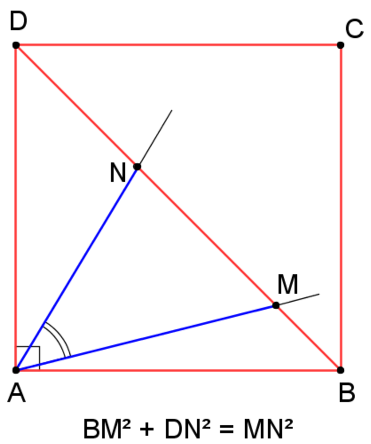
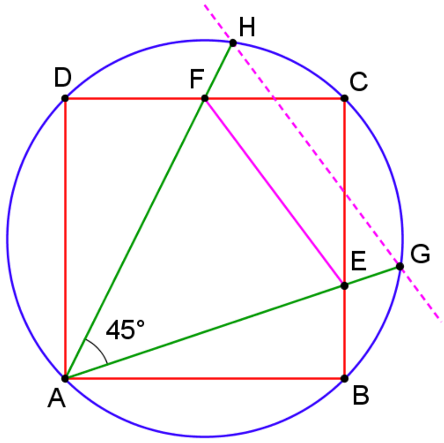
Svar på opgave 359 (April 2019)

Opgave:

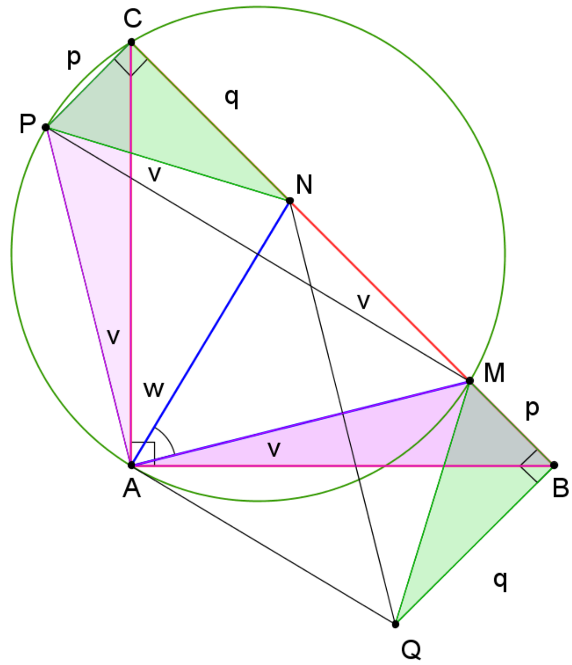




a. I kvadratet *ABCD* ligger punkterne *M* og *N* på diagonalen *BD*, så $BM^2 + DN^2 = MN^2$.
Vis, at $\angle MAN = 45°$.

b. I kvadratet *ABCD* er *E* og *F* punkter på siderne *BC* og *CD*, så $\angle EAF = 45°$.
Linjerne *AE* og *AF* skærer den omskrevne cirkel i *G* og *H*.
Vis, at $EF \parallel GH$.

Besvarelse:



a.
1. metode

Træk $CP \perp CB$, så $CP = BM = p$ og $BQ \perp CB$, så $BQ = CN = q$. Lad desu- den for nemheds skyld *P* og *Q* ligge på samme side af hypotenusen. Vi trækker *PN*, *PM*, *PA*, *QM*, *QN* og *QA*.

Vi ser, at ΔCPA og ΔBMA er kongruente, fordi

$$\angle PCA = \angle MBA = 45° \quad , \quad PC = MB \ ,$$

$$CA = BA \ .$$

Altså er $\angle PAC = \angle BAM = v$. Dermed er

$$\angle MAP = \angle BAC = 90° \ ,$$

så $\square PAMC$ er indskrivelig (to modstående rette vinkler).

Lige store periferivinkler i firkantens omskrevne cirkel giver

$$\angle PMC = \angle PAC = v \; .$$

Videre er

$$PN^2 = PC^2 + CN^2 = BM^2 + CN^2$$
$$= MN^2 \; .$$

Derfor er $PN = MN$, så ΔPMN er lige- benet med $\angle NPM = \angle NMP = v$. I ΔPNM er så

$$\angle PNC = 180° - \angle PNM = 180° - (180° - 2v) = 2v \; .$$

Hvis vi sætter $w = \angle CAN$ er på samme måde $\angle QMB = 2w$.

