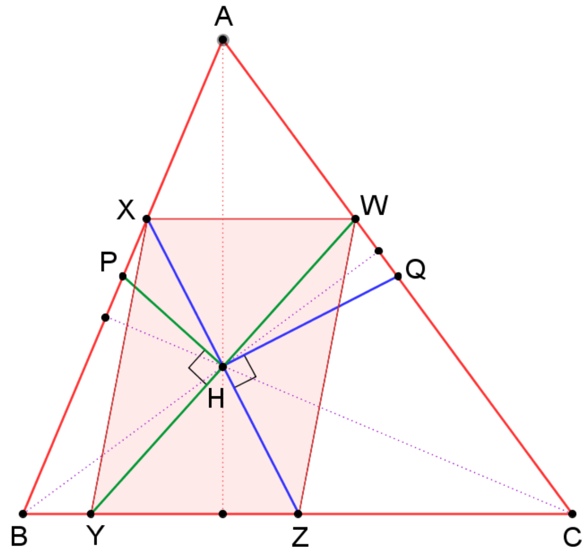
Svar på opgave 363 (Oktober 2019)

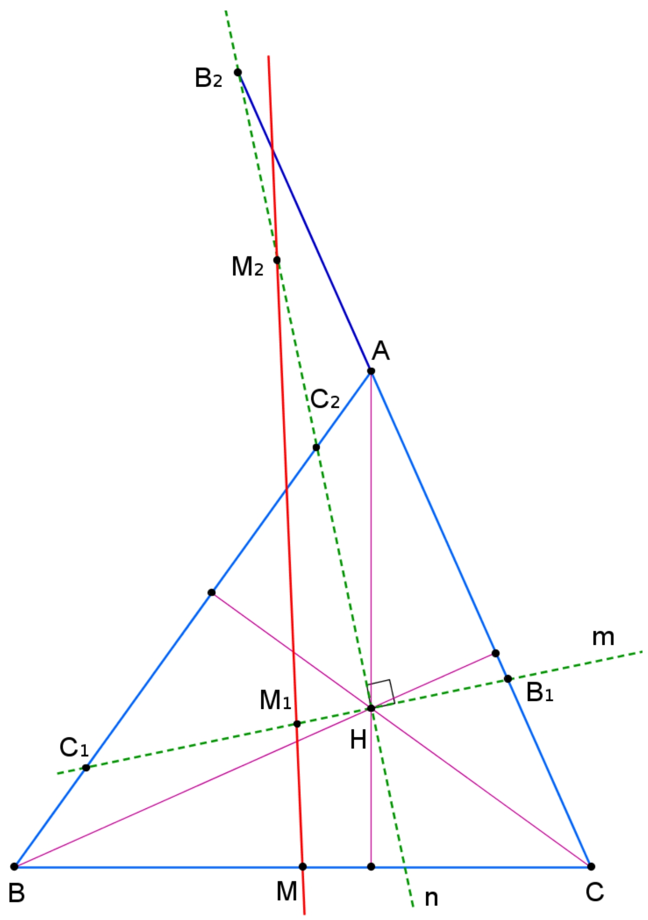
Opgave:

a. I ΔABC er H højdernes skæringspunkt og P og Q er midtpunkter af siderne AB og AC. En linje gennem H vinkelret på HQ skærer AB og BC i X og Z. En linje gennem H vinkelret på HP skærer AC og BC i W og Y.
Vis, at $\square XWZY$ er et parallelogram.



b. To ortogonale linjer m og n går gennem højdernes skæringspunkt H i ΔABC. Linjen m skærer AC og AB i B_1 og C_1, linjen n skærer AC og AB i B_2 og C_2. Lad M_1, M_2 og M være midtpunkter af B_1C_1, B_2C_2 og BC.
Vis, at M_1, M_2 og M ligger på linje.

