Svar på opgave 361 (August 2019)

Opgave:

I opgave 100 (maj 1993) vistes, at der for naturlige tal n gælder

$$\text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)=\text{int}\sqrt{4n+2}\quad ,$$

og i opgave 231 (august 2006) vistes, at

$$\text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)=\text{int}\sqrt{9n+8}\quad .$$

Vis nu, at der for naturlige tal n gælder

$$\text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)=\text{int}\sqrt{16n+20}\quad .$$

Besvarelse:

1. metode.

Vi viser først, at

$$\sqrt{4n+1}\le\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}\ . \tag{1}$$

Ved kvadrering er uligheden ensbetydende med

$$4n+1\le n+n+1+2\sqrt{n(n+1)}<4n+2$$
$$\Leftrightarrow\quad 4n+1\le 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<4n+2$$
$$\Leftrightarrow\quad 2n\le 2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$$
$$\Leftrightarrow\quad 4n^2\le 4n^2+4n<4n^2+4n+1\quad\Leftrightarrow\quad 0\le 4n<4n+1\ ,$$

hvilket er sandt.

Vi viser dernæst

$$\sqrt{4n+3}\le\sqrt{n}+\sqrt{n+2}<\sqrt{4n+4}\ . \tag{2}$$

Uligheden er ved kvadrering ensbetydende med

$$4n+3\le n+n+2+2\sqrt{n(n+2)}<4n+4$$
$$\Leftrightarrow\quad 2n+1\le 2\sqrt{n(n+2)}<2n+2$$
$$\Leftrightarrow\quad 4n^2+1\le 4n^2+8n<4n^2+8n+4\quad\Leftrightarrow\quad 0\le 4n-1<4n+3\ ,$$

hvilket er sandt.

Endelig viser vi

$$\sqrt{4n+5} \le \sqrt{n}+\sqrt{n+3} < \sqrt{4n+6}\ . \qquad (3)$$

Kvadrering giver

$$4n+5 \le n+n+3+2\sqrt{n(n+3)} < 4n+6$$
$$\Leftrightarrow\quad 2n+2 \le 2\sqrt{n(n+3)} < 2n+3$$
$$\Leftrightarrow\quad 4n^2+8n+4 \le 4n^2+12n < 4n^2+12n+9 \quad\Leftrightarrow\quad 0 \le 4n-4 < 4n+5\ ,$$

hvilket er sandt.

I uligheden (1) ligger der ikke noget helt tal mellem $\sqrt{4n+1}$ og $\sqrt{4n+2}$, thi et sådant helt tal k ville opfylde

$$\sqrt{4n+1} < k < \sqrt{4n+2} \quad\Leftrightarrow\quad 4n+1 < k^2 < 4n+2\ ,$$

hvilket er umuligt, da k^2 er hel og $4n + 1$ og $4n + 2$ er konsekutive hele tal. Altså er

$$\operatorname{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) = \operatorname{int}\sqrt{4n+1}\ .$$

På samme måde ligger der i (2) ikke noget helt tal mellem $\sqrt{4n+3}$ og $\sqrt{4n+4}$, så

$$\operatorname{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right) = \operatorname{int}\sqrt{4n+3}\ ,$$

og i (3) får vi

$$\operatorname{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+3}\right) = \operatorname{int}\sqrt{4n+5}\ .$$

Addition af de sidste tre formler giver det ønskede.

2. metode.

Vi viser først, at

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3} > \sqrt{16n+20} \qquad (4)$$

for alle naturlige tal n.

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal giver omskrivningen

$$\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right) > \sqrt[4]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+3}}$$
$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3} > 4\sqrt[8]{n(n+1)(n+2)(n+3)}\ .$$

Nu er

$$4\sqrt[8]{n(n+1)(n+2)(n+3)} > \sqrt{16n+20}$$
$$\Leftrightarrow\quad n(n+1)(n+2)(n+3) > \left(\tfrac{1}{4}\right)^8\cdot(16n+20)^4$$
$$\Leftrightarrow\quad n^4+6n^3+11n^2+6n > \left(\tfrac{1}{4}\right)^8\cdot 4^4\cdot(4n+5)^4$$
$$\Leftrightarrow\quad n^4+6n^3+11n^2+6n > \left(\tfrac{1}{4}\right)^8\cdot\left(4^4\cdot n^4+4\cdot 4^3\cdot n^3\cdot 5+6\cdot 4^2\cdot n^2\cdot 5^2+4\cdot 4n\cdot 5^3+5^4\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad n^4+6n^3+11n^2+6n > n^4+5n^3+\tfrac{75}{8}n^2+\tfrac{125}{16}n+\tfrac{625}{256}$$
$$\Leftrightarrow\quad n^3+\tfrac{13}{8}n^2-\tfrac{29}{16}n-\tfrac{625}{256} > 0\ . \qquad (5)$$