Nu er ΔNCP og ΔQBM kongruente, da de begge er retvinklede og har parvis lige lange kateter. Altså er

$$\angle CPN = \angle BMQ = 2w \; .$$

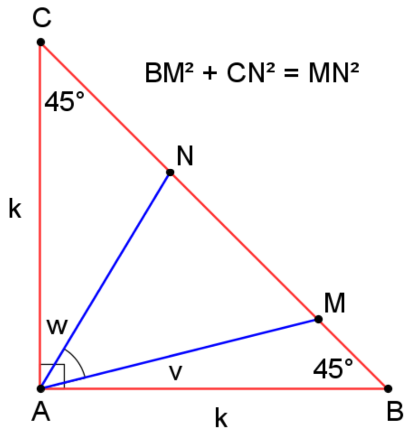
I de to trekanter er så $2v + 2w = 90°$, så $v + w = 45°$. Dermed er

$$\angle MAN = 90° - \angle BAM - \angle CAN = 90° - v - w = 45° \; .$$

2. metode

Vi sætter $k = AB = AC$, så $BC = k\sqrt{2}$, og $v = \angle BAM$, $w = \angle CAN$. I ΔABM får vi

$$\frac{BM}{\sin v} = \frac{AB}{\sin(135° - v)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BM}{\sin v} = \frac{AB}{\sin(v + 45°)} \; . \qquad (1)$$



Nu er

$$\sin(v + 45°) = \sin v \cdot \cos 45° + \cos v \cdot \sin 45°$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin v + \cos v)$$

så vi af (1) får

$$BM = \frac{AB \cdot \sin v \cdot \sqrt{2}}{\sin v + \cos v} = \frac{k\sqrt{2} \cdot \sin v}{\sin v + \cos v} = \frac{k\sqrt{2} \cdot \tan v}{\tan v + 1} \; .$$

På samme måde er

$$CN = \frac{k\sqrt{2} \cdot \tan w}{\tan w + 1} \; .$$

Vi omskriver sådan:

$$BM^2 + CN^2 = MN^2 \quad \Leftrightarrow \quad BM^2 + CN^2 = (BC - BM - CN)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad BM^2 + CN^2 = BC^2 + BM^2 + CN^2 - 2 \cdot BC \cdot BM - 2 \cdot BC \cdot CN + 2 \cdot BM \cdot CN$$
$$\Leftrightarrow \quad BC^2 - 2 \cdot BC \cdot BM - 2 \cdot BC \cdot CN + 2 \cdot BM \cdot CN = 0 \; .$$

Heri indsættes udtrykkene oven for:

$$2k^2 - 2k\sqrt{2} \cdot \frac{k\sqrt{2} \cdot \tan v}{\tan v + 1} - 2k\sqrt{2} \cdot \frac{k\sqrt{2} \cdot \tan w}{\tan w + 1} + \frac{4k^2 \cdot \tan v \cdot \tan w}{(\tan v + 1)(\tan w + 1)} = 0 \; .$$

Efter en række trælse algebraiske reduktioner er dette ensbetydende med

$$\tan v \cdot \tan w + \tan v + \tan w - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan v + \tan w = 1 - \tan v \cdot \tan w$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\tan v + \tan w}{1 - \tan v \cdot \tan w} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan(v + w) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v + w = 45° .$$

Altså er $\angle MAN = 45°$.

3. metode

Vi viser, at

$$\angle MAN = 45° \quad \Leftrightarrow \quad BM^2 + DN^2 = MN^2 .$$

Cosinusrelationen i ΔAND og ΔAMB giver

$$AN^2 = AD^2 + DN^2 - 2 \cdot AD \cdot DN \cdot \cos D = AD^2 + DN^2 - \sqrt{2} \cdot AD \cdot DN$$

og

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos B = AD^2 + BM^2 - \sqrt{2} \cdot AD \cdot BM .$$

I ΔANM får vi

$$\cos \angle MAN = \frac{AN^2 + AM^2 - MN^2}{2 \cdot AN \cdot AM}$$

$$= \frac{2AD^2 - \sqrt{2} \cdot AD \cdot DN - \sqrt{2} \cdot AD \cdot BM + \left(BM^2 + DN^2 - MN^2\right)}{2 \cdot AM \cdot AN} . \qquad (2)$$