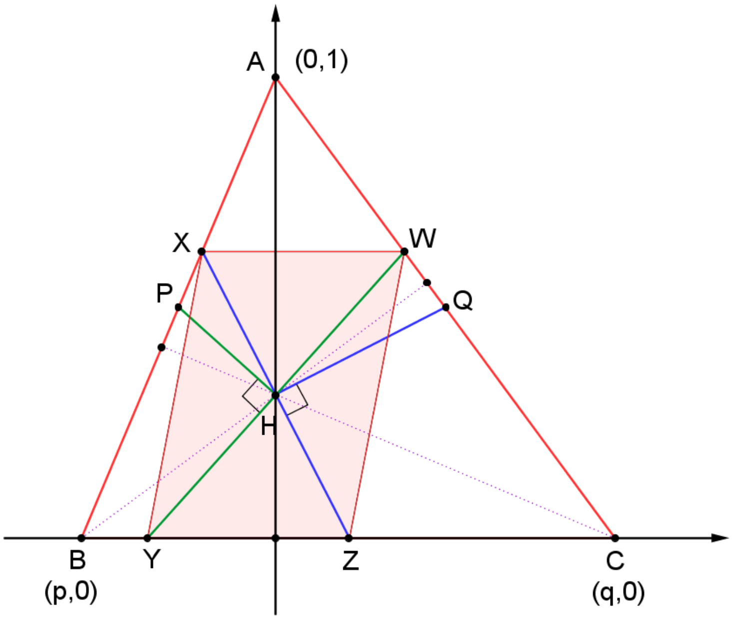
(figur: se side 2)



Besvarelse:

a.

1. metode.
Vi benytter analytisk geometri og gennemfører neden for de lidt kedsommelige regninger.



Vi lægger x-aksen gennem B og C og y-aksen gennem H. Vi kan betegne koordinaterne således:

$$A\ (0,1)\ \ ,\ B\ (p,0)\ \ ,\ C\ (q,0)\ .$$

Hældningen for AC er $\frac{-1}{q}$, så AC har ligningen

$$AC\ :\ \ y = \tfrac{-1}{q}x + 1\ .$$

Højden fra B har hældningen q, så den får ligningen

$$y = q(x - p)\ .$$

Derfor fås koordinaterne til H ved at sætte $x = 0$:

$$H\ \ (0\ ,\ -pq)\ .$$

Da Q har koordinaterne

$$Q\ \ \left(\tfrac{1}{2}q, \tfrac{1}{2}\right)\ ,$$

har HQ hældningen

$$\frac{\frac{1}{2} + pq}{\frac{1}{2}q} = \frac{1 + 2pq}{q} \tag{1}$$

og ligningen

$$HQ\ :\ \ y = \frac{1 + 2pq}{q}x - pq\ .$$

Linjen XZ, som er vinkelret på HQ, har hældningen

$$\frac{-q}{1 + 2pq}$$

og ligningen

$$XZ\ :\ \ y = \frac{-q}{1 + 2pq}x - pq\ .$$

Koordinaterne til Z fås ved at sætte $y = 0$:

$$0 = \frac{-q}{1 + 2pq}x - pq \quad \Leftrightarrow \quad x = -p(1 + 2pq)\ ,$$

så vi får

$$Z \quad (-p(1+2pq)\,,\,0)$$

Linjen AB har ligningen

$$AB\ :\ \ y = \tfrac{-1}{p}x + 1\ ,$$

og koordinaterne til X fås ved at løse ligningssystemet

$$AB\ :\ \ y = \tfrac{-1}{p}x + 1 \quad , \quad XZ\ :\ \ y = \frac{-q}{1+2pq}x - pq\ .$$

Dette giver efter elementære regninger:

$$X \quad (p(1+2pq)\,,\,-2pq)\ .$$

Derefter bestemmes koordinaterne til Y og W. Koordinaterne til P er

$$P\ \left(\tfrac{1}{2}p, \tfrac{1}{2}\right)\ ,$$

så HP har hældningen

$$\frac{-pq - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}p} = \frac{2pq+1}{p}\ . \tag{2}$$

Af (1) og (2) ser vi, at p og q er ombyttede. Dermed får Y koordinaterne

$$Y\ \ (-q(1+2pq)\,,\,0)\ , \tag{3}$$

og W får koordinaterne

$$W\ \ (q(1+2pq)\,,\,2pq)\ \ . \tag{4}$$

Midtpunktet af XZ har koordinaterne

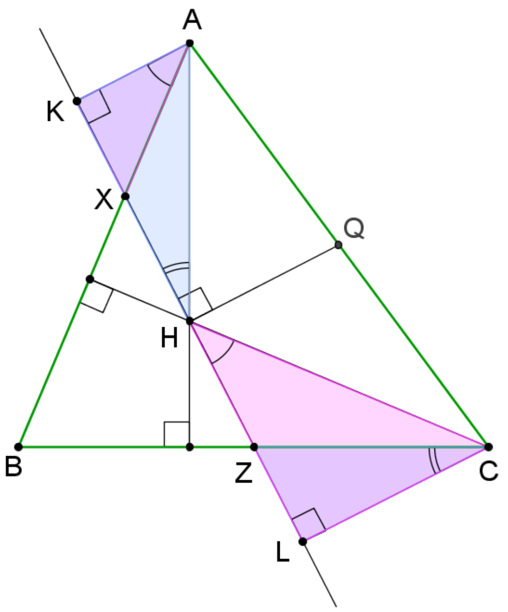
$$\left(\tfrac{1}{2}(-p(1+2pq)+p(1+2pq)), \tfrac{1}{2}(0-2pq)\right) = (0, -pq)\ ,$$

dvs. midtpunktet af XZ er netop H. Tilsvarende ser vi af (3) og (4), at midtpunktet af WY også er H. I $\square XWZY$ skærer diagonalerne altså hinanden i deres fælles midtpunkt og der- med er firkanten et parallelogram.

