Svar på opgave 368 (Marts 2020)

Opgave:

Nogle (lette?) regneopgaver

a. Vis, at tallet $512^3 + 675^3 + 720^3$ er sammensat.

b. Opløs følgende tal i primfaktorer:

$$s = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320 \ .$$

c. Beregn som uforkortelig brøk:

$$p = \frac{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(99^3-1)(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdots(99^3+1)(100^3+1)} \ .$$

d. Bestem den hele del af tallet

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}} \ .$$

e. Bestem den hele del af tallet

$$b = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \ .$$

f. Afgør uden brug af regnemaskine hvilket af følgende tal, der er størst

$$a = 29^{200} \cdot 2^{151} \quad , \quad b = 5^{279} \cdot 3^{300} \ .$$

g. Opløs tallet $5^{2015} - 1$ i et produkt af tre naturlige tal, der alle er større end 5^{100}.

h. Vis, at tallet $3^{105} + 4^{105}$ er deleligt med 13, 49 og 379, men ikke med 5 og 11.

k. Bestem den hele del af tallet

$$a = \frac{3^{2020} + 2^{2020}}{3^{2018} + 2^{2018}} \ .$$

m. Hvilken rest ved division med 9 giver tallet

$$x = \sqrt{1111111111 - 22222} \ ?$$

Besvarelse:

a. Vis, at tallet $512^3 + 675^3 + 720^3$ er sammensat.

Vi sætter $x = 512$, $y = 675$, $z = 720$. Så er

$$2z^2 = 2 \cdot 720^2 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^2 ,$$

og

$$3xy = 3 \cdot 512 \cdot 675 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^2 .$$

Dermed er

$$2z^2 = 3xy \quad \text{eller} \quad 2z^3 = 3xyz .$$

Vi får så

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 - z^3 + 2z^3 = x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz$$
$$= (x + y - z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz) .$$

Derfor er $512^3 + 675^3 + 720^3$ delelig med $512 + 675 - 720 = 467$.

Vi får faktisk, at

$$512^3 + 675^3 + 720^3 = 467 \cdot 229 \cdot 7621 .$$

b. Opløs følgende tal i primfaktorer: $s = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$.

1. metode. Vi sætter $x = 991$ og får

$$s = (x - 2)(x + 10)(x + 16) + 320 = x^3 + 24x^2 + 108x - 320 + 320$$
$$= x^3 + 24x^2 + 108x = x(x^2 + 24x + 108) = x(x + 6)(x + 18) = 991 \cdot 997 \cdot 1009 .$$

2. metode (Asger Olesen). Betragt polynomiet

$$p(x) = x(x + 12)(x + 18) + 320$$

Vi ser, at

$$s = p(989) = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$$

Desuden er $x = -2$ rod i $p(x)$, idet

$$p(-2) = -2 \cdot 10 \cdot 16 + 320 = 0 .$$

Ved udregning fås

$$p(x) = x^3 + 30x^2 + 216x + 320 = (x + 2)(x^2 + 28x + 160) = (x + 2)(x + 8)(x + 20) .$$

Derfor er

$$s = p(989) = 991 \cdot 997 \cdot 1009 .$$

3. metode (Walther Janous). Vi har, at

$$s = 989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320 = 991 \cdot 1001 \cdot 1007 - 2 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$$
$$= 991 \cdot 1001 \cdot 1007 - 2 \cdot (1001 \cdot 1007 - 160)$$
$$= 991 \cdot 1001 \cdot 1007 - 2 \cdot ((991 + 10) \cdot (991 + 16) - 160)$$
$$= 991 \cdot 1001 \cdot 1007 - 2 \cdot (991^2 + 26 \cdot 991) ,$$

så s er delelig med 991. Dernæst er

$$\frac{s}{991} = 1001 \cdot 1007 - 2 \cdot (991 + 26) = 1001 \cdot 1007 - 2 \cdot 1017 .$$

Hvis vi sætter $z = 1009$, får vi

$$\frac{s}{991} = (z - 8)(z - 2) - 2(z + 8) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{991} = z(z - 12) = 1009 \cdot 997 .$$

Dermed får vi opløsningen

$$s = 991 \cdot 997 \cdot 1009 \,.$$

c. Beregn som uforkortelig brøk: $p = \dfrac{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(99^3-1)(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)\cdots(99^3+1)(100^3+1)}$.