Vi sætter

$$f(x) = x^3+\tfrac{13}{8}x^2-\tfrac{29}{16}x-\tfrac{625}{256}\ ,$$

så at

$$f\,'(x) = 3x^2 + \tfrac{13}{4}x - \tfrac{29}{16} \;.$$

Vi finder, at

$$f\,'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \begin{cases} -1,4891 \\ 0,4057 \end{cases} .$$

Altså er $f\,'(x) > 0$ for $x > 1$, så $f(x)$ er voksende for $x > 1$. Desuden er $f(2) = 8{,}433 > 0$. Dermed er $f(x) > 0$ for $x > 1$. Altså er (5) opfyldt og dermed også (4), så at

$$\operatorname{int}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}\right) \geq \operatorname{int}\sqrt{16n+20} \;. \qquad (6)$$

Uligheden mellem aritmetisk og kvadratisk middeltal giver

$$\tfrac{1}{4}\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}\right) < \sqrt{\frac{\sqrt{n}^2 + \sqrt{n+1}^2 + \sqrt{n+2}^2 + \sqrt{n+3}^2}{4}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} < 4\sqrt{\frac{n+n+1+n+2+n+3}{4}} = \sqrt{16n+24} \;.$$

Vi har nu fundet, at

$$\sqrt{16n+20} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} < \sqrt{16n+24} \;.$$

Nu er ulige kvadrattal kongruente med 1 modulo 8 og lige kvadrattal er kongruente med 0 modulo 4. De ulige tal $16n + 21$ og $16n + 23$ kan ikke være kvadrattal, da de ikke er kongruente med 1 modulo 8 og det lige tal $16n + 22$ er ikke et kvadrattal, da det ikke er kongruent med 0 modulo 4.

Tallet $16n + 24 = 2^2 \cdot (4n + 6)$ er ikke et kvadrattal, da $4n + 6$ ikke er kongruent med 0 modulo 4.

Funktionen $g(x) = \sqrt{x}$ er stykkevis konstant og har spring i de punkter x, hvor x er et kvadrattal. Efter bemærkningerne oven for er derfor

$$\operatorname{int}\sqrt{16n+24} = \operatorname{int}\sqrt{16n+20} \;.$$

Efter (6) og (7) er dermed

$$\operatorname{int}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}\right) \leq \operatorname{int}\sqrt{16n+24} = \operatorname{int}\sqrt{16n+20} \;. \qquad (7)$$

Af (6) og (7) følger det ønskede.

3. metode.

For $0 < x < 1$ er

$$0 < 1 + x < 1 + x + \tfrac{1}{4}x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0 < \sqrt{1+x} < 1 + \tfrac{1}{2}x \qquad (8)$$

og

$$x^4 < 8x^3 \quad\Leftrightarrow\quad -\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{1}{64}x^4 < 0 \;,$$

hvoraf

$$0 < \left(1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2\right)^2 = 1 + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{64}x^4 + x - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{8}x^3$$

$$= -\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{1}{64}x^4 + 1 + x < 1 + x \;.$$

Heraf fås

$$0 < 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} \;. \qquad (9)$$

Vi får så

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right)^2 = n+n+1+n+2+n+3$$

$$+2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n(n+3)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{(n+2)(n+3)}\right)$$

$$=4n+6+2n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}\right). \quad (10)$$

Efter (8) gælder for $\frac{1}{n}<1$, $\frac{2}{n}<1$ og $\frac{3}{n}<1$, dvs. for $n>4$:

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{2n}\ ,\ \sqrt{1+\frac{2}{n}}<1+\frac{1}{n}\ ,\ \sqrt{1+\frac{3}{n}}<1+\frac{3}{2n}$$

og for $n>6$:

$$\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}<1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\quad ,\quad \sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}<1+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\quad ,$$

$$\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}<1+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)$$

Altså får vi af (10)

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right)^2<4n+6+n\cdot\left(12+\frac{18}{n}+\frac{11}{n^2}\right)$$

$$=16n+24+\frac{11}{n}<16n+25\ .$$

Den sidste ulighed er opfyldt for $n>11$.

