. Under 1000 findes fire 'primtalsfirlinger':

11, 13, 17, 19 med summen 60
101, 103, 107, 109 med summen $420 = 7 \cdot 60$
191, 193, 197, 199 med summen $780 = 13 \cdot 60$
821, 823, 827, 829 med summen $3300 = 55 \cdot 60$.

Under 10000 finder man i en faktortabel kun yderligere seks firlinger:

1481, 1483, 1487, 1499 med summen $5940 = 99 \cdot 60$
1871, 1873, 1877, 1879 med summen $7500 = 125 \cdot 60$
2081, 2083, 2087, 2089 med summen $8340 = 139 \cdot 60$
3461, 3463, 3467, 3469 med summen $13860 = 231 \cdot 60$
5651, 5653, 5657, 5659 med summen $22620 = 377 \cdot 60$
9431, 9433, 9437, 9439 med summen $37740 = 629 \cdot 60$.

Som kuriosum nævner vi, at det største sæt af primtalsfirlinger under 100 000 er

97841, 97843, 97847, 97849 med summen $391380 = 6523 \cdot 60$.

Besvarelser modtaget fra: Jens-Søren Andersen, Johs. M. Christensen, Hans Christian Hulvej, Walther Janous, Hans Mortensen, Asger Olesen, Jan Erik Pedersen, Palle Bak Petersen, Jens Skak-Nielsen, Con Amore Problemgruppe.