1. metode. Vi har, at

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)\,.$$

Desuden er

$$x^2 - x + 1 = (x-1)^2 + (x-1) + 1$$

så fx

$$99^2 + 99 + 1 = 100^2 - 100 + 1\,.$$

Vi får så

$$\frac{2^3-1}{2^3+1} = \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(1^2+1+1)}$$

$$\frac{3^3-1}{3^3+1} = \frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(2^2+2+1)}$$

$$\frac{4^3-1}{4^3+1} = \frac{(4-1)(4^2+4+1)}{(4+1)(3^2+3+1)}$$

$$\cdots\,.$$

$$\frac{99^3-1}{99^3+1} = \frac{(99-1)(99^2+99+1)}{(99+1)(98^2+98+1)}$$

$$\frac{100^3-1}{100^3+1} = \frac{(100-1)(100^2+100+1)}{(100+1)(99^2+99+1)}\,.$$

Altså er

$$p = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 99\cdot(2^2+2+1)(3^2+3+1)\cdots(100^2+100+1)}{3\cdot 4\cdot 5\cdots 100\cdot 101\cdot(1^2+1+1)(2^2+2+1)\cdots(99^2+99+1)}$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot(100^2+100+1)}{3\cdot 100\cdot 101} = \frac{2\cdot 10101}{3\cdot 10100} = \frac{2\cdot 3\cdot 3367}{3\cdot 10100} = \frac{3367}{5050}\,,$$

og denne brøk er uforkortelig.

2. metode (Jens-Søren Andersen). Vi har, at

$$\frac{x^3-1}{(x+1)^3+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{((x+1)+1)((x+1)^2-(x+1)+1)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{x-1}{x+2}\,.$$

Dermed er

$$p = \frac{1}{2^3+1}\cdot\frac{2^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{4^3+1}\cdots\frac{99^3-1}{100^3+1}\cdot(100^3-1)$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{2-1}{2+2}\cdot\frac{3-1}{3+2}\cdots\frac{99-1}{99+2}\cdot 999999 = \frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 96\cdot 97\cdot 98}{9\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots 98\cdot 99\cdot 100\cdot 101}\cdot 999999$$

$$= \frac{2\cdot 3\cdot 999999}{9\cdot 99\cdot 100\cdot 101} = \frac{2\cdot 3\cdot 3^2\cdot 37\cdot 3\cdot 11\cdot 7\cdot 13}{3^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 101} = \frac{3367}{5050}\,.$$

d. Bestem den hele del af tallet: $a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}$.

1. metode. Vi har, at

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right).$$

For $k = 2, 3, \dots, 10000$ fås

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

$$\dots\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{10\,000}} < 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{9999}\right) \quad ,$$

og addition giver

$$a < 2\left(\sqrt{10\,000}-1\right) = 198\,.$$

På den anden side er

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right),$$

og for $k = 2, 3, \dots, 10000$ fås

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > 2\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)$$

$$\dots\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{10\,000}} < 2\left(\sqrt{10\,001}-\sqrt{10\,000}\right), \quad ,$$

som ved addition giver

$$a > 2\left(\sqrt{10\,001}-\sqrt{2}\right) > 2(100-1{,}45) = 2\cdot 98{,}55 = 197{,}1\,.$$

Altså er

$$197{,}1 < a < 198\,,$$

så int$a$ = 197.

2. metode (Jens Skak-Nielsen). På grafen for funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ forbinder vi punk- terne $(n, f(n))$ og $(n + 1, f(n + 1))$ for $n = 1, 2, \dots, 10000$. Den stykkevis lineære funk- tion, der derved opstår, er majorant for $f(x)$. Summen af arealerne af trapezerne under grafen for den stykkevis lineære funktion og over x-aksen er større end arealet af punkt- mængden mellem grafen for $f(x)$ og x-aksen, så vi får

$$\int_1^{10000} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{9999}}+0{,}01\right)\right)$$

hvoraf

$$\left[2\sqrt{x}\right]_1^{10000} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9999}} + 0{,}005$$

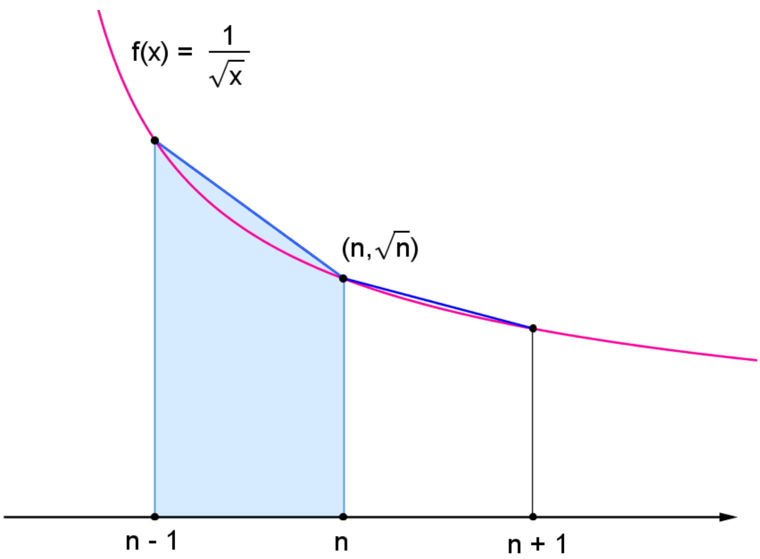
$$\Leftrightarrow \quad 200 - 2 < 0.505 + a - \tfrac{1}{\sqrt{10000}} \quad \Leftrightarrow \quad a > 197{,}505\,.$$