2. metode.
Vi angiver derefter en euklidisk løsning, der skyldes Thyge Knudsen.
Det er nok at vise, at H er midtpunkt af XZ. Der gælder så tilsvarende, at H er midtpunkt af YW.
Lad K og L være projektionerne af A og C på XZ. Så er $\angle KAX = \angle LHC$, fordi de har ortogonale vinkelben. Altså er ΔKAX og ΔLHC ensvinklede, så

$$\frac{KX}{KA} = \frac{LC}{LH} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{KH - XH}{KA} = \frac{LC}{LH}$$

$$XH = KH - \frac{KA \cdot LC}{LH}\ . \tag{5}$$



Videre er $\angle KHA = \angle LCZ$, fordi deres ben er ortogonale. Altså er ΔKHA og ΔLCZ ensvinklede, så

$$\frac{KA}{KH} = \frac{LZ}{LC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{KA}{KH} = \frac{LH - ZH}{LC} \quad \Leftrightarrow \quad ZH = LH - \frac{KA \cdot LC}{KH} \ . \qquad (6)$$

Da Q er midtpunkt af AC, er H midtpunkt af KL, så $KH = LH$ og af (5) og (6) får vi så, at $XH = ZH$, hvilket er det ønskede.

b.

1. metode.
Vi lader m og n være akserne i et koordinatsystem med begyndelsespunkt H.
Vi betegner koordinaterne således:

$$B_1\,(2b,0) \ , \ C_1\,(2c,0) \ , \ B_2\,(0,2p) \ , \ C_2\,(0,2q) \ .$$

Så finder vi koordinaterne

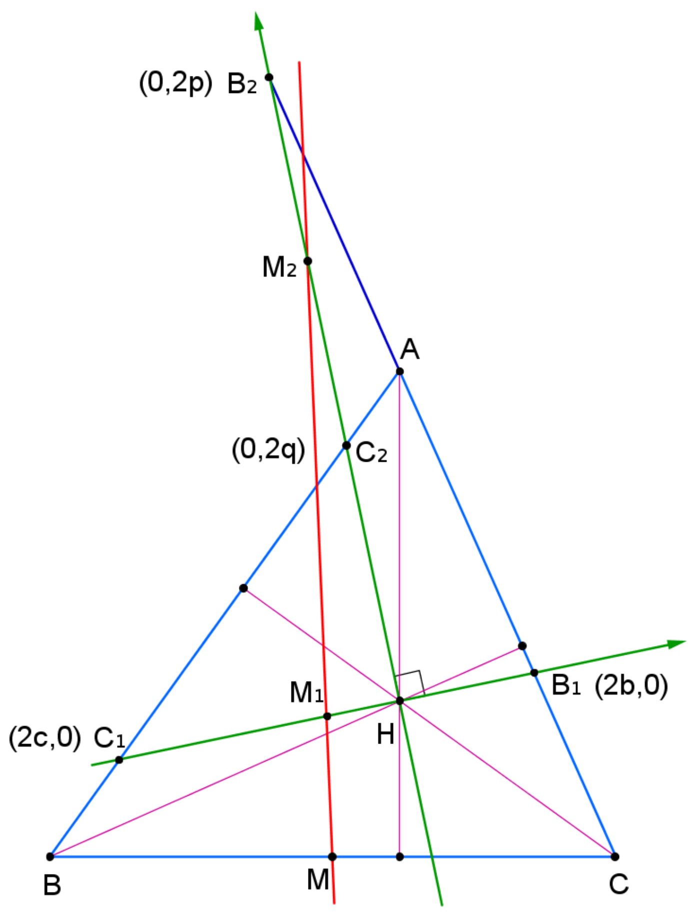
$$M_1\,(b+c\,,0) \ , \ M_2\,(0\,,p+q) \ .$$

