Svar på opgave 357 (Februar 2019)

Opgave:

Bestem samtlige trekanter med hele sidelængder af formen
$(a,b,c) = (2n - 1\ , 2n\ , 2n + 1)$ med heltallige arealer under 20 000.

Besvarelse:

Efter Herons formel gælder for trekantens areal T, at

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)\ .$$

Her er

$$a = 2n - 1\ \ ,\ \ b = 2n\ \ ,\ \ c = 2n + 1\ \ ,\ \ s = 3n\ ,$$

så vi får

$$T^2 = 3n \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) = 3n^2(n^2-1)\ \ .$$

Vi kræver, at $3(n^2 - 1)$ er et kvadrattal, så vi søger hele tal k, så

$$3(n^2-1) = k^2\ .$$

Vi ser, at k må være deleligt med 3, så $k = 3q$ for et passende helt tal q, dvs.

$$3(n^2-1) = 9q^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 1 = 3q^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 3q^2 = 1\ \ . \tag{1}$$

Desuden har vi, at

$$T^2 = 3n^2 \cdot 3q^2 \quad \Leftrightarrow \quad T = 3nq\ \ .$$

Nu er ligningen (1) er såkaldt *Pell-ligning*, hvis løsninger bestemmes ud fra én enkelt kendt løsning. Vi finder let løsningerne

$$(n,q)\ \ :\ \ (1,0)\ ,\ (2,1)\ ,\ (7,4)\ .$$

Hvis vi bruger betegnelserne

$$(n_0,q_0) = (1,0)\quad ,\quad (n_1,q_1) = (2,1)\quad ,\quad (n_2,q_2) = (7,4)\ \ ,$$

fås samtlige andre løsninger ved rekursionsformlerne

$$n_{p+1} = 4n_p - n_{p-1}\quad ,\quad q_{p+1} = 4q_p - q_{p-1}\ .$$

De næste løsninger til ligningen (1) fås derved til

$$(n_3,q_3) = (26,15)\ \ ,\ \ (n_4,q_4) = (97,56)\ \ ,\ \ (n_5,q_5) = (362,209)\ .$$

De tilhørende trekanter får sidelængderne

$$(a,b,c):\quad (3,4,5)\ \ ,\ \ (13,14,15)\ \ ,\ \ (51,52,53)\ \ ,\ \ (193,194,195)\ \ ,\ \ (723,724,725)$$

med arealer henholdsvis

$$6\ ,\ 84\ ,\ 1170\ ,\ 16296\ ,\ 226974\ .$$

Vi har dermed fundet fire trekanter af den ønskede slags.

Bemærkning.

Ligningen (1) omskrives til

$$\left(n-q\sqrt{3}\right)\left(n+q\sqrt{3}\right)=1 \ .$$

Den mindste løsning til (1) ses at være (n,q) = (2,1), så

$$\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=1 \ ,$$

og derfor gælder for ethvert naturligt tal k, at

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^k\left(2+\sqrt{3}\right)^k=1 \ .$$

Derved får vi efter teorien for Pells ligning, at samtlige løsninger til (1) er bestemt ved

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^k=n_k+q_k\sqrt{3} \ . \tag{2}$$

Vi finder af (2), at

$$n_2+q_2\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3} \ ,$$

$$n_3+q_3\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^3=\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=26+15\sqrt{3} \ ,$$

$$n_4+q_4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^4=\left(26+15\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=97+56\sqrt{3} \ ,$$

$$n_5+q_5\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^5=\left(97+56\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=362+209\sqrt{3} \ ,$$

så

$$(n_2,q_2) = (7,4) \ , \quad (n_3,q_3) = (26,15) \ , \quad (n_4,q_4) = (97,56) \ , \quad (n_5,q_5) = (362,209) \ .$$

Herefter fås de anførte resultater oven for.

Bemærkning.

Oven for anførte vi talfølgen (n_k) givet ved

$$n_{k+1} = 4n_k - n_{k-1} \ .$$

Vi omskriver til

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}=4-\frac{n_{k-1}}{n_k} \ .$$

Hvis vi antager, at brøken på venstre side af lighedstegnet har en grænseværdi x for $k \to \infty$, får vi, at

$$x=4-\tfrac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-4x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2\pm\sqrt{3} \ .$$

Dette giver, inspireret af Binets formel for fibonaccitallene og beviset herfor, at

$$n_k=\tfrac{1}{2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^k+\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right) \quad , \quad q_k=\tfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^k-\left(2-\sqrt{3}\right)^k\right) \ ,$$

så trekanternes arealer fås til

$$T_k = 3n_k q_k = \tfrac{3}{4\sqrt{3}}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^k + \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right)\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k} - \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k}\right).$$

Besvarelser modtaget fra:
Jens Søren Andersen, Martin Fæster, Walther Janous, Hans Mortensen, Asger Olesen, Jørgen Olesen, Jan Erik Pedersen, Con Amore Problemgruppe.