Dernæst konstruerer vi en positiv stykkevis lineær funktion, hvis graf ligger under grafen for $f(x)$, idet vi trækker tangenter til grafen for $f(x)$ i punkterne $(n, f(n))$ for $n = 1, 2, \ldots, 10000$. Hver tangent trækkes i intervallet $[n - \frac{1}{2}\,; n + \frac{1}{2}]$. Idet

$$f\,'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

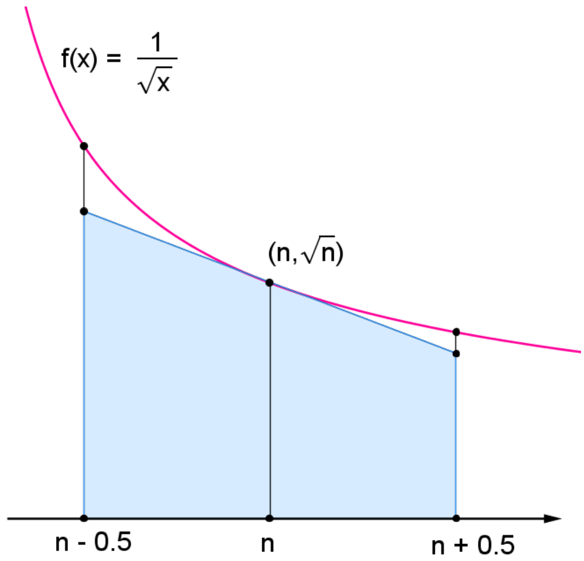
får en sådan tangent i $(n, f(n))$ efter lidt udregninger ligningen

$$y = \frac{-1}{2n\sqrt{n}}x + \frac{3}{2\sqrt{n}}\,.$$



Derefter kan man ved indsættelse af $x = n - \frac{1}{2}$ og $x = n + \frac{1}{2}$ og reduktion få frem, at tangentstykket er udspændt af punkterne med koordinaterne

$$\left(n - \frac{1}{2}, \frac{4n+1}{4n\sqrt{n}}\right) \text{ og } \left(n + \frac{1}{2}, \frac{4n-1}{4n\sqrt{n}}\right).$$



Arealet af det trapez mellem grafen for den stykkevis lineære funktion og x-aksen, der fremkommer er dermed

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4n+1}{4n\sqrt{n}}+\frac{4n-1}{4n\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\ .$$

Derfor er

$$\int_{1,5}^{10000,5}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx > \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10000}}=a$$

hvoraf

$$\left[2\sqrt{x}\right]_{1,5}^{10000,5}=2\sqrt{10000,5}-2\sqrt{1,5}=197,555>a\ .$$

Dermed har vi, at

$$197,505 < a < 197,555\ ,$$

så int a = 197.

e. Bestem den hele del af tallet: $b=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

1. metode. Vi sætter

$$S_1=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}\ ,$$

$$S_2=\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}\ .$$

Ved at sammenligne summerne led for led ser vi, at $S_1 < b$ og $b < S_2$. Dermed er

$$S_1 < b < S_2 \quad \text{eller} \quad S_1 + b < 2b < S_2 + b\ . \tag{1}$$

Nu fås

$$S_1 + b = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}$$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{101}-\sqrt{100}\right)=\sqrt{101}-1>9\ .$$

Tilsvarende er

$$S_2 + b = \frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$= \left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right) + \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \cdots + \left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right) = \sqrt{100} = 10\,.$$

Af (1) får vi så

$$9 < S_1 + b < 2b < S_2 + b = 10\,,$$

hvoraf

$$4\tfrac{1}{2} < b < 5\,.$$

Den hele del af *b* er altså 4.