Linjen M_1M_2 har hældningen

$$-\frac{p+q}{b+c}$$

og ligningen

$$y = -\frac{p+q}{b+c}x + p + q \ . \qquad (1)$$



Linjen AB (eller C_1C_2) har hældningen

$$\frac{2q}{-2c} = -\frac{q}{c}$$

og ligningen

$$y = -\tfrac{q}{c}x + 2q \ .$$

Linjen AC (eller B_1B_2) har hældningen

$$\frac{2p}{-2b} = -\frac{p}{b} \ ,$$

så højden BH fra B får hældningen $\frac{b}{p}$ og ligningen

$$y = \tfrac{b}{p}x \ .$$

Linjerne AB og BH skærer hinanden i B, så koordinaterne til B fås ved løsning af ligningssystemet

$$y = -\tfrac{q}{c}x + 2q \quad , \quad y = \tfrac{b}{p}x \ .$$

Man får ved træls algebra, at B har koordinaterne

$$B\left(\frac{2pqc}{bc+pq}, \frac{2bcq}{bc+pq}\right) \ .$$

På samme måde får C koordinaterne

$$\mathrm{C}\left(\frac{2bpq}{bc+pq}, \frac{2bcp}{bc+pq}\right) \ .$$

Dermed er koordinaterne til midtpunktet M af BC

$$M\left(\frac{pq(b+c)}{bc+pq}, \frac{bc(p+q)}{bc+pq}\right) \ .$$

Vi kontrollerer, at dette koordinatsæt passer i ligningen (1) for M_1M_2:

$$-\frac{p+q}{b+c}x + p + q = -\frac{p+q}{b+c}\cdot\frac{pq(b+c)}{bc+pq} + p + q = -\frac{pq(p+q)}{bc+pq} + p + q$$
$$= -\frac{pq(p+q) - (p+q)(bc+pq)}{bc+pq} = -\frac{(p+q)(pq-bc-pq)}{bc+pq} = \frac{bc(p+q)}{bc+pq} = y \ .$$

Dermed er det ønskede vist.

2. metode.
Vi angiver en euklidisk-trigonometrisk løsning fra Jan Erik Pedersen, Aakirkeby.

Projektionerne af B og C på B_2C_2 er R og S. En linje gennem M_1 vinkelret på B_1C_1 skærer en linje gennem M parallel med BR i T. Højderne fra C og B har fodpunkterne P og Q på AB og AC. Vi sætter

$$HC_1 = p \ , \ HM_1 = q \ , \ HC_2 = s \ , HM_2 = t \ ,$$

så at

$$C_1M_1 = HC_1 - HM_1 = p - q \;,\; C_2M_2 = HM_2 - HC_2 = t - s \;,$$

$$HB_1 = M_1B_1 - HM_1 = M_1C_1 - HM_1 = p - q - q = p - 2q \;,$$

$$HB_2 = HC_2 + CM_2 + M_2B_2 = s + (t - s) + (t - s) = 2t - s \;.$$

Desuden sætter vi

$$u = \angle BC_2H \quad , \quad v = \angle C_2B_2A \quad , \quad w = \angle M_1M_2H \;.$$

