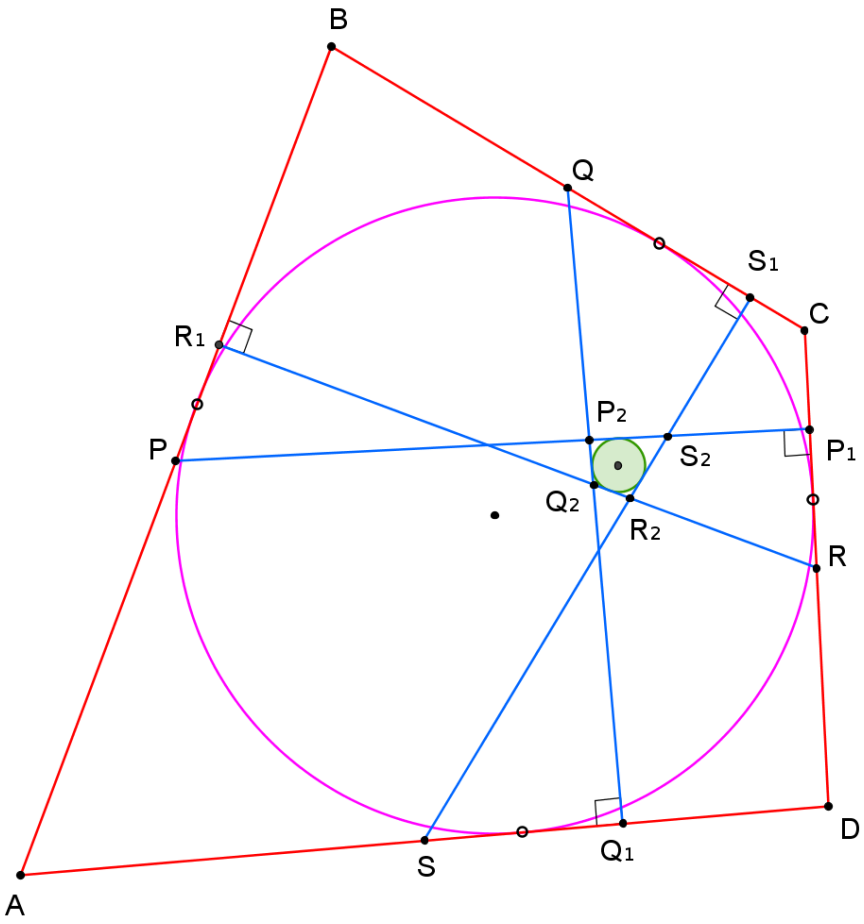
Svar på sommeropgave (2020)

Opgave. □*ABCD* er omskrivelig, og *P*, *Q*, *R* og *S* er midtpunkter af siderne *AB*, *BC*, *CD* og *DA*. Projektionerne af *P*, *Q*, *R* og *S* på de modstående sider er P_1, Q_1, R_1 og S_1. Der opstår nogle skæringspunkter i firkantens indre, nemlig

P_2 er skæringspunkt mellem PP_1 og QQ_1 ,
Q_2 er skæringspunkt mellem QQ_1 og RR_1 ,
R_2 er skæringspunkt mellem RR_1 og SS_1 ,
S_2 er skæringspunkt mellem SS_1 og PP_1 .

Vis, at □$P_2Q_2R_2S_2$ er omskrivelig.



Besvarelse:

Nedenstående besvarelse er i lettere omarbejdet form modtaget fra Jens-Søren Andersen, Esbjerg.

Lad O_a, O_b, O_c og O_d være centrer for den omskrevne cirkler for Δ*BCD*, Δ*CDA*, Δ*DAB* og Δ*ABC* som vist på fig. 1.

I $\square O_aQCR$ ser vi, at $\angle O_dO_aO_b = 180° - C$. I $\square O_cSAP$ får vi, at $\angle O_dO_cO_b = 180° - A$ og i $\square O_dQBP$ er $\angle O_aO_dO_c = \angle PO_dQ = 180° - B$, og endelig får vi i $\square O_bSDR$, at $\angle O_aO_bO_c = \angle SO_bR = 180° - D$.