2. metode (Hans Mortensen). Vi har, at

$$b = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \cdots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99} = \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{99}$$

$$= \sum_{n=1}^{50}\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)\,.$$

Funktionen

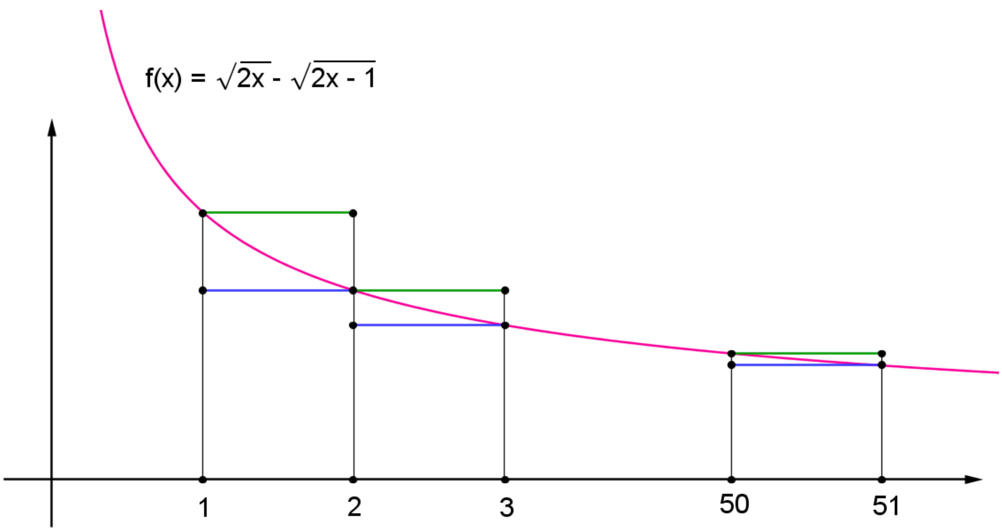
$$f(x) = \sqrt{2x}-\sqrt{2x-1} = \frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x-1}}$$

er positiv og aftagende for $x \geq \frac{1}{2}$. Vi ser, at

$$b = \sum_{n=1}^{50} f(n)$$

er en oversum for $f(x)$ i intervallet [1;51], så

$$b > \int_1^{51}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2x-1}\right)dx = 4,42788.$$



På den anden side er

$$\sum_{n=2}^{51} f(n)$$

en undersum for $f(x)$ i intervallet [1;51], så

$$\int_1^{51}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2x-1}\right)dx > \sum_{n=2}^{51}\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4,42788+\sqrt{2}-\sqrt{1} > b+\sqrt{102}-\sqrt{101} \quad \Leftrightarrow \quad b < 4,79246.$$

Dermed er

$$4,42788 < b < 4,79246 ,$$

så int$b$ = 4.

f. Afgør uden brug af regnemaskine hvilket af følgende tal, der er størst

$$a = 29^{200}\cdot 2^{151} \quad , \quad b = 5^{279}\cdot 3^{300} \ .$$

1. metode. Vi ganger begge tal med $2^{49}\cdot 5^{21}$:

$$2^{49}\cdot 5^{21}\cdot a = 29^{200}\cdot 2^{200}\cdot 5^{21} \quad , \quad 2^{49}\cdot 5^{21}\cdot b = 3^{300}\cdot 5^{300}\cdot 2^{49} \ .$$

Nu er $5^3 < 2^7$ (da 125 < 128) og

$$(29\cdot 2)^2 < (3\cdot 5)^3 ,$$

idet 3364 < 3375. Dermed er

$$5^3 < 2^7 \quad \Leftrightarrow \quad 5^{21} < 2^{49} \quad , \quad (29\cdot 2)^2 < (3\cdot 5)^3 \quad \Leftrightarrow \quad 29^{200}\cdot 2^{200} < 3^{300}\cdot 5^{300} \ .$$

Multiplikation af disse to uligheder giver

$$29^{200}\cdot 2^{200}\cdot 5^{21} < 3^{300}\cdot 5^{300}\cdot 2^{49} \quad \Leftrightarrow \quad 29^{200}\cdot 2^{151} < 5^{279}\cdot 3^{300} \quad \Leftrightarrow \quad a < b \ .$$

Udregning giver

$$\log a \approx 337,9351 \quad , \quad \log b \approx 338,1490 ,$$

hvoraf

$$\log \tfrac{b}{a} \approx 0,2139 \ \text{ så } \ b \approx 1,6364a \ .$$

2. metode (Jens Skak-Nielsen). Vi omskriver lidt snedigt sådan:

$$a = 29^{200}\cdot 2^{151} = 29^{20}\cdot (29^3)^{60}\cdot 2^{151} = 29^{17}\cdot 29^3\cdot 24389^{60}\cdot 2^{151}$$

$$< 29^{17}\cdot 29^3\cdot (24300\cdot 1,004)^{60}\cdot 2^{151} = 29^{17}\cdot (29\cdot 1,004^{20})^3\cdot 24300^{60}\cdot 2^{151}$$

$$= 29^{17}\cdot (29\cdot 1,004^{20})^3\cdot (3^5\cdot 2^2\cdot 5^2)^{60}\cdot 2^{151} < 29^{17}\cdot (29\cdot 1,1)^3\cdot 3^{300}\cdot 2^{271}\cdot 5^{120}$$