I ΔC_2HC_1 og ΔB_2HB_1 fås, at

$$\angle HC_1C_2 = 90° - u \quad \text{og} \quad \angle HB_1B_2 = 90° - v \;,$$

og i ΔHQB_1 fås

$$\angle B_1HQ = v = \angle BHC_1 \;.$$

I ΔBHC_2 er

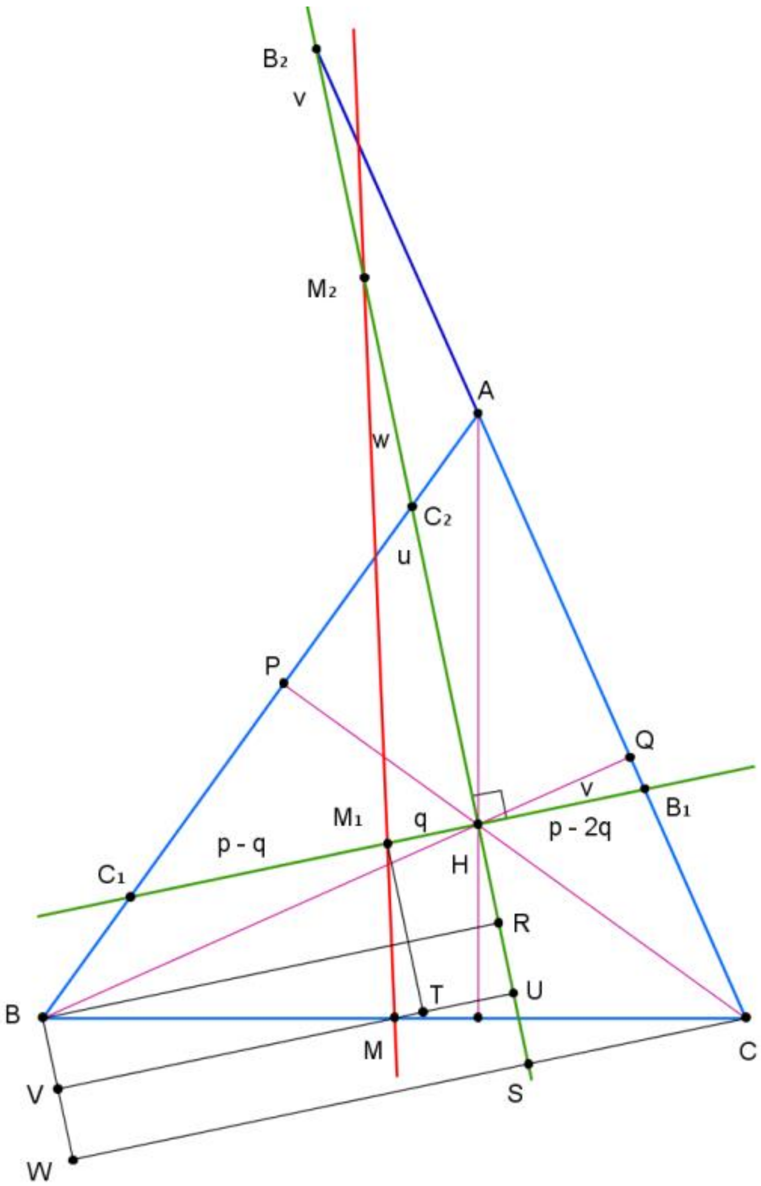
$$\angle HBC_2 = 180° - \angle HC_2B - \angle BHC_2 = 180° - u - (\angle BHC_1 + \angle C_1HC_2)$$
$$= 180° - u - (v + 90°) = 90° - (u + v) \;.$$

I ΔCPA og ΔBQA er

$$\angle PCA = 90° - A \quad \text{og} \quad \angle HBC_2 = \angle QBA = 90° - A \;,$$

så

$$\angle PCA = 90° - (u + v) \;.$$



I ΔHC_1C_2 og ΔHB_1B_2 er

$$\tan u = \frac{HC_1}{HC_2} = \frac{p}{s} \quad \text{og} \quad \tan v = \frac{HB_1}{HB_2} = \frac{p-2q}{2t-s} \ .$$

I ΔHPC_2 er

$$PH = s \cdot \sin u \ ,$$

og i ΔBPH er

$$\sin \angle HBP = \sin \angle HBC_2 = \sin(90^\circ - (u+v)) = \frac{PH}{BH} \ ,$$

hvoraf

$$BH = \frac{PH}{\cos(u+v)} = \frac{s \cdot \sin u}{\cos(u+v)} \ . \qquad (1)$$

I ΔQHB_2 fås

$$\sin v = \frac{QH}{HB_2} \quad \Leftrightarrow \quad QH = (2t - s) \cdot \sin v \ .$$

I ΔHCQ er

$$\sin \angle HCQ = \frac{HQ}{HC} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(90° - (u+v)) = \frac{HQ}{HC}$$

$$\Leftrightarrow \quad HC = \frac{HQ}{\cos(u+v)} = \frac{(2t-s) \cdot \sin v}{\cos(u+v)} \ . \qquad (2)$$

Idet $BR \parallel HC_1$ er

$$v = \angle BHC_1 = \angle HBR \ ,$$

så vi i ΔBHR får

$$\sin \angle HBR = \frac{HR}{BH} \quad \Leftrightarrow \quad HR = BH \cdot \sin v \ ,$$

og heri indsættes (1):

$$HR = \frac{s \cdot \sin u \cdot \sin v}{\cos(u+v)} \ . \qquad (3)$$

I ΔBHR er desuden

$$BR = BH \cdot \cos v = \frac{s \cdot \sin u \cdot \cos v}{\cos(u+v)} \ . \qquad (4)$$

De retvinklede trekanter C_2HP og CHS er ensvinklede, så

$$\angle HCS = \angle HC_2P = u \ ,$$

og i ΔCHS er efter (2)

$$\sin u = \frac{HS}{CH} \quad \Leftrightarrow \quad HS = CH \cdot \sin u = \frac{(2t-s) \cdot \sin v \cdot \sin u}{\cos(u+v)} \ . \qquad (5)$$