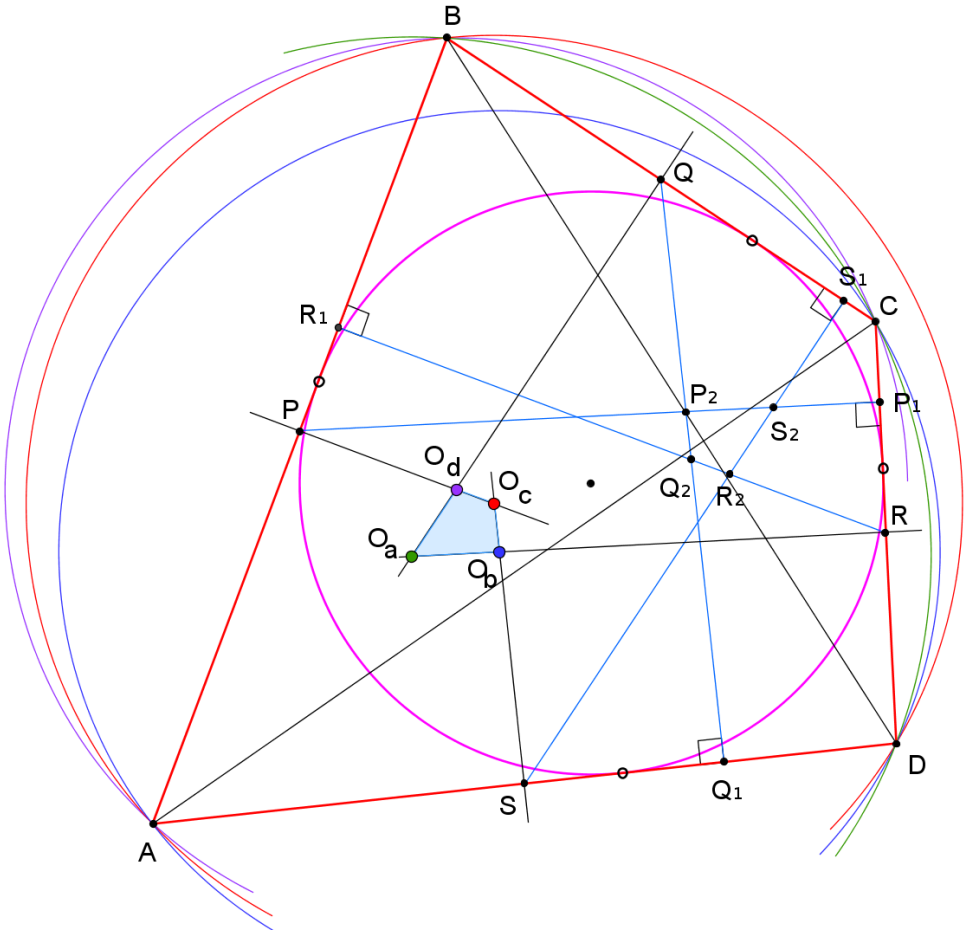


Fig. 1

Da *P*, *Q*, *R* og *S* er midtpunkter af siderne i $\square ABCD$, er $\square PQRS$ et parallelogram (firkantens såkaldte *Varignon*-parallelogram). Skæringspunktet mellem diagonalerne *PR* og *QS* betegnes *J* (fig. 2).

En spejling i *J* fører *P* over i *R* og P_1 over i et punkt P_1*. Linjen PP_1 føres ved spejlingen over i linjen RP_1*, som er parallel med PP_1, og da *R* er midtpunkt af *CD*, er RP_1* midtnormal for *CD*.

Tilsvarende føres QQ_1 ved spejlingen i *J* over i SQ_1*, som er midtnormal for *AD*. Derved føres skæringspunktet P_2 mellem PP_1 og QQ_1 over i skæringspunktet mellem RP_1* og SQ_1*. Dette er skæringspunktet mellem midtnormalerne for *CD* og *AD*, dvs. netop centrum for den omskrevne cirkel for ΔACD, dvs. O_b.

