Svar på opgave 365 (December 2019)

Opgave:

a. Find inden for de positive hele tal samtlige løsninger (x,y) til ligningen

$$y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 .$$

b. Lad a, b og c være reelle tal. Løs ligningen

$$\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2-(b-c)^2}+\frac{(x-b)^2}{(x-b)^2-(c-a)^2}+\frac{(x-c)^2}{(x-c)^2-(a-b)^2}=1 .$$

Besvarelse:

a.

1. metode.

For alle x gælder, at hvis (x,y) er en løsning, er

$$y^3 - (x+1)^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 5x^2 - 9x + 7 > 0 .$$

Altså er

$$y^3 > (x+1)^3 \quad \Leftrightarrow \quad y > x + 1 .$$

Desuden gælder for alle positive x, at hvis (x,y) er en løsning, er

$$(x+3)^3 - y^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - (x^3 + 8x^2 - 6x + 8) = x^2 + 33x + 19 > 0 ,$$

hvoraf

$$y < x + 3 .$$

Altså slutter vi, at $y = x + 2$. Så får vi

$$0 = y^3 - (x+2)^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 - (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) = 2x^2 - 18x .$$

Dermed er $x = 0$ eller $x = 9$, hvilket giver $y = 2$ eller $y = 11$. Løsningerne denne ligning er dermed (x,y) = (0,2) og (x,y) = (9,11). Da x og y er positive, er kun (x,y) = (9,11) løs- ning til den oprindelige ligning.

2. metode.

Vi ser, at ligningen ikke har løsninger for $0 < x \leq 2$ eller $0 < y \leq 2$. Sætter vi

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 6x + 8$$

er $f(x) > 0$ og $f(x)$ er voksende for $x \geq 3$. Idet $8x^2 - 6x + 8 > 0$ for alle x, er $y^3 - x^3 > 0$, dvs. $y > x$. Nu er

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2) > (y-x)(x^2 + x \cdot x + x^2) = (y-x) \cdot 3x^2 .$$

Dermed er

$$0 < y - x < \frac{y^3 - x^3}{3x^2} = \frac{8x^2 - 6x + 8}{3x^2} < \frac{8}{3} \ ,$$

idet den sidste ulighed er ensbetydende med $6x - 8 > 0$, hvilket er sandt for $x \geq 3$.
Da x og y er hele tal er så

$$0 < y - x \leq 2 \ ,$$

dvs. $y = x + 1$ eller $y = x + 2$. Indsættes $y = x + 1$ fås

$$(x + 1)^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 - 9x + 7 = 0 \ ,$$

som ikke har løsninger. For $y = x + 2$ fås

$$(x + 2)^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(x - 9) = 0 \ .$$

Dermed har vi løsningerne $(x,y) = (0,2)$ og $(x,y) = (9,11)$. Kun den sidste opfylder kra- vene i opgaveteksten.

b.

I. Hvis a, b og c er ens, dvs. $a = b = c = k$, får ligningen udseendet

$$\frac{(x-k)^2}{(x-k)^2} + \frac{(x-k)^2}{(x-k)^2} + \frac{(x-k)^2}{(x-k)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 1 \ ,$$

som ikke har nogen løsninger.

II. Hvis netop to af tallene a, b og c er ens, kan vi af symmetrigrunde antage, at $a = b = k$ og $c \neq k$. Ligningen får udseendet

$$\frac{(x-k)^2}{(x-k)^2 - (k-c)^2} + \frac{(x-k)^2}{(x-k)^2 - (c-k)^2} + \frac{(x-c)^2}{(x-c)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2(x-k)^2}{(x-k)^2 - (k-c)^2} + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2(x-k)^2}{(x-k)^2 - (k-c)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = a\,(= b) \ .$$

Hvis $b = c = k$ og $a \neq k$ fås den ene løsning $x = b$ $(= c)$ og hvis $a = c = k$ og $b \neq k$, får vi den ene løsning $x = a$ $(= c)$.

III. Hvis ikke to af tallene a, b og c er ens, kan ligningen omformes til

$$\frac{(x-a)^2}{(x-a-b+c)(x-a+b-c)} + \frac{(x-b)^2}{(x-b-c+a)(x-b+c-a)} + \frac{(x-c)^2}{(x-c-a+b)(x-c+a-b)} = 1 \ .$$

Vi sætter

$$u = x - a \ , \ v = x - b \ , \ w = x - c \ ,$$

så

$$v - w = c - b \ , \ w - u = a - c \ , \ u - v = b - a \ ,$$

og ligningen får udseendet

$$\frac{u^2}{(u+v-w)(u-v+w)} + \frac{v^2}{(v+w-u)(v-w+u)} + \frac{u^2}{(w+u-v)(w-u+v)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{u^2(v+w-u)+v^2(u+w-v)+w^2(u+v-w)}{(u+v-w)(v+w-u)(w+u-v)}=1 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2(v+w-u)+v^2(u+w-v)+w^2(u+v-w)=(u+v-w)(v+w-u)(w+u-v)\ .$$

Efter et orgie af træls algebra er denne ligning ensbetydende med

$$2uvw = 0\ .$$

Altså får vi

$$u=0 \ \vee\ v=0 \ \vee\ w=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=a \ \vee\ x=b \ \vee\ x=c\ .$$

Vi må imidlertid modificere en smule. Hvis $x = a$, er $u = 0$, $v = a - b$ og $w = a - c$, og indsætter vi $x = a$ i nævneren i (1), bliver denne til

$$(v-w)(v+w)(w-v) = -(v+w)(w-v)^2\ .$$

Vi må kræve, at dette udtryk ikke er 0, dvs.

$$v \neq -w \quad \Leftrightarrow \quad a-b \neq c-a \quad \Leftrightarrow \quad 2a \neq b+c \quad \Leftrightarrow \quad a \neq \tfrac{1}{2}(b+c)$$

og

$$v \neq w \quad \Leftrightarrow \quad a-b \neq a-c \quad \Leftrightarrow \quad b \neq c\ .$$

Det sidste krav er opfyldt efter forudsætningen om a, b og c.

Hvis $a = \tfrac{1}{2}(b+c)$, er $x = a$ *ikke* en løsning, så kun $x = b$ og $x = c$ er løsninger. På grund af symmetrien gælder derfor, at hvis et af de tre tal a, b og c er middeltal af de to andre, er kun 'de to andre' løsninger til ligningen.

Vi kan demonstrere denne sammenhæng ved at sætte $a = 5$, $b = 4$ og $c = 6$. Ligningen får da udseendet

$$\frac{(x-5)^2}{(x-3)(x-7)}+\frac{(x-4)^2}{(x-5)(x-3)}+\frac{(x-6)^2}{(x-7)(x-5)}=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x^3-45x^2+219x-345}{(x-3)(x-7)(x-5)}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-5)(3x^2-30x+69)}{(x-3)(x-7)(x-5)}=1\ .$$

Her tilhører $x = 5$ ikke ligningens grundmængde. Derimod får vi ved indsættelse:

$$x=4\ :\ \frac{-1\cdot(-3)}{1\cdot(-3)\cdot(-1)}=1 \qquad \text{og} \qquad x=6\ :\ \frac{1\cdot(-3)}{3\cdot(-1)\cdot -1}=1\ ,$$

så $x = 4$ og $x = 6$ er løsninger.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Klaus Grünbaum
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen
- Jens Skak-Nielsen
- Con Amore Problemgruppe