Videre får vi i ΔCHS efter (2)

$$\cos u = \frac{CS}{CH} \quad \Leftrightarrow \quad CS = CH \cdot \cos u = \frac{(2t-s) \cdot \sin v \cdot \cos u}{\cos(u+v)} \ . \qquad (6)$$

Lad U være projektionen af M på RS. Projektionen af B på forlængelsen af CS ud over S er W og projektionen af B på forlængelsen af UM ud over M er V. Da M er midtpunkt af BC, er U midtpunkt af RS og V midtpunkt af BW. Så er

$$CS + MU = VM \quad \Leftrightarrow \quad CS + MU = BR - MU \quad \Leftrightarrow \quad MU = \tfrac{1}{2}(BR - CS) \ .$$

Vi ser, at

$$MU = MT + TU = MT + M_1H = MT + q \ ,$$

og af (4) og (6) fås så

$$MT + q = \frac{1}{2}\left(\frac{s \cdot \sin u \cdot \cos v}{\cos(u+v)} - \frac{(2t-s) \cdot \sin v \cdot \cos u}{\cos(u+v)} \right) . \qquad (7)$$

Videre er

$$TM_1 = HU = HR + RU = HR + \tfrac{1}{2} RS = \tfrac{1}{2} HR + \tfrac{1}{2} HR + \tfrac{1}{2} RS = \tfrac{1}{2}(HR + HS) \ ,$$

og af (3) og (5) fås

$$TM_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{s \cdot \sin u \cdot \sin v}{\cos(u+v)} + \frac{(2t-s) \cdot \sin v \cdot \sin u}{\cos(u+v)} \right) = \frac{t \cdot \sin v \cdot \sin u}{\cos(u+v)} \ .$$

I ΔM_2M_1H er

$$\tan w = \frac{M_1H}{HM_2} = \frac{q}{t} \ .$$

Hvis M ligger på linjen M_1M_2, er $M_1T \parallel M_2H$, så $w = \angle MM_1T$. I ΔMM_1T er så

$$\tan w = \frac{MT}{TM_1} \ ,$$

hvoraf

$$\frac{q}{t} = \frac{MT}{TM_1} \quad \Leftrightarrow \quad MT = \frac{q}{t} \cdot TM_1 = \frac{q \cdot \sin v \cdot \sin u}{\cos(u+v)} \ .$$

Altså er

$$MT + q = \frac{q \cdot \sin v \cdot \sin u}{\cos(u+v)} = \frac{q \cdot \sin v \cdot \sin u + q \cdot \cos(u+v)}{\cos(u+v)}$$

$$= \frac{q \cdot \sin v \cdot \sin u + q(\cos v \cdot \cos u - \sin v \cdot \sin u)}{\cos(u+v)} = \frac{q \cdot \cos v \cdot \cos u}{\cos(u+v)} \ .$$

Efter (7) ligger M på linjen M_1M_2 hvis

$$\frac{1}{2}\left(\frac{s \cdot \sin u \cdot \cos v}{\cos(u+v)} - \frac{(2t-s) \cdot \sin v \cdot \cos u}{\cos(u+v)} \right) = \frac{q \cdot \cos v \cdot \cos u}{\cos(u+v)}$$

eller hvis

$$s \cdot \sin u \cdot \cos v - (2t - s) \cdot \sin v \cdot \cos u = 2q \cdot \cos v \cdot \cos u$$

eller ved division med $\cos v \cdot \cos u$ hvis

$$s \cdot \tan u - (2t - s) \cdot \tan v = 2q. \qquad (8)$$

Formlerne for $\tan u$ og $\tan v$ indsættes, så (8) er ensbetydende med

$$s \cdot \frac{p}{s} - (2t-s) \cdot \frac{p-2q}{2t-s} = 2q \quad \Leftrightarrow \quad p - (p - 2q) = 2q \ ,$$

hvilket er opfyldt. Dermed er beviset ført.

3. metode.
Vi angiver en løsning fra Thyge Knudsen. Vi viser, at

$$k = \frac{BC_2}{BC_1} = \frac{CB_2}{CB_1} \ .$$

og derefter, at $\overrightarrow{MM_2} = k \cdot \overrightarrow{MM_1}$.