$$< 29^{17}\cdot 32^3\cdot 3^{300}\cdot 2^{271}\cdot 5^{120} = \left(\tfrac{29}{32}\right)^{17}\cdot 32^{20}\cdot 3^{300}\cdot 2^{271}\cdot 5^{120}$$

$$= \left(\tfrac{29}{32}\right)^{17}\cdot (2^5)^{20}\cdot 3^{300}\cdot 2^{271}\cdot 5^{120} = \left(\tfrac{29}{32}\right)^{17}\cdot 3^{300}\cdot (2^7)^{53}\cdot 5^{120}$$

$$= \left(\tfrac{29}{32}\right)^{17}\cdot 3^{300}\cdot (1,024\cdot 5^3)^{53}\cdot 5^{120} = \left(\tfrac{29}{32}\right)^{17}\cdot 1,024^{53}\cdot 3^{300}\cdot 5^{279}$$

$$< \left(\tfrac{29}{32}\right)^{17}\cdot (1,024^4)^{17}\cdot 3^{300}\cdot 5^{279} = \left(\tfrac{29}{32}\cdot 1,024^4\right)^{17}\cdot 3^{300}\cdot 5^{279}$$

$$< \left(\tfrac{29}{32}\cdot 1,1\right)^{17}\cdot 3^{300}\cdot 5^{279} < 3^{300}\cdot 5^{279} = b \ .$$

Dermed er a det mindste af de to tal.

3. metode (Asger Olesen). Først ser vi, at

$$\frac{29^4 \cdot 2^3}{3^6 \cdot 5^5} < \frac{5}{2} \, ,$$

fordi denne ulighed er ensbetydende med

$$29^4 \cdot 2^4 < 3^6 \cdot 5^6 \quad \Leftrightarrow \quad 58^4 < 15^6 \quad \Leftrightarrow \quad 11\,316\,496 < 11\,390\,625 \, .$$

Dernæst får vi

$$\frac{b}{a} = \frac{5^{279} \cdot 3^{300}}{29^{200} \cdot 2^{151}} = \frac{5^{29}}{\left(\frac{29^4 \cdot 2^3}{3^6 \cdot 5^5}\right)^{50} \cdot 2} > \frac{5^{29}}{\left(\frac{5}{2}\right)^{50} \cdot 2}$$

$$= \frac{2^{49}}{5^{21}} = \frac{2^{70}}{5^{21} \cdot 2^{21}} = \frac{2^{70}}{10^{21}} = \frac{(2^{10})^7}{1000^7} = \frac{1024^7}{1000^7} > 1 \, .$$

Altså er $b > a$.

4. metode (Palle Bak Petersen). Vi ser på tallet x, hvor

$$x = \frac{a}{b} = \frac{29^{200} \cdot 2^{151}}{5^{279} \cdot 3^{300}} = \frac{29^{200} \cdot 2 \cdot 2^{150} \cdot 5^{21}}{15^{300}} = \frac{29^{200} \cdot 2^{140} \cdot 5^{20} \cdot 2^{11} \cdot 5}{15^{300}} \, ,$$

så at

$$\sqrt[20]{x} = \frac{29^{10} \cdot 2^7 \cdot 5 \cdot \sqrt[20]{10 \cdot 2^{10}}}{15^{15}} \, .$$

Nu er

$$5 \cdot \sqrt[20]{10 \cdot 2^{10}} < 8 \quad \Leftrightarrow \quad 5^{20} \cdot 10 \cdot 2^{10} < 2^{60}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5^{20} \cdot 10 < 2^{50} \quad \Leftrightarrow \quad 5^2 \cdot \sqrt[10]{10} < 2^5 \quad \Leftrightarrow \quad 25 \cdot \sqrt[10]{10} < 32 \, ,$$

hvilket er sandt. Altså er

$$\sqrt[20]{x} < \frac{29^{10} \cdot 2^7 \cdot 2^3}{15^{15}} = \left(\frac{29^2 \cdot 2^2}{15^3}\right)^5 < 1 \, ,$$

fordi $58^2 = 3364$ og $15^3 = 3375$. Derfor får vi

$$\sqrt[20]{x} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{a}{b} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < b \, .$$

5. metode (Walther Janous). Vi får, at

$$\frac{b}{a} = \frac{5^{279} \cdot 3^{300}}{29^{200} \cdot 2^{151}} = \left(\frac{3^3}{29^2}\right)^{100} \cdot \frac{5^{279}}{2^{151}} \, ,$$

så

$$\ln\frac{b}{a} = -100 \cdot \ln\frac{29^3}{3^3} + 279 \cdot \ln 5 - 151 \cdot \ln 2 = -100 \cdot \ln\frac{841}{27} + 279 \cdot \ln 5 - 151 \cdot \ln 2 \, .$$