Af (9) får vi

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}>1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}\quad ,\quad \sqrt{1+\frac{2}{n}}>1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\quad ,\quad \sqrt{1+\frac{3}{n}}>1+\frac{3}{2n}-\frac{9}{8n^2}\ ,$$

og for $n>6$:

$$\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}>1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^2=1+\frac{3}{2n}-\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{2n^4}-\frac{3}{2n^3}$$

og tilsvarende

$$\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}>1+\frac{2}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{9}{8n^4}-\frac{3}{n^3}\quad ,\quad \sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}>1+\frac{5}{2n}-\frac{1}{8n^2}-\frac{9}{2n^4}-\frac{15}{2n^3}\ .$$

Addition giver ved hjælp af (10):

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}\right)^2>4n+6+12n+18-\frac{5}{n}-\frac{24}{n^2}-\frac{49}{n^3}$$

$$=16n+24-\left(\frac{5}{n}+\frac{24}{n^2}+\frac{49}{4n^3}\right)>16n+23\ .$$

Sidste ulighedstegn er ensbetydende med

$$\frac{5}{n}+\frac{24}{n^2}+\frac{49}{4n^3}<1\quad\Leftrightarrow\quad 20n^2+96n+49<4n^3\quad\Leftrightarrow\quad 4n^3-20n^2-96n-49>0\ .$$

Denne ulighed er opfyldt for n $\geq$ 9.

Altså har vi for $n > 11$, at

$$\sqrt{16n+23} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3} < \sqrt{16n+25}. \tag{11}$$

Nu er kvadrattal kongruente med 0, 1, 4 eller 9 modulo 16, så

$$16n + 21 \equiv 5 \pmod{16} \quad , \quad 16n + 22 \equiv 6 \pmod{16} \quad ,$$

$$16n + 23 \equiv 7 \pmod{16} \quad , \quad 16n + 24 \equiv 8 \pmod{16} \quad .$$

Intet af tallene

$$16n + 21 \, , \, 16n + 22 \, , \, 16n + 23 \, , \, 16n + 24$$

er altså et kvadrattal.

Af (11) får vi derved for $n > 11$, at

$$\text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right) = \text{int}\sqrt{16n+20} \ .$$

At formlen gælder for $0 < n \leq 11$ kontrolleres ved indsættelse.

Bemærkning. Uligheden (4):

$$\sqrt{16n+20} \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}$$

kan vi vise på følgende alternative måde.

$$\sqrt{16n+20} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 16n+20 < \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 16n+20 < 4n+6+2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n(n+3)}\right)$$
$$+ \ 2\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{(n+2)(n+3)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 12n+14 < 2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n(n+3)}\right)$$
$$+ \ 2\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{(n+2)(n+3)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 6n+7 < \sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n(n+3)}$$
$$+ \ \sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{(n+2)(n+3)}$$

For $n \geq 1$ gælder

$$n(n+1)-\left(n+\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5n-4}{25} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n(n+1)} > n+\frac{2}{5}$$

$$n(n+2)-\left(n+\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{60n-49}{100} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n(n+2)} > n+\frac{7}{10}$$

$$n(n+3)-\left(n+\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{240n-9}{100} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n(n+3)} > n+\frac{3}{10}$$

$$(n+1)(n+2)-\left(n+\frac{7}{5}\right)^2=\frac{5n+1}{25}>0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{(n+1)(n+2)}>n+\frac{7}{5}$$

$$(n+1)(n+3)-\left(n+\frac{9}{5}\right)^2=\frac{10n-6}{25}>0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{(n+1)(n+3)}>n+\frac{9}{5}$$

$$(n+2)(n+3)-\left(n+\frac{12}{5}\right)^2=\frac{5n+6}{25}>0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{(n+2)(n+3)}>n+\frac{12}{5}\ .$$

Idet

$$n+\tfrac{2}{5}+n+\tfrac{7}{10}+n+\tfrac{3}{10}+n+\tfrac{7}{5}+n+\tfrac{9}{5}+n+\tfrac{12}{5}=6n+7$$

følger uligheden.

Bemærkning. Vi udvider opgaven ved at vise følgende sætning:

Sætning. For naturlige tal *n* gælder formlen

$$\operatorname{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}\right)=\operatorname{int}\sqrt{25n+49}\ .$$

Bevis. Vi viser først, at

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}<\sqrt{25n+50}\ .$$

Vi benytter uligheden $A < K$, hvor A er det aritmetiske middeltal og K det kvadratiske middeltal af de forskellige tal

$$\sqrt{n}\ ,\ \sqrt{n+1}\ ,\ \sqrt{n+2}\ ,\ \sqrt{n+3}\ ,\ \sqrt{n+4}.$$

Vi får

$$A=\tfrac{1}{5}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}\right)\ ,$$

$$K=\sqrt{\frac{\sqrt{n}^2+\sqrt{n+1}^2+\sqrt{n+2}^2+\sqrt{n+3}^2+\sqrt{n+4}^2}{5}}$$

$$=\sqrt{\frac{n+n+1+n+2+n+3+n+4}{5}}=\sqrt{\frac{5n+10}{5}}=\sqrt{n+2}\ .$$

Altså er

$$A<K \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}<5\sqrt{n+2}=\sqrt{25n+50}\ . \qquad (12)$$