Lad N, K og L være fodpunkter af højderne fra A, B og C. Vi sætter $u = \angle AHC_2$. I ΔLHB og ΔABK er

$$\angle LHB = 90° - \angle LBH = 90° - \angle LBK = A \ .$$

I ΔLHC_2 og ΔLHA er

$$\angle LHC_2 = \angle LHA - u = 90° - \angle LAH - u = 90° - \angle BAN = B - u \ .$$

I ΔLC_1H er

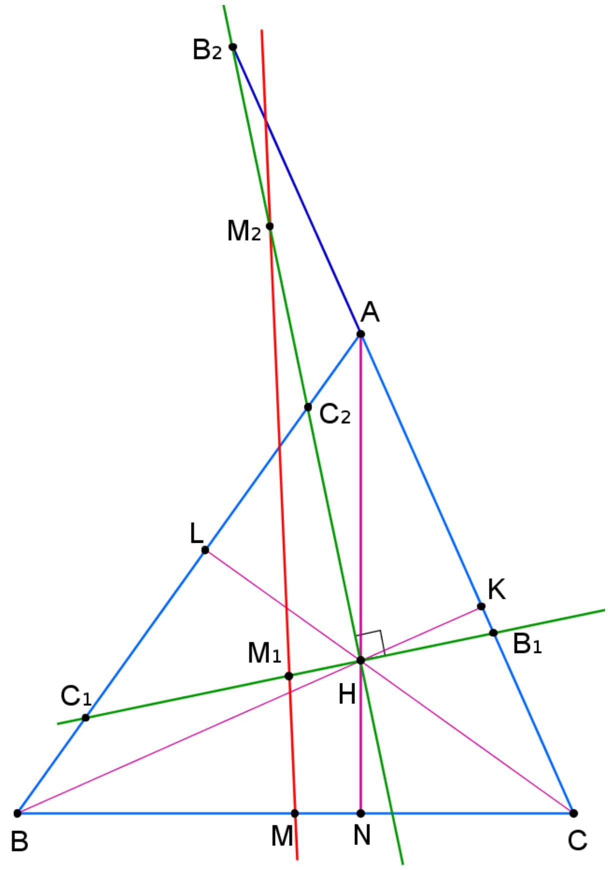
$$\angle LC_1H = 90° - \angle LHC_1 = 90° - \left(90° - \angle LHC_2\right) = B - u \ .$$

I ΔBLH og ΔHLC_2 er

$$BL = HL \cdot \tan \angle LHB = HL \cdot \tan A \quad \text{og} \quad LC_2 = HL \cdot \tan \angle LHC_2 = HL \cdot \tan(B - u)$$

I ΔLC_1H er

$$HL = LC_1 \cdot \tan \angle LC_1H = LC_1 \cdot \tan(B - u) \ .$$



Så har vi

$$\frac{BC_2}{BC_1} = \frac{BL + LC_2}{BL - LC_1} = \frac{HL \cdot \tan A + HL \cdot \tan(B-u)}{HL \cdot \tan A - \frac{HL}{\tan(B-u)}} = \frac{\tan A \cdot \tan(B-u) + \tan^2(B-u)}{\tan A \cdot \tan(B-u) - 1}$$

$$= -\tan(B-u) \cdot \frac{\tan A + \tan(B-u)}{1 - \tan A \cdot \tan(B-u)} = -\tan(B-u) \cdot \tan(A + B - u)$$

$$= -\tan(B - u) \cdot \tan(180° - C - u) = \tan(B - u) \cdot \tan(C + u) \ . \quad (1)$$

I ΔKHC er

$$\angle KHC = \angle LHB = A \ ,$$

og i ΔKHA og ΔANC er

$$\angle KHB_2 = \angle KHC_2 = \angle KHA + \angle AHC_2 = \angle KHA + u$$

$$= 90° - \angle KAH + u = 90° - \angle CAN + u = C + u\ .$$

Endelig er

$$\angle KB_1H = \angle KHB_2 = C + u\ ,$$

fordi $\angle KB_1H$ og $\angle KHB_2$ har ortogonale vinkelben.

Derefter gælder i ΔKHC og ΔKHB_2 at

$$CK = HK \cdot \tan \angle KHC = HK \cdot \tan A \quad \text{og} \quad KB_2 = HK \cdot \tan \angle KHB_2 = HK \cdot \tan(C+u)\ .$$

I ΔHKB_1 er

$$HK = KB_1 \cdot \tan \angle KB_1H = KB_1 \cdot \tan(C+u)\ .$$

Så får vi

$$\frac{CB_2}{CB_1} = \frac{CK + KB_2}{CK - KB_1} = \frac{HK \cdot \tan A + HK \cdot \tan(C+u)}{HK \cdot \tan A - \frac{HK}{\tan(C+u)}} = \frac{\tan A \cdot \tan(C+u) + \tan^2(C+u)}{\tan A \cdot \tan(C+u) - 1}$$

$$= -\tan(C+u) \cdot \frac{\tan A + \tan(C+u)}{1 - \tan A \cdot \tan(C+u)} = -\tan(C+u) \cdot \tan(A+C+u)$$

$$= -\tan(C+u) \cdot \tan(180° - B + u) = \tan(C+u) \cdot \tan(B-u). \qquad (2)$$

Af (1) og (2) følger det ønskede.

