Svar på opgave 358 (Marts 2019)

Opgave:

Løs inden for de reelle tal hvert af ligningssystemerne

a.
$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y$$
$$\frac{4y^2}{1+4y^2} = z$$
$$\frac{4z^2}{1+4z^2} = x\ .$$

b.
$$x^2 + 2yz = x$$
$$y^2 + 2xz = y$$
$$z^2 + 2xy = z\ .$$

Besvarelse:

a.

1. metode.

Det er klart, at x, y og z er ikke-negative og at hvis en af de variable er 0, er de alle 0.
Derfor antager vi, at x, y og z er positive.
Idet vi i almindelighed for positive tal a og b har, at $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, er

$$1+4x^2 \geq 2\sqrt{4x^2} = 4x\ ,$$

og dermed er

$$y = \frac{4x^2}{1+4x^2} \leq \frac{4x^2}{4x} = x\ .$$

På samme måde er

$$z \leq \frac{4y^2}{4y} = y \quad \text{og} \quad x \leq \frac{4z^2}{4z} = z\ .$$

Altså har vi, at $x = y = z$. Vi indsætter $y = x$ i den første ligning:

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = x(1+4x^2) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 1+4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}\ .$$

Dermed har ligningssystemet netop to løsninger, nemlig $(x,y,z) = (0,0,0)$ og
$(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. metode.

Vi ser, at $(x,y,z) = (0,0,0)$ er løsning og antager derfor nu, at ingen af de variable er 0.

Vi benytter 'den brutale' metode og indsætter den første ligning i den anden:

$$z=\frac{4\cdot\left(\frac{4x^2}{1+4x^2}\right)^2}{1+\cdot 4\left(\frac{4x^2}{1+4x^2}\right)^2}=\frac{64x^4}{80x^4+8x^2+1}\ ,$$

og dette indsættes i den sidste ligning:

$$x=\frac{4\cdot\left(\frac{64x^4}{80x^4+8x^2+1}\right)^2}{1+4\cdot\left(\frac{64x^4}{80x^4+8x^2+1}\right)^2}\ .$$

Dette monstrum reduceres efter division med x til

$$22784x^8 - 16384x^7 + 1280x^6 + 224x^4 + 16x^2 + 1 = 0\ .$$

Heraf ses, at der ikke findes negative løsninger. Vi gætter, at $x = \frac{1}{2}$ er dobbeltrod, så ligningen ved division med $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ forvandles til

$$4\cdot(5696x^6 + 1600x^5 + 496x^4 + 96x^3 + 28x^2 + 4x + 1) = 0\ .$$

Denne ligning har ingen positive løsninger, så $x = \frac{1}{2}$ er den eneste løsning. Herefter fås $y = \frac{1}{2}$ og $z = \frac{1}{2}$. Altså har vi løsningerne $(x,y,z) = (0,0,0)$ og $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

3. metode.
Multiplikation af de tre ligninger giver

$$\frac{4x^2\cdot 4y^2\cdot 4z^2}{(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)}=xyz \quad\Leftrightarrow\quad \frac{64xyz}{(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)}=1$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1+4x^2}{2x}\cdot\frac{1+4y^2}{2y}\cdot\frac{1+4z^2}{2z}=8 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{1}{2x}+2x\right)\cdot\left(\frac{1}{2y}+2y\right)\cdot\left(\frac{1}{2z}+2z\right)=8\ .$$

Nu er $\frac{1}{t}+t\geq 2$ for $t > 0$ og $\frac{1}{t}+t=2$ for $t = 1$. Altså er

$$\frac{1}{2x}+2x=\frac{1}{2y}+2y=\frac{1}{2z}+2z=2 \quad\Leftrightarrow\quad x=y=z=\frac{1}{2}\ .$$

Ved prøve ses, at $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ er en løsning og desuden er der ikke andre positive løsninger. Desuden er $(x,y,z) = (0,0,0)$ en løsning.

4. metode.
Vi ser, at $(x,y,z) = (0,0,0)$ er en løsning og forudsætter derefter, at hverken x, y eller z er 0. Vi sætter

$$a=\tfrac{1}{x}\ ,\ b=\tfrac{1}{y}\ ,\ c=\tfrac{1}{z}\ ,$$

så den første ligning kan omskrives til

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\frac{1}{x^2}+4} = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{a^2+4} = \frac{1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad 4b = a^2+4 \,. \qquad (1)$$

Tilsvarende får de to øvrige ligninger udseendet

$$4c = 4 + b^2 \quad , \quad 4a = 4 + c^2 \;. \qquad (2)$$

Disse to ligninger giver til sammen

$$(4 + b^2)^2 = 16c^2 \quad \Leftrightarrow \quad (4 + b^2)^2 = 16(4a - 4) \quad \Leftrightarrow \quad (4 + b^2)^2 = 64(a - 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1}{64}(4+b^2)^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \tfrac{1}{64^2}(4+b^2)^4 + \tfrac{1}{32}(4+b^2)^2 + 1 \;.$$

Dette indsættes i (1):

$$4b = \tfrac{1}{64^2}(4+b^2)^4 + \tfrac{1}{32}(4+b^2)^2 + 5 \;.$$

Trælse algebraiske udregninger giver, at denne ligning er ensbetydende med

$$b^8 + 16b^6 + 224b^4 + 1280b^2 - 16384b + 22784 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b - 2)^2(b^6 + 4b^5 + 28b^4 + 96b^3 + 496b^2 + 1600b + 5696) = 0 \;. \qquad (3)$$

Heraf ses, at en løsning er $b = 2$, hvilket indsat oven for giver $a = 2$ og $c = 2$ og dermed

$$x = y = z = \tfrac{1}{2} \;.$$

Indsættelse i de oprindelige ligninger giver, at dette faktisk er en løsning.
Af (1) og (2) følger, at a, b og c er positive. Derfor har ligningen (3) kun løsningen $b = 2$.