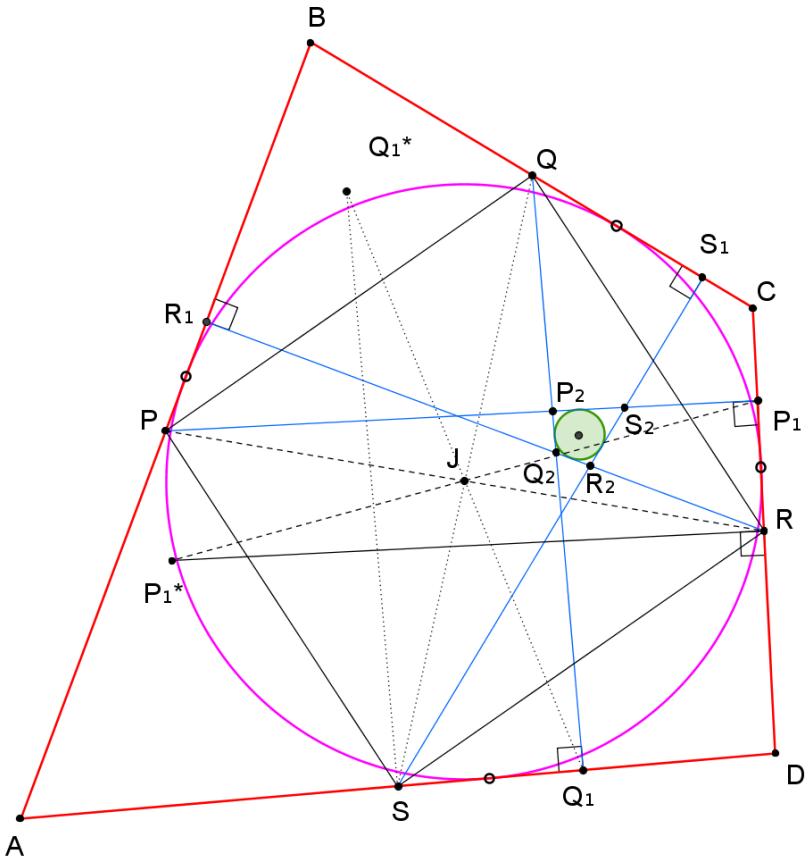


Fig. 2

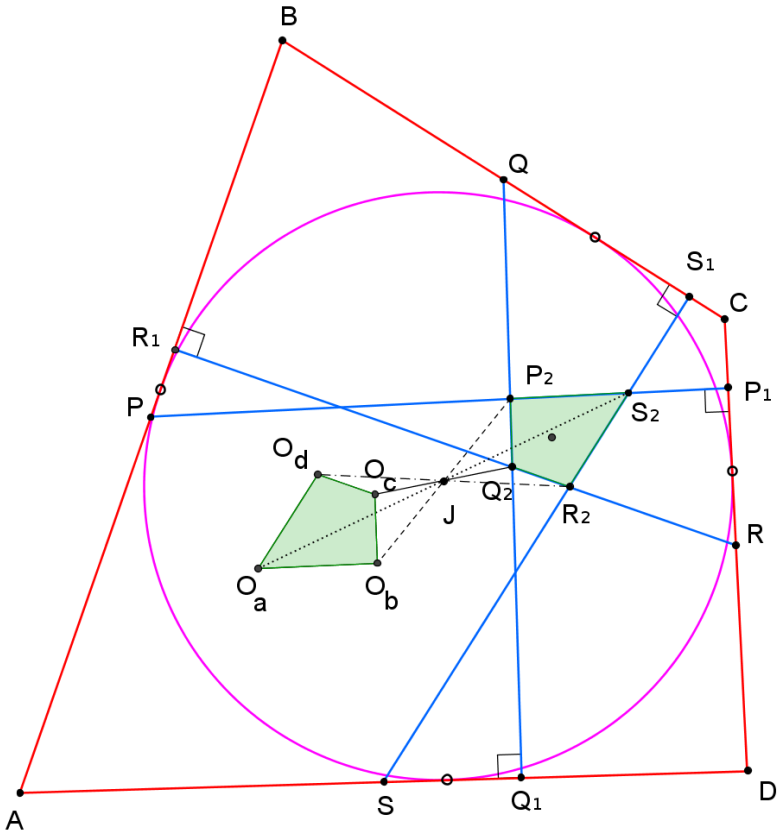


Fig. 3

På samme måde vil punkterne Q_2, R_2 og S_2 ved spejlingen i J føres over i O_c, O_d og O_a. Derved føres $\square P_2Q_2R_2S_2$ ved spejlingen over i $\square O_bO_cO_dO_a$. Den sætning, vi ønsker at vise, kan derfor også formuleres sådan:

Hvis $\square ABCD$ er omskrivelig, vil centrene for de omskrevne cirkler for ΔBCD, ΔCDA, ΔDAB og ΔABC udspænde en omskrivelig firkant (fig. 3).