Arealformlen for trekanter giver

$$\sin \angle MAN = \frac{4 \cdot [\Delta AMN]}{2 \cdot AM \cdot AN} = \frac{4 \cdot \left([\Delta ABD] - [\Delta ADN] - [\Delta ABM]\right)}{2 \cdot AM \cdot AN}$$

$$= \frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2} AD^2 - \frac{1}{2} AD \cdot DN \cdot \sin D - \frac{1}{2} AB \cdot BM \cdot \sin B\right)}{2 \cdot AM \cdot AN}$$

$$= \frac{2AD^2 - \sqrt{2} AD \cdot DN - \sqrt{2} AD \cdot BM}{2 \cdot AM \cdot AN} . \qquad (3)$$

Af (2) og (3) fås så

$$BM^2 + DN^2 = MN^2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos \angle MAN = \sin \angle MAN \quad \Leftrightarrow \quad \angle MAN = 45° ,$$

hvilket er det ønskede.

4. metode

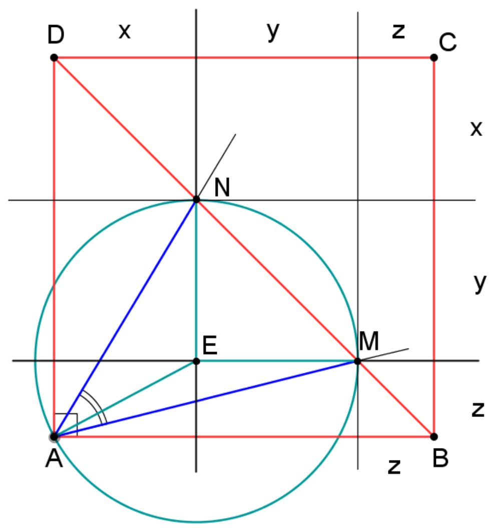
Gennem M og N trækkes linjer parallelle med kvadratets sider. Disse linjer deler kvadratets sider i stykker, hvis længder betegnes x, y og z som vist. Lad E være skæ- ringspunktet mellem den vandrette linje gen- nem M og den lodrette linje gennem N.

Efter opgavens ordlyd er $x^2 + z^2 = y^2$. Vi har, at

$$EA^2 = x^2 + z^2 = y^2 \ ,$$

så $EA = y$. Da altså

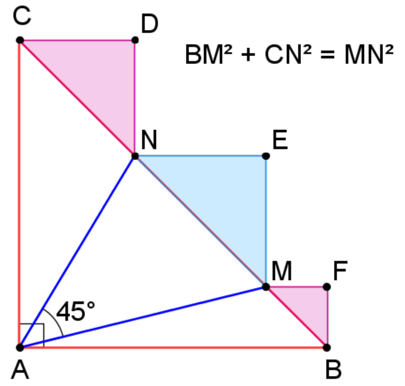
$$EA = EN = EM = y ,$$



er E centrum for den omskrevne cirkel for ΔAMN. Da en periferivinkel har halvt så stort gradtal som centervinklen over samme bue, er

$$\angle MAN = \tfrac{1}{2} \cdot \angle MEN = \tfrac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \,.$$

Bemærkning.



Det geometriske indhold i relationen

$$BM^2 + CN^2 = MN^2$$

er vist på figuren, hvor summen af arealerne af de retvinklede trekanter CDN og MFB er lig med arealet af den retvinklede trekant NEM. Denne betingelse er ensbetydende med, at $\angle MAN = 45^\circ$.

b.

1. metode

Da AC er diameter i den om- skrevne cirkel, er

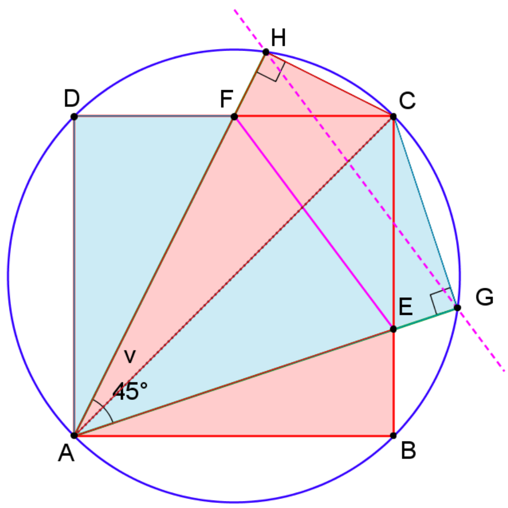
$$\angle AGC = \angle AHC = 90^\circ \,,$$

så ΔAGC og ΔAHC er retvinklede.

