Svar på opgave 362 (September 2019)

Opgave:

Bestem alle hele løsninger (x,y) til ligningen

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y \; .$$

Besvarelse:

1. metode

Vi ganger med 4 og får omskrivningen

$$4x^2 + 4x = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 4x + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x + 1)^2 = (4y^4 + 4y^3 + y^2) + (3y^2 + 4y + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x + 1)^2 = (2y^2 + y)^2 + (y + 1)(3y + 1) \; . \qquad (1)$$

Desuden er

$$4x^2 + 4x + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x + 1)^2 = (4y^4 + y^2 + 4 + 4y^3 + 8y^2 + 4y) - 5y^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 2)^2 - (5y^2 + 3) \; . \qquad (2)$$

Af (1) og (2) fås

$$(2y^2 + y)^2 + (y + 1)(3y + 1) = (2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 2)^2 - (5y^2 + 3) \; . \qquad (3)$$

Vi deler op i to tilfælde.

I. $y = -1$. Af (3) fås

$$1 = (2x + 1)^2$$

så $x = 0$ eller $x = -1$. Altså har vi fundet, at $(x,y) = (0,-1)$ eller $(x,y) = (-1,-1)$.

II. $y \neq -1$. Da y er hel, er $(y + 1)(3y + 1) > 0$ fordi denne ulighed for *reelle* tal er ens- betydende med $y < -1 \vee y > -\frac{1}{3}$. Uligheden er derfor opfyldt for alle hele tal, der ikke er -1.

Desuden er $5y^2 + 3 > 0$, så vi efter (3) får

$$(2y^2 + y)^2 < (2x + 1)^2 < (2y^2 + y + 2)^2 \; .$$

Der findes kun ét kvadrattal mellem $(2y^2 + y)^2$ og $(2y^2 + y + 2)^2$, og det er $(2y^2 + y + 1)^2$. Dermed er

$$(2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 1)^2 \; . \qquad (4)$$

Af (2) og (4) får vi

$$4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2x + 1)^2 = (2y^2 + y + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 4y^4 + y^2 + 1 + 4y^3 + 4y^2 + 2y$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \;\vee\; y = 2.$$

Hvis y = 0 giver den oprindelige ligning, at $x^2 + x = 0$, så $x = 0 \vee x = -1$. Dermed har vi fundet $(x,y) = (0,0)$ og $(x,y) = (-1,0)$.

Hvis y = 2 giver den oprindelige ligning, at

$$x^2 + x = 16 + 8 + 4 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x = -6 \; .$$

Dermed er $(x,y) = (5,2)$ eller $(x,y) = (-6,2)$.

I alt har vi fundet 6 talsæt (x,y) og ved indsættelse i ligningen konstateres, at de alle er løsninger.

2. metode

Vi har, at

$$y^4 + y^3 + y^2 + y = y(y+1)(y^2+1) \; .$$

For y = 0 og y = -1 får vi ligningen

$$x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = -1 \, .$$

For y = 1 er

$$x^2 + x = 4 \, ,$$

som ikke har hele løsninger.

For y = 2 er

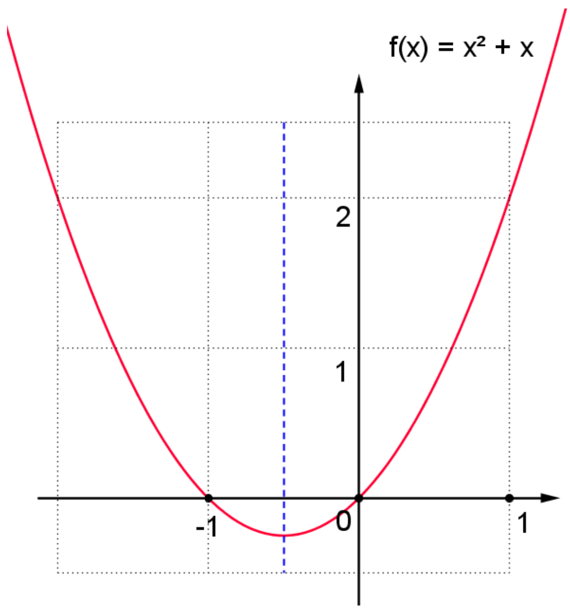
$$x^2 + x = 16 + 8 + 4 + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x = -6 \, .$$

Vi har dermed fundet løsningerne

$$(x,y) \;:\; (0,0)\,,\,(-1,0)\,,\,(0,-1)\,,$$

$$(-1,-1)\,,\,(5,2)\,,\,(-6,2) \; .$$



Lad nu $y < -1$ eller $y > 2$. Funktionen $f(x) = x^2 + x$ har en graf, der er symmetrisk om linjen $x = -\frac{1}{2}$ og voksende i $\left[-\frac{1}{2};\infty\right[$. Derfor findes højst én ikke-negativ løsning til ligningen

$$f(x) = y^4 + y^3 + y^2 + y \, . \qquad (5)$$

Vi får, at

$$f\left(y^2 + \tfrac{1}{2}y\right) = \left(y^2 + \tfrac{1}{2}y\right)^2 + \left(y^2 + \tfrac{1}{2}y\right)$$
$$= y^4 + y^3 + y^2 + y + \tfrac{1}{4}y(y-2) > y^4 + y^3 + y^2 + y$$

og

$$f\left(y^2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}\right) = \left(y^2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y^2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}\right)$$
$$= y^4 + y^3 + y^2 + y - \tfrac{1}{4}\left(3y^2 + 4y + 1\right) < y^4 + y^3 + y^2 + y \, ,$$

idet

$$\tfrac{1}{4}y(y-2) > 0 \quad \text{og} \quad 3y^2 + 4y + 1 > 0$$

Når $y < -1$ eller $y > 2$. En eventuel ikke-negativ løsning ligger altså i intervallet $\left]y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}; y^2 + \frac{1}{2}y\right[$. Imidlertid ligger der ikke noget helt tal i dette interval, der opfylder (5).

På grund af grafens symmetri om linjen $x = -\frac{1}{2}$ findes der intet helt tal, der opfylder (5). Dermed er ovenstående 6 løsninger de eneste.

Bemærkning. Man kan generalisere og spørge, om ligninger af typen

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = y^k + y^{k-1} + \cdots + y$$

for 'tilpas små' hele værdier af n og k har løsninger.

Opgave 208 (marts 2004) lignede denne type, idet man skulle bestemme hele løsninger (x,y) til ligningen

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Walther Janous
- Thyge Knudsen
- Asger Olesen
- Palle Bak Petersen
- Jens Skak-Nielsen
- Con Amore Problemgruppe