Da $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{o}$ er derefter

$$\overrightarrow{MM_2} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MB_2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC_2} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB_2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{MC} + k\overrightarrow{CB_1}\right) = \tfrac{1}{2}k\left(\overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CB_1}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}k\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB_1}\right) = \tfrac{1}{2}k\left(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MB_1}\right) = k\overrightarrow{MM_1}\ .$$

4. metode.

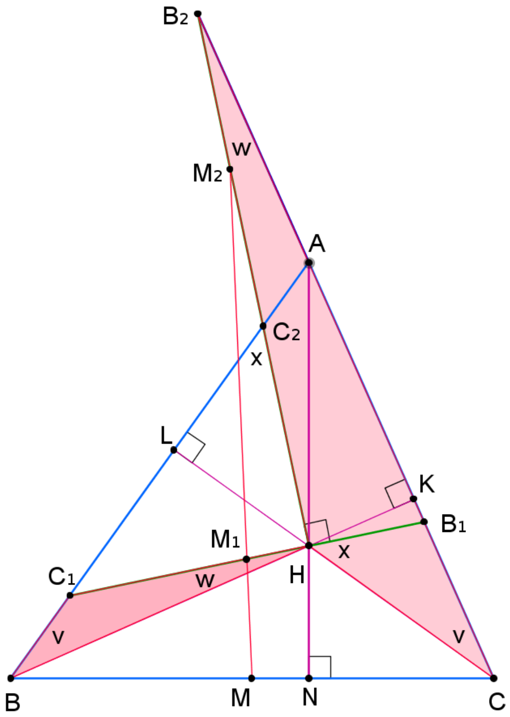
Thyge Knudsen har desuden sendt følgende simple euklidiske løsning.

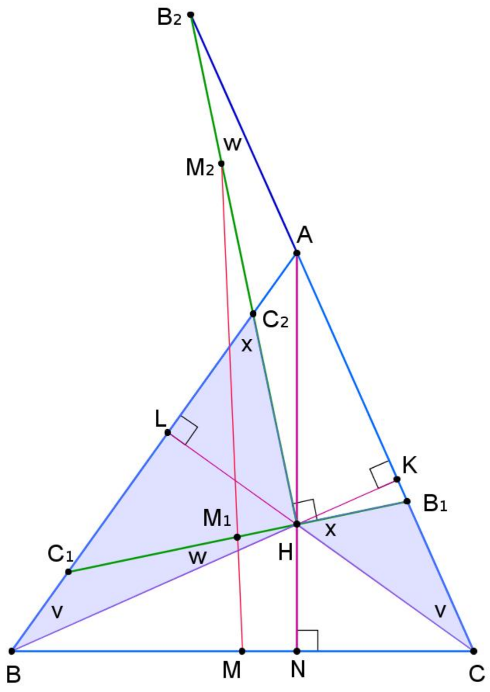
Vi har, at ΔNBC_1 og ΔB_2CH er ensvinklede, fordi

$$\angle BHC_1 = \angle HB_2C \quad \text{og} \quad \angle C_1BH = \angle HCB_2\ ,$$

idet vinkelbenene er parvis ortogonale. Derfor er

$$\frac{CB_2}{BH} = \frac{CH}{BC_1} = k_1\ .$$





På samme måde er ΔHBC_2 og ΔB_1CH ensvinklede, så

$$\frac{BC_2}{CH} = \frac{BH}{CB_1} = k_2 \,.$$

Vi får så

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{CB_2}{BH} \cdot \frac{BH}{CB_1} = \frac{CB_2}{CB_1} \quad \text{og} \quad k_1 \cdot k_2 = \frac{CH}{BC_1} \cdot \frac{BC_2}{CH} = \frac{BC_2}{BC_1} \,.$$

Dermed er

$$\frac{BC_2}{BC_1} = \frac{CB_2}{CB_1} \,.$$

Resten af beviset foregår som under *3. metode*.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Walther Janous
- Thyge Knudsen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen
- Jens Skak-Nielsen