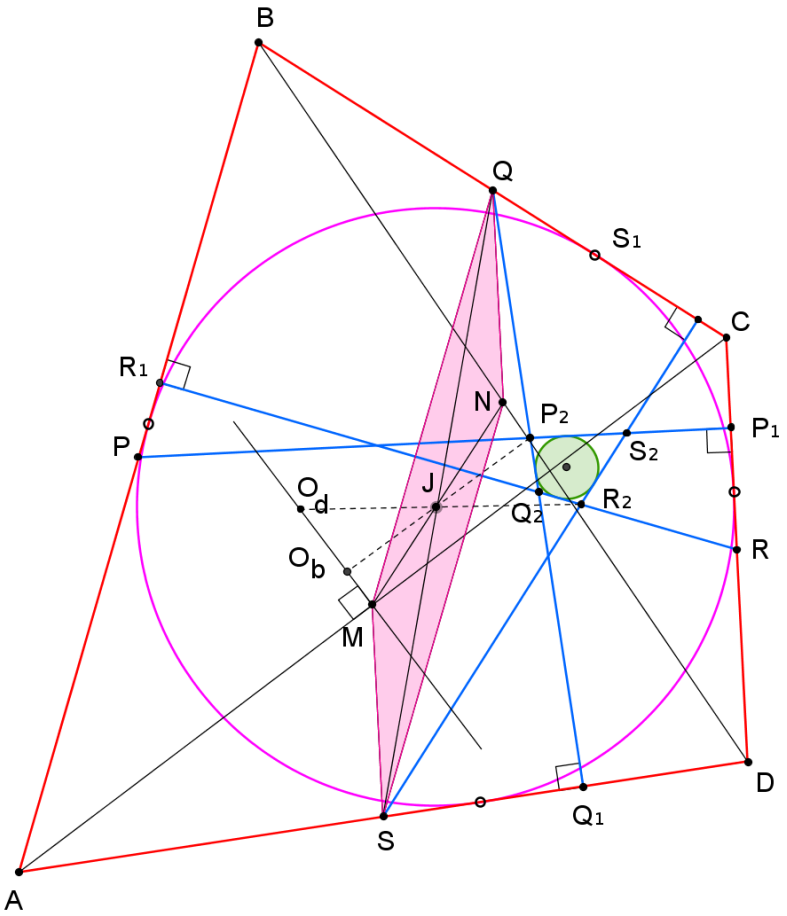


Fig. 4

Lad nu M og N være midtpunkter af diagonalerne AC og BD. Så er MQ midtpunktstransversal i ΔABC, så $MQ \parallel AB$ og $MQ = \frac{1}{2} AB$. Linjestykket NS er midtpunktstransversal i ΔABD, så $NS \parallel AB$ og $NS = \frac{1}{2} AB$. Altså er MQ og NS lige lange og parallelle, så $\square SNQM$ er et parallelogram. Da midtpunktet af SQ er J, vil M ved en spejling i J føres over i N og omvendt (fig. 4).

Punkterne O_b og O_d ligger på midtnormalen for AC. Da spejlbillederne af O_b og O_d i J er P_2 og R_2, ligger P_2 og R_2 på en linje gennem N, der er vinkelret på AC (fig. 5). På samme måde ligger O_a og O_c på midtnormalen for BD, og dermed ligger Q_2 og S_2 på en linje gennem M vinkelret på BD.