5. metode.
Hvis (x,y,z) er en løsning og et af tallene x, y og z er 0, er de øvrige det også. Sættet (0,0,0) er en løsning til ligningssystemet.
Hvis $x \neq 0$ og dermed $y \neq 0$ og $z \neq 0$, fås følgende omskrivninger:

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+4x^2}{4x^2} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{y} - 1\right).$$

På samme måde er

$$\left(\tfrac{1}{y}\right)^2 = 4\left(\tfrac{1}{z} - 1\right) \quad , \quad \left(\tfrac{1}{z}\right)^2 = 4\left(\tfrac{1}{x} - 1\right) \;.$$

Addition af de sidste tre ligninger giver

$$\left(\tfrac{1}{x}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{y}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{z}\right)^2 = 4\left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y} + \tfrac{1}{z} - 3\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{1}{x} - 2\right)^2 + \left(\tfrac{1}{y} - 2\right)^2 + \left(\tfrac{1}{z} - 2\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{x} - 2 = 0 \;\wedge\; \tfrac{1}{y} - 2 = 0 \;\wedge\; \tfrac{1}{z} - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} \;\wedge\; y = \tfrac{1}{2} \;\wedge\; z = \tfrac{1}{2} \;.$$

Talsættet $(x,y,z) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$ ses at være løsning til ligningssystemet.

b.
Hvis $x = 0$, er $y = 0$ eller $z = 0$. Hvis her $y = 0$ får vi af de to første ligninger, at $0 = 0$, mens den sidste giver $z^2 = z$, så $z = 0$ eller $z = 1$. Altså har vi løsningerne

$$(x,y,z) \;:\; (0,0,0) \;,\; (0,0,1) \;.$$

På grund af symmetrien er også $(x,y,z) = (0,1,0)$ og $(x,y,z) = (0,0,1)$ løsninger.
Antag så, at $xyz \neq 0$ og antag først, at x, y og z er indbyrdes forskellige. Af de tre ligninger får vi

$$x - x^2 = 2yz \quad , \quad y - y^2 = 2xz \quad , \quad z - z^2 = 2xy \quad ,$$

hvoraf

$$x(x - x^2) = 2xyz \quad , \quad y(y - y^2) = 2xyz \quad , \quad z(z - z^2) = 2xyz \quad ,$$

så

$$x(x - x^2) = y(y - y^2) = z(z - z^2) = 2xyz \; .$$

Altså er x, y og z rødder i ligningen

$$w^3 - w^2 + k = 0 \; ,$$

hvor $k = -2xyz$. Nu er produktet af rødderne i et normeret tredjegradspolynomium lig med konstantleddet med modsat fortegn, så $xyz = -k$. Dette medfører, at $xyz = 2xyz$, hvilket er umuligt, da $xyz \neq 0$.

Ikke alle tre rødder er altså forskellige. Vi kan gå ud fra, at $x = y$. Første og sidste ligning i systemet giver

$$x^2 + 2xz = x \quad \text{og} \quad z^2 + 2x^2 = z \quad ,$$

og da $x \neq 0$, er

$$x + 2z = 1 \quad \text{og} \quad z^2 + 2(1 - 2z)^2 = z \; .$$

Den sidste af disse ligninger giver

$$z^2 + 2(1 + 4z^2 - 4z) = z \quad \Leftrightarrow \quad 9z^2 - 9z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \tfrac{2}{3} \;\vee\; z = \tfrac{1}{3} \; .$$

Hvis $z = \frac{2}{3}$, er $x = 1 - 2z = -\frac{1}{3} = y$, så $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Hvis $z = \frac{1}{3}$, er $x = 1 - 2z = \frac{1}{3} = y$, så $(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

På grund af symmetrien har vi desuden løsningerne

$$(x,y,z) \; : \; \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) \; , \; \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) \; .$$

I alt har vi fundet 8 løsninger til ligningssystemet.

Bemærkning.
At tallene x, y og z ikke kan være indbyrdes forskellige kan vi også se på følgende måde. Subtraktion af den anden ligning fra den første giver

$$x^2 - y^2 + 2yz - 2xz = x - y \quad \Leftrightarrow \quad (x + y)(x - y) - 2z(x - y) = x - y$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - y)(x + y - 2z - 1) = 0 \; .$$

Tilsvarende fås ved subtraktion af de øvrige par af ligninger. Hvis de tre tal x, y og z var indbydes forskellige, ville så

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ y + z - 2x &= 1 \\ z + x - 2y &= 1 \quad , \end{aligned}$$

hvoraf ved addition:

$$2(x + y + z) - 2(x + y + z) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3 \; ,$$

hvilket er en modstrid.

Opgave 358b er også stillet som opgave 142 (september 1997).

Besvarelser modtaget fra:
Jens Søren Andersen, Johs. Christensen, Hans Christian Hulvej, Walther Janous, Hans Mortensen, Asger Olesen, Jørgen Olesen, Palle Bak Petersen, Jens Skak-Nielsen, Con Amore Problemgruppe.