Ved hjælp af den gode gamle logaritmetabel (tilladt hjælpemiddel?) fås nu

$$\frac{841}{27} = 31 + \frac{4}{27} < 31{,}2 \quad , \quad \ln 31.2 < 3{,}4405 \quad , \quad \ln 5 > 1{,}609 \quad , \quad \ln 2 < 0{,}694 \, ,$$

så at

$$\ln\frac{b}{a} = -100\cdot\ln\frac{841}{27} + 279\cdot\ln 5 - 151\cdot\ln 2 > -344,05 + 448,911 - 104,794 > 0,067 > 0 .$$

Dermed er $\frac{b}{a} > 1$, så $a < b$.

g. Opløs tallet $5^{2015} - 1$ i et produkt af tre naturlige tal, der alle er større end 5^{100}.

1. metode. Vi sætter $a = 5^{403}$. Så er

$$5^{2015} - 1 = a^5 - 1 = (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) .$$

Der er klart, at $a - 1 = 5^{403} - 1$ er en af de ønskede faktorer. Nu er

$$(a^2 + 3a + 1)^2 = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$$

og

$$5a(a + 1)^2 = 5a^3 + 10a^2 + 5a ,$$

hvoraf

$$(a^2 + 3a + 1)^2 - 5a(a + 1)^2 = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 .$$

Vi sætter $b = 5^{202}$, så $b^2 = 5^{404} = 5a$, så

$$\begin{aligned} a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 &= (a^2 + 3a + 1)^2 - b^2(a + 1)^2 = (a^2 + 3a + 1)^2 - (ab + b)^2 \\ &= (a^2 + 3a + 1 + ab + b)(a^2 + 3a + 1 - ab - b) . \end{aligned} \tag{1}$$

Her er

$$a^2 = 5^{806} > 5^{605}$$

og

$$ab + b = (a + 1)b = (5^{403} + 1)\cdot 5^{202} < 5^{403+202} = 5^{605} ,$$

så at

$$-ab - b > -5^{605} ,$$

og dermed får vi en vurdering for den sidste faktor i (1):

$$a^2 + 3a + 1 - ab - b > 5^{605} + 3\cdot 5^{403} + 1 - 5^{605} = 3\cdot 5^{403} + 1 > 5^{100} .$$

Dermed gælder også for den første faktor i (1), at

$$a^2 + 3a + 1 + ab + b > 5^{100} .$$

Den søgte faktoropløsning er altså

$$(a - 1)\,(a^2 + 3a + 1 + ab + b)(a^2 + 3a + 1 - ab - b) .$$

2. metode (Jens-Søren Andersen). Ved hjælp af formlen for summen af en kvotientræk- ke får vi, at

$$\frac{a^{nm}-1}{a^n-1} = (a^n)^{m-1} + (a^n)^{m-2} + \cdots + a^n + 1 .$$

Dermed er

$$a^{2015} - 1 = a^{5\cdot 13\cdot 31} - 1 = \frac{\left(a^{13\cdot 31}\right)^5 - 1}{a^{13\cdot 31} - 1}\cdot\frac{\left(a^{31}\right)^{13}}{a^{31} - 1}\cdot\left(a^{31} - 1\right) ,$$

$$a^{2015} - 1 = a^{5\cdot 13\cdot 31} - 1 = \frac{\left(a^{5\cdot 31}\right)^{13} - 1}{a^{5\cdot 31} - 1}\cdot\frac{\left(a^{31}\right)^{5}}{a^{31} - 1}\cdot\left(a^{31} - 1\right)$$

to faktoropløsninger af tallet $a^{2015} - 1$ som produkt af tre faktorer. Den sidste faktor $a^{31} - 1 = 5^{31} - 1$ er imidlertid ikke stor nok til at opfylde kravet om, at størrelsen skal overstige 5^{100}.

For nemheds skyld sætter vi $k = a^{31}$ og ser på de to faktorer oven for, nemlig

$$P_1(k) = \frac{k^{13}-1}{k-1} = k^{12}+k^{11}+\cdots+k+1 \quad \text{og} \quad P_2(k) = \frac{k^5-1}{k-1} = k^4+k^3+k^2+k+1 \,.$$

Ved hjælp af Euklids algoritme kan vi indse, at polynomierne $P_1(k)$ og $P_2(k)$ er indbyrdes primiske i ringen af polynomier over de hele tal. Vi får, at

$$P_3(k) = P_1(k) - (k^8 + k^3)\cdot P_2(k) = k^2 + k + 1 \,,$$
$$P_4(k) = P_2(k) - k^2\cdot P_3(k) = k + 1$$
$$P_5(k) = P_3(k) - k\cdot P_4(k) = 1 \,.$$