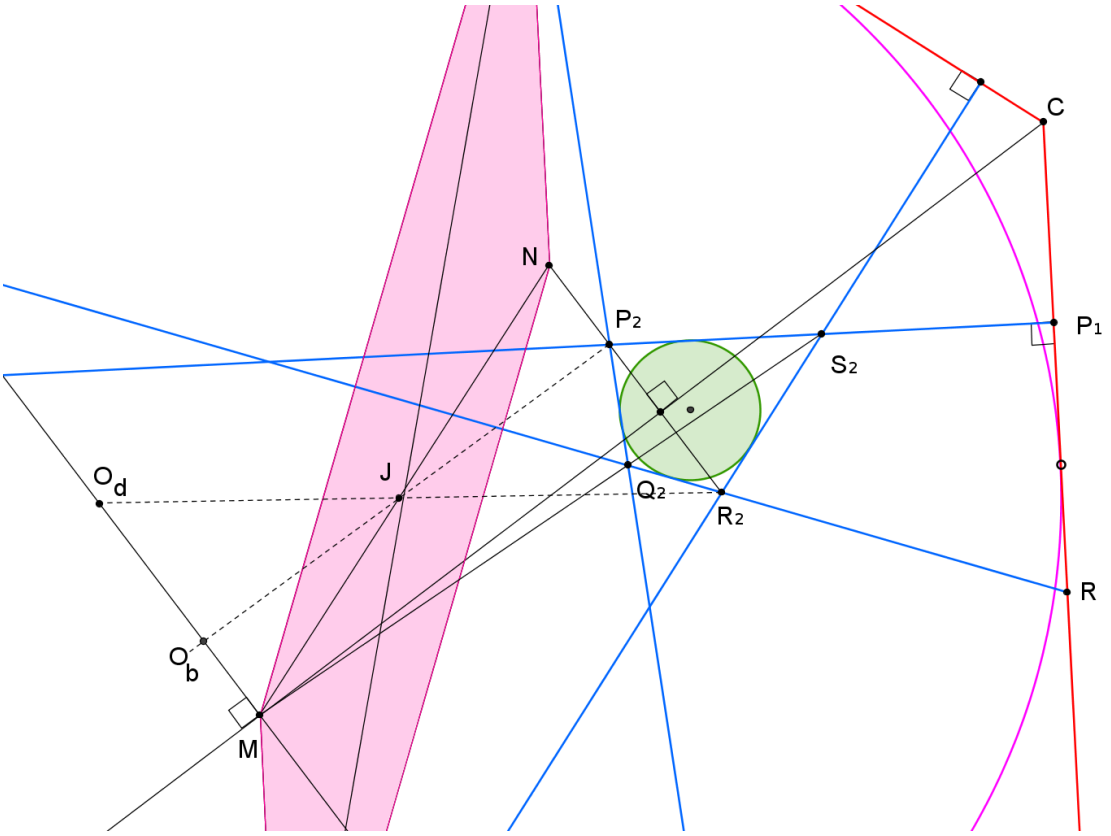


Fig. 5

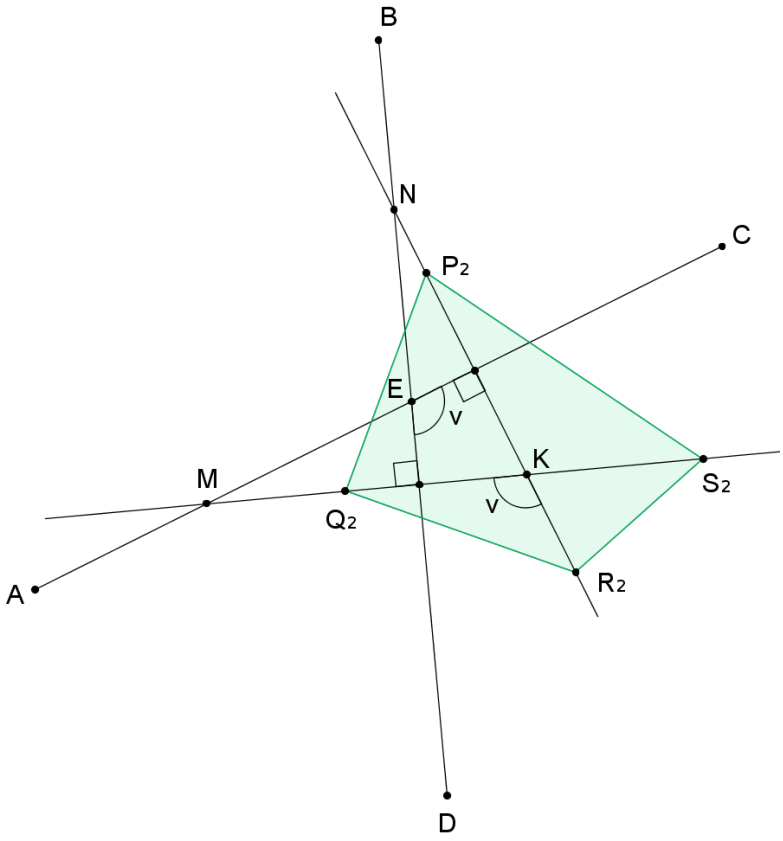


Fig. 6

Nu viser vi, at en af vinklerne mellem diagonalerne i $\square ABCD$ er den samme som en af vinklerne mellem diagonalerne i $\square P_2Q_2R_2S_2$. Diagonalerne i $\square ABCD$ og i $\square P_2Q_2R_2S_2$ skærer hinanden i E og K. Som bemærket oven for er linjen gennem M, Q_2 og S_2 vinkelret på BD, og linjen gennem N, P_2 og R_2 er vinkelret på AC. På en skematisk figur (fig. 6) ser vi, at der dannes en firkant med K og E som modstående vinkelspidser. Denne firkant indeholder to modstående rette vinkler, så vinklerne markeret v er lige store.

Vi indfører følgende:

Definition. To firkanter kaldes *tvillinger*, hvis vinklerne i den ene er supplementvinkler i den anden og diagonalerne i de to firkanter danner samme vinkel med hinanden.

Vi har oven for set, at $\square ABCD$ og $\square O_aO_bO_cO_d$ er tvillinger eller at $\square ABCD$ og $\square P_2Q_2R_2S_2$ er tvillinger.
Der gælder nu følgende sætning om tvillingfirkanter:

Sætning. En konveks firkant har på nær ligedannethed præcis én tvilling.

Bevis. Vi viser først entydigheden. Lad $\square PQRS$ og $\square KLMN$ være tvillinger til $\square ABCD$.
De to firkanter er altså ligedannede og har vinkler, der er supplementvinkler til vinklerne i $\square ABCD$, og desuden er vinklen mellem deres diagonaler den samme.

Vi kan formindske/forstørre og dreje $\square KLMN$, så $KL = PQ$ og derefter anbringe $\square KLMN$, så K falder i P og L i Q.
Antag først, at M ligger på forlængelsen af QR ud over R og N på forlængelsen af PS ud over S (fig. 7). Linjestykkerne RS og NM er parallelle, da $\square PQRS$ og $\square KLMN$ er ligedannede, dvs. de har de samme vinkler.