Vi sætter $v = \angle CAH$ og får

$$\angle GAC = 45^\circ - v \quad \text{og} \quad \angle FAD = 45^\circ - v \,,$$

så $\angle GAC = \angle FAD$.



Altså er ΔCAG og ΔFAD ensvinklede, hvoraf

$$\frac{AG}{AD} = \frac{CA}{AF} \quad \Leftrightarrow \quad AG \cdot AF = CA \cdot AD \,. \qquad (4)$$

Hvis vi sætter $x = \angle GAC = \angle FAD$, er $x + v = 45^\circ$ og $\angle EAB = 45^\circ - x$ og $\angle CAH = v = 45^\circ - x$. Dermed er $\angle EAB = \angle CAH$, så ΔEAB og ΔCAH er ensvinklede, dvs.

$$\frac{EA}{CA} = \frac{AB}{AH} \quad \Leftrightarrow \quad EA \cdot AH = AB \cdot CA \,. \qquad (5)$$

Da $AB = AD$ får vi af (4) og (5), at

$$AG \cdot AF = EA \cdot AH \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AE}{AG} = \frac{AF}{AH} \,.$$

Dette medfører, at $EF \parallel GH$.

2. metode

Lad P være projektionen af F på AE og lad FP skære AB i Q. Så er □$APFD$ indskrivelig, da to modstående vinkler er rette.

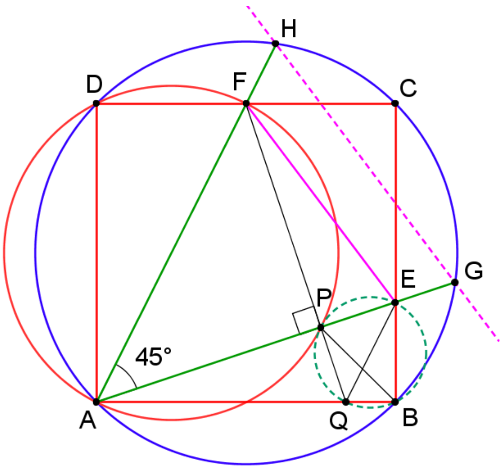
Vi får i ΔAFP, at

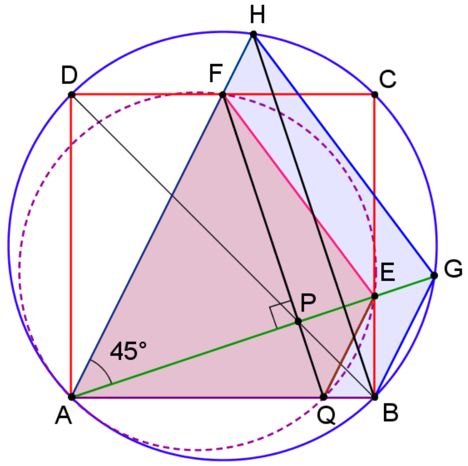
$$\angle FAP = 45° \quad \text{og} \quad \angle APF = 90°,$$

så $\angle AFP = 45°$.
Lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel for $\square APFD$ giver, at

$$\angle ADP = \angle AFP = 45° .$$

Heraf slutter vi, at P ligger på diagonalen BD.





Videre er $\square QPEB$ indskrivelig (modstående rette vinkler), så lige store periferivinkler i firkantens omskrevne cirkel giver

$$\angle PEQ = \angle PBQ = \angle DBA = 45° .$$

Så har vi, at

$$\angle AFQ = \angle AFP = 45° - \angle PEQ = \angle AEQ ,$$

hvilket medfører, at $\square AQEF$ er indskrivelig, da $\angle AFQ$ og $\angle AEQ$ spænder over samme bue i den omskrevne cirkel. Desuden er $\square ABGH$ indskrivelig.

Lige store periferivinkler i de omskrevne cirkler giver

$$\angle AFE = \angle AFP + \angle PFE = 45° + \angle QFE = 45° + \angle QAE = 45° + \angle BAG$$

$$= \angle ADB + \angle BAG = \angle AHB + \angle BHG = \angle AHG .$$

Da altså $\angle AFE = \angle AHG$, er $FE \parallel GH$.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens Søren Andersen
- Theis Bedsted & Magnus Bøe
- Hans Christian Hulvej
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Palle Bak Petersen