Derefter viser vi, at der for $n \geq 11$ gælder

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}>\sqrt{25n+49}\ . \qquad (13)$$

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal giver

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}>5\sqrt[5]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+3}\cdot\sqrt{n+4}}\ .$$

For at vise (13) godtgør vi, at

$$5\sqrt[5]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+3}\cdot\sqrt{n+4}}\geq\sqrt{25n+49}\ .$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$5^{10}\cdot n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \geq (25n+49)^5$$

$$\Leftrightarrow \quad 1953125n^4 - 33359375n^3 - 247025000n^2 - 486225125n - 282475249 \geq 0\,. \qquad (14)$$

Vi påstår, at uligheden (14) gælder for alle hele tal n $\geq$ 24. Vi får nemlig

$$1953125n^4 - 33359375n^3 - 247025000n^2 - 486225125n - 282475249$$

$$> 1953125n^4 - 33359375n^3 - 247025000n^2 - 486225125n - 32884197000$$

$$= 125(n-24)(15625n^3 + 108125n^2 + 618800n + 10961399) \geq 0\,.$$

Altså gælder (13) for alle $n \geq 24$. For $11 \leq n \leq 23$ ses, at (14) gælder ved indsættelse.
Af (12) og (13) får for $n \geq 11$, at

$$\sqrt{25n+49} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4} < \sqrt{25n+50}\,. \qquad (15)$$

Dermed gælder for $n \geq 11$, at

$$\text{int}\sqrt{25n+49} \leq \text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}\right).$$

Hvis det for et helt tal $n \geq 11$ gælder, at

$$\text{int}\sqrt{25n+49} < \text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}\right),$$

må der findes et helt tal b, så

$$\sqrt{25n+49} < b < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}\,.$$

Sammen med (15) medfører dette, at

$$\sqrt{25n+49} < b < \sqrt{25n+50}$$

eller

$$25n+49 < b^2 < 25n+50\,,$$

hvilket er umuligt, da $25n + 49$ og $25n + 50$ er konsekutive hele tal. At formlen i sæt- ningen gælder for $1 \leq n \leq 11$ ses ved indsættelse.

Bemærkning. Jens-Søren Andersen, Esbjerg, og Walther Janous, Innsbruck, har sendt omfattende beregninger og litteratur med hensyn til generalisering af opgaven.
Det fremgår, at formlen

$$\text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\cdots+\sqrt{n+k-1}\right) = \text{int}\sqrt{k^2n+\frac{k^2(k-1)}{2}-1} \qquad (16)$$

ikke i almindelighed er sand, men at der kun er få undtagelser. For k = 2, 3, 4, 5 er formlen sand for alle naturlige tal n. For k = 6 fås

$$\text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}+\sqrt{n+5}\right) = \text{int}\sqrt{36n+89} \quad \text{for} \quad n \neq 1, 3$$

For k = 7 er

$$\text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\cdots+\sqrt{n+6}\right) = \text{int}\sqrt{49n+146} \;\; \text{for} \;\; n \neq 3$$

For k = 8 er

$$\text{int}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\cdots+\sqrt{n+7}\right) = \text{int}\sqrt{64n+223} \;\; \text{for} \;\; n \neq 8\,.$$

Bemærkning. Walther Janous nævner, at formlen (16) er sand for alle n over en given grænse N, der afhænger af k således:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	1	1	1	1	4	4	9	40	201	82

k	12	13	14	15	16	17	18
N	40	420	73	68	69	1306	789

Bemærkning. Der findes mange formler, der minder om opgavens. Vi nævner

$$\text{for } n \geq 1: \quad \operatorname{int}\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right)=\operatorname{int}\sqrt[3]{8n+3} \quad ,$$

$$\text{for } n \geq 1: \quad \operatorname{int}\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}\right)=\operatorname{int}\sqrt[3]{27n+26} \quad ,$$

$$\text{for } n \geq 3: \quad \operatorname{int}\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}\right)=\operatorname{int}\sqrt[3]{64n+95} \quad ,$$

$$\text{for } n \geq 2: \quad \operatorname{int}\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+4}\right)=\operatorname{int}\sqrt[3]{125n+249} \quad .$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Christian Hulvej
- Walther Janous
- Thyge Knudsen
- Hans Mortensen
- Jens Skak-Nielsen
- Asger Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Con Amore Problemgruppe