Lad T og U være skæringspunkter mellem diagonalerne i $\square PQRS$ og $\square KLMN$. Så er vinklen $\angle PTQ$ mellem diagonalerne i $\square PQRS$ større end vinklen $\angle KUL$ mellem diagonalerne i $\square KLMN$. Dette er imidlertid i strid med, at de to firkanter er tvillinger til $\square ABCD$.

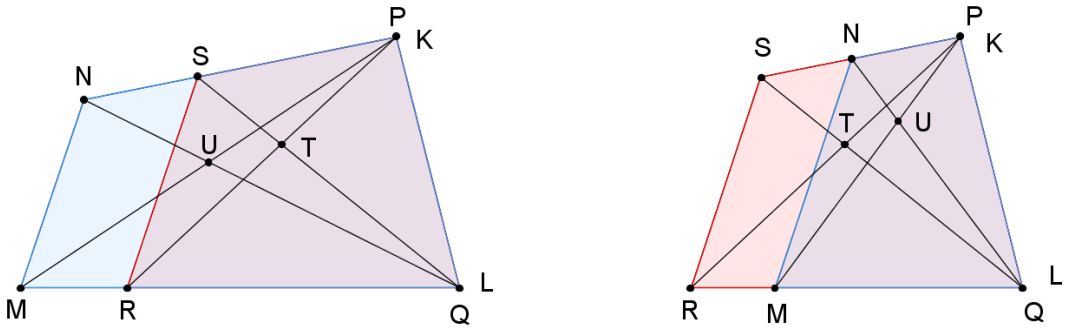


Fig. 7

Antag derefter, at M ligger mellem Q og R, og N mellem P og S. Her får vi, at $\angle PTQ < \angle KUL$, hvilket igen er i strid med, at vinklerne mellem de to firkanters diagonaler er den samme.
Altså må NM og SR falde sammen og dermed har $\square ABCD$ på nær ligedannethed højst én tvilling.

Derefter viser vi eksistensen af en tvilling til $\square ABCD$ ved faktisk at konstruere en sådan. Vi går ud fra, at $\square ABCD$ ikke er et parallelogram og betegner skæringspunktet mellem BC og AD med O. Linjen gennem D parallel med AC skærer BC i B_1, og linjen gennem C parallel med BD skærer AD i A_1 (fig. 8). Vi viser, at $\square A_1B_1CD$ er tvilling til $\square ABCD$.

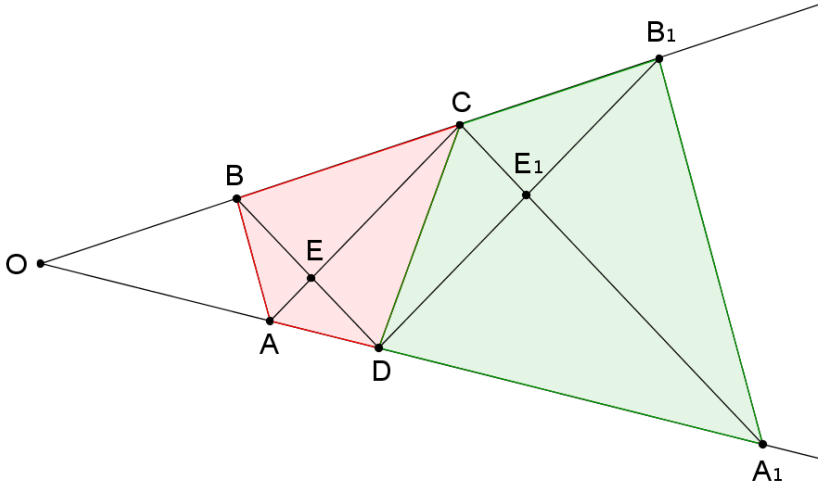


Fig. 8

Lad E og E_1 være diagonalernes skæringspunkt i $\square ABCD$ og $\square A_1B_1CD$. Da $B_1E_1 \square CE$ og $A_1E_1 \square DE$, danner de to firkanters diagonaler samme vinkel med hinanden. Desuden er

$$\angle BCD = 180° - \angle B_1CD \quad \text{og} \quad \angle ADC = 180° - \angle A_1DC \ .$$

Vi mangler så at vise, at $\angle ABC$ og $\angle A_1B_1C$ er supplementvinkler, og at $\angle BAD$ og $\angle B_1A_1D$ er supplementvinkler, dvs. vi skal vise, at $AB \parallel A_1B_1$.