Altså er $P_1(a)$ og $P_2(a)$ indbyrdes primiske polynomier, der begge er divisorer i poly- nomiet a^{2015} - 1. Så er også $P_1(a)\cdot P_2(a)$ divisor i a^{2015}-1. Dette giver faktoropløsningen

$$a^{2015}-1 = \frac{a^{2015}-1}{P_1(a)\cdot P_2(a)}\cdot P_1(a)\cdot P_2(a) \,.$$

Vi ser, at

$$(a^{31})^{12} < P_1(a) < (a^{31})^{13} \quad \text{og} \quad (a^{31})^4 < P_2(a) < (a^{31})^5$$

så at

$$(a^{31})^{16} < P_1(a)\cdot P_2(a) < (a^{31})^{18} \,.$$

Dermed er

$$\frac{a^{2015}-1}{P_1(a)\cdot P_2(a)} > \frac{a^{5\cdot 13\cdot 31}}{a^{31\cdot 18}} = a^{1457} \,.$$

Altså er alle tre faktorer større end $(a^{31})^4 = a^{124} = 5^{124}$.

h. Vis, at tallet $3^{105} + 4^{105}$ er deleligt med 13, 49 og 379, men ikke med 5 og 11.

Vi har, at $a^n + b^n$ er delelig med $a + b$, når n er ulige, idet

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \,.$$

Derfor er

$$t = 3^{105} + 4^{105} = (3^3)^{35} + (4^3)^{35}$$

delelig med $3^3 + 4^3 = 7\cdot 13$. På same måde er

$$t = (3^5)^{21} + (4^5)^{21}$$

delelig med $3^5 + 4^5 = 7\cdot 181$. Desuden er

$$t = (3^7)^{15} + (4^7)^{15}$$

delelig med $3^7 + 4^7 = 49\cdot 379$.

Videre er

$$4^3 = 64 \equiv -1 \pmod 5 \quad \text{så} \quad 4^{105} \equiv (-1)^{35} = -1 \pmod 5$$

og

$$3^{105} = 3\cdot(3^2)^{52} \equiv 3\cdot(-1)^{52} = 3 \pmod 5 \,.$$

Altså får vi

$$t \equiv -1 + 3 = 2 \pmod 5 \,,$$

så t ikke er delelig med 5.

Vi får, at

$$4^3 \equiv -2 \pmod{11} \quad \text{så} \quad 4^{15} = (4^3)^5 \equiv (-2)^5 = -32 \equiv 1 \pmod{11} \,.$$

Desuden er

$$3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11} \quad \text{så} \quad 3^{105} = (3^5)^{21} \equiv 1 \pmod{11} \,.$$

Dermed er

$$t \equiv 1 + 1 = 2 \pmod{11},$$

så t ikke er delelig med 11.

k. Bestem den hele del af tallet: $a = \dfrac{3^{2020} + 2^{2020}}{3^{2018} + 2^{2018}}$.

1. metode. Vi ser, at 3^{2020} er 'meget' større end 2^{2020} og at 3^{2018} er 'meget' større end 2^{2018}, så

$$a = \frac{3^{2020} + 2^{2020}}{3^{2018} + 2^{2018}} \approx \frac{3^{2020}}{3^{2018}} = 9 .$$

Vi får desuden

$$9 \cdot (3^{2018} + 2^{2018}) > 9 \cdot 3^{2018} + 4 \cdot 2^{2018} = 3^{2020} + 2^{2020},$$

så at $a < 9$. Endelig er

$$8 \cdot (3^{2018} + 2^{2018}) = 9 \cdot 3^{2018} + 4 \cdot 2^{2018} - 3^{2018} + 4^{2018}$$
$$= 3^{2020} + 2^{2020} - (3^{2018} - 4^{2018}) < 3^{2020} + 2^{2020},$$

hvoraf $a > 8$. Dermed er $\operatorname{int} a = 8$.

2. metode (Jens-Søren Andersen). Vi omskriver sådan:

$$a = \frac{3^{2020} + 2^{2020}}{3^{2018} + 2^{2018}} = 9 \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2020}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2018}} .$$

Da $\left(\frac{2}{3}\right)^{2020} < \left(\frac{2}{3}\right)^{2018}$, er a $< 9 \cdot 1 = 9$. Desuden er

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2018} < \left(\tfrac{2}{3}\right)^{6} < \tfrac{1}{9},$$

så

$$a = 9 \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2020}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2018}} > 9 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2018}} > \frac{1}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{81}{10} > 8 .$$

Da altså $8 < a < 9$, er $\operatorname{int} a = 8$.