Vi har, at ΔOBD og ΔOCA_1 er ensvinklede, så

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OA_1} \quad \text{eller} \quad OB \cdot OA_1 = OC \cdot OD \ .$$

Da ΔOAC og ΔODB_1 er ensvinklede, er

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB_1} \quad \text{eller} \quad OC \cdot OD = OA \cdot OB_1 \ .$$

Dermed er

$$OB \cdot OA_1 = OA \cdot OB_1 \quad \text{eller} \quad \frac{OB}{OA} = \frac{OB_1}{OA_1} \ ,$$

så ΔOBA og ΔOB_1A_1 er ensvinklede. Altså er $AB \parallel A_1B_1$. Dermed er sætningen bevist.

Vi viser nu, at hvis $\square ABCD$ er omskrivelig, er dens tvillingfirkant det også. Dermed er opgaven løst.

Lad altså $\square ABCD$ være omskrivelig (fig. 9). Linjerne BC og AD skærer hinanden i O og I_1 er centrum for den indskrevne cirkel c_1. En cirkel c_2 med centrum I_2 er ydre røringscirkel for ΔOCD.

Punkterne A_1 og B_1 ligger på AD og BC, så $A_1B_1 \parallel AB$.
Vi vil vise, at $\square A_1B_1CD$ er tvilling til $\square ABCD$.

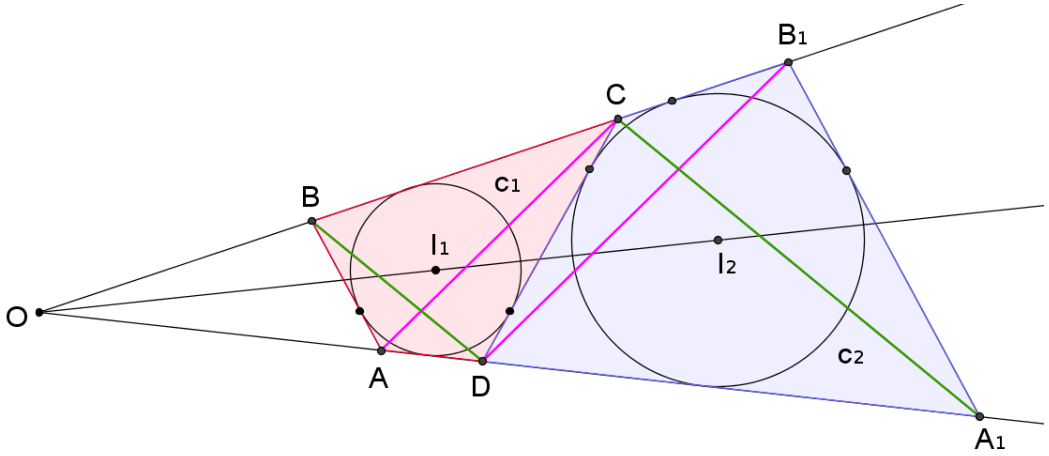


Fig. 9

Vi ser, at vinklerne i de to firkanter parvis er supplementvinkler. Vi skal derefter vise, at diagonalerne i de to firkanter danner samme vinkel med hinanden. Dette sker ved at vise, at $AC \parallel DB_1$ og $BD \parallel CA_1$.

Vi har, at

$$AC \parallel DB_1 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta OAC \text{ er ensvinklet med } \Delta ODB_1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB_1} \quad \Leftrightarrow \quad OA \cdot OB_1 = OC \cdot OD$$

og

$$BD \parallel CA_1 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta OBD \text{ er ensvinklet med } \Delta OCA_1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{OB}{OC} = \frac{OD}{OA_1} \quad \Leftrightarrow \quad OB \cdot OA_1 = OC \cdot OD \ .$$

Vi ønsker altså at vise, at

$$OA \cdot OB_1 = OB \cdot OA_1 = OC \cdot OD \ .$$

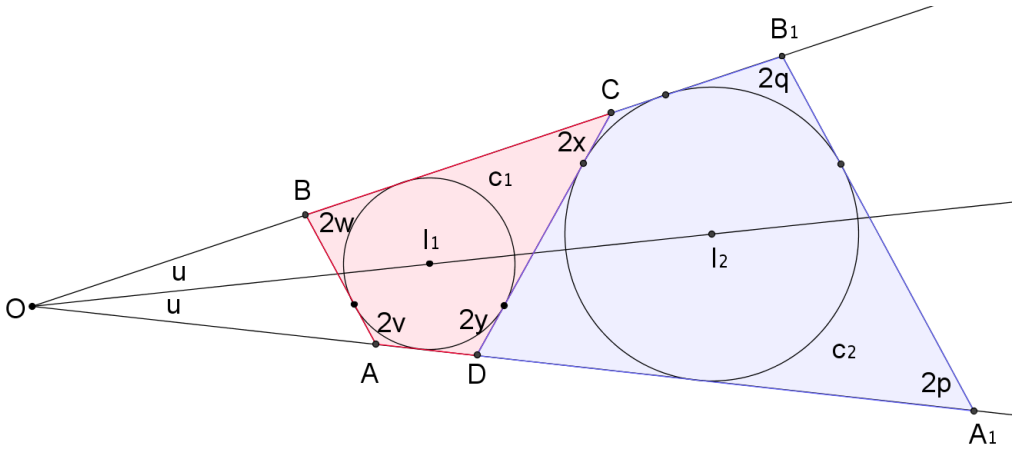


Fig. 10

I □*ABCD* betegnes vinklerne således (fig. 10):