3. metode (Asger Olesen). Vi har, at

$$(a^n + b^n)(a^2 + b^2) = a^{n+2} + b^{n+2} + a^2 b^n + a^n b^2,$$

så vi får

$$\frac{a^{n+2} + b^{n+2}}{a^n + b^n} = \frac{(a^n + b^n) - (a^2 b^n + a^n b^2)}{a^n + b^n} = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^n + a^n b^2}{a^n + b^n} .$$

Dermed er

$$a = \frac{3^{2020} + 2^{2020}}{3^{2018} + 2^{2018}} = 3^2 + 2^2 - \frac{3^2 \cdot 2^{2018} + 3^{2018} \cdot 2^2}{3^{2018} + 2^{2018}} = 13 - \frac{9 \cdot 2^{2018} + 4 \cdot 3^{2018}}{3^{2018} + 2^{2018}}$$

$$= 13 - \frac{4 \cdot 2^{2018} + 4 \cdot 3^{2018}}{3^{2018} + 2^{2018}} - \frac{5 \cdot 2^{2018}}{3^{2018} + 2^{2018}} = 13 - 4 - \frac{5}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2018} + 1} = 9 - \frac{5}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2018} + 1} .$$

Her er det klart, at

$$0 < \frac{5}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2018}+1} < 1\,,$$

så int$a$ = 8.

m. Hvilken rest ved division med 9 giver tallet: $x = \sqrt{1111111111-22222}$?

Vi kan omformulere sådan:

$$x = \sqrt{1111111111-22222} = \sqrt{\frac{10^{10}-1}{9} - \frac{2\cdot(10^5-1)}{9}} = \sqrt{\frac{10^{10}-2\cdot 10^5+1}{9}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{10^5-1}{3}\right)^2} = \frac{10^5-1}{3} = 33333\,.$$

Et tals tværsum angiver dets rest ved division med 9. Derfor er $x \equiv 15 \equiv 6 \pmod 9$.

●●●●●

Bemærkning til Opgave 366b.

Opgave 366b har følgende ordlyd:

Bestem samtlige muligheder for at dele mængden {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} i to disjunkte delmængder *B* og *C*, så summen af tallene i *B* er lig med produktet af tallene i *C*.

Vi ser på følgende lidt anderledes problem:

Bestem en opdeling af mængden $\{1,2,3,\ldots,n\}$ i to disjunkte delmængder *B* og *C*, så summen af tallene i *B* er lig med produktet af tallene i *C*.

Vi kræver altså ikke samtlige løsninger, men blot en enkelt. Små værdier af *n* giver følgende muligheder:

$$\begin{array}{lll}
n = 5: & B = \{3,5\}\,, & C = \{1,2,4\} \\
n = 6: & B = \{3,4,5\}\,, & C = \{1,2,6\} \\
n = 7: & B = \{2,4,5,7\}\,, & C = \{1,3,6\} \\
n = 8: & B = \{2,4,5,6,7\}\,, & C = \{1,3,8\} \\
n = 9: & B = \{2,3,5,6,7,9\}\,, & C = \{1,4,8\} \\
n = 10: & B = \{2,3,5,6,7,8,9\}\,, & C = \{1,4,10\} \\
n = 11: & B = \{2,3,4,6,7,8,9,11\}\,, & C = \{1,5,10\}\,.
\end{array}$$

Vi får den idé at definere

$$C = \{1\,,\ \tfrac{1}{2}(n + n \pmod 2) - 1\,,\ n - n \pmod 2\}\,,$$

eller

$$C = \{1\,,\ \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}\,,\ n-1\} \quad \text{for } n \text{ ulige}$$

$$C = \{1\,,\ \tfrac{1}{2}n - 1\,,\ n\} \quad \text{for } n \text{ lige}\,.$$

Mængden *B* er komplementærmængde til *C*. For at vise dette deler vi op efter pariteten af *n*.

I. *n* ulige

Vi benytter, at

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)\,,$$

så produktet af tallene i C er

$$1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}\right) \cdot (n - 1) = \tfrac{1}{2}(n^2 - 2n + 1)$$

og summen af tallene i B er

$$\tfrac{1}{2}n(n + 1) - \left(1 + \left(\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}\right) + n - 1\right) = \tfrac{1}{2}(n^2 - 2n + 1)\ .$$

II. *n* lige

Her er produktet af tallene i C

$$1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}n - 1\right) \cdot n = \tfrac{1}{2}n^2 - n\ ,$$

og summen af tallene i B er

$$\tfrac{1}{2}n(n + 1) - \left(1 + \tfrac{1}{2}n - 1 + n\right) = \tfrac{1}{2}n^2 - n\ .$$

Dermed er problemet løst.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens Søren Andersen
- Klaus Grünbaum
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Palle Bak Petersen
- Jens Skak-Nielsen
- Con Amore Problemgruppe