$$\angle BAD = 2v \ , \ \angle ABC = 2w \ , \ \angle BCD = 2x \ , \ \angle CDA = 2y \ ,$$

og i □A_1B_1CD sætter vi

$$\angle DA_1B_1 = 2p \ , \ \angle A_1B_1C = 2q \ .$$

Desuden sætter vi $\angle AOB = 2u$.

I Δ*OAB* får vi

$$180° - 2v + 180° - 2w + 2u = 180° \quad \Leftrightarrow \quad v + w = 90° + u \ .$$

I Δ*OCD* fås

$$2x + 2y + 2u = 180° \quad \Leftrightarrow \quad x + y + u = 90° \ . \qquad (1)$$

Da $AB \parallel A_1B_1$ er

$$\angle BAD = 180° - \angle DA_1B_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2v = 180° - 2p$$

og

$$\angle ABC = 180° - \angle A_1B_1C \quad \Leftrightarrow \quad 2w = 180° - 2q \ .$$

Dermed er

$$v + p = w + q = 90° \ . \qquad (2)$$

Videre er

$$\angle ODI_2 = \angle ODC + \angle CDI_2 = \angle ODC + \tfrac{1}{2}\angle CDA_1$$

$$= 2y + \tfrac{1}{2}(180° - \angle ADC) = 2y + \tfrac{1}{2}(180° - 2y) = y + 90°$$

og ved brug af (1) fås

$$\angle OI_1C = 180° - \angle COI_1 - \angle OCI_1 = 180° - (u + x) = 180° - (90° - y) = 90° + y ,$$

Altså er $\angle ODI_2 = \angle OI_1C$. Desuden er $\angle COI_1 = \angle DOI_2 = u$, så ΔODI_2 og ΔOI_1C er ensvinklede (fig. 11). Så er

$$\frac{OC}{OI_1} = \frac{OI_2}{OD} \text{ eller } OC \cdot OD = OI_1 \cdot OI_2 \ .$$

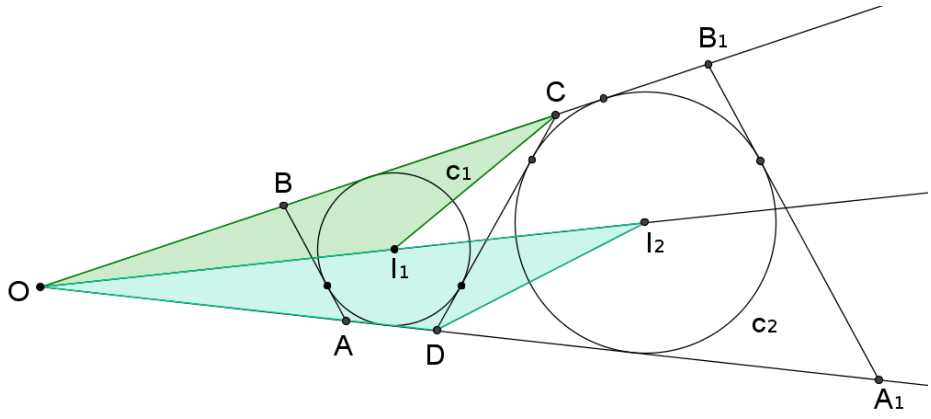


Fig. 11

Vi får desuden

$$\angle OI_2B_1 = 180° - \angle I_2OB_1 - \angle I_2B_1O = 180° - u - q \qquad (3)$$

og

$$\angle OAI_1 = \angle OAB + \angle BAI_1 = 180° - 2v + \tfrac{1}{2}\angle BAD = 180° - 2v + \tfrac{1}{2}\cdot 2v = 180° - v\,. \qquad (4)$$

I ΔOB_1A_1 er

$$2u + 2p + 2q = 180° \quad \Leftrightarrow \quad u + q = 90° - p\,,$$

så vi af (2), (3) og (4) får

$$\angle OI_2B_1 = 180° - (u+q) = 180° - 90° + p = 90° + p = 90° + (90° - v) = 180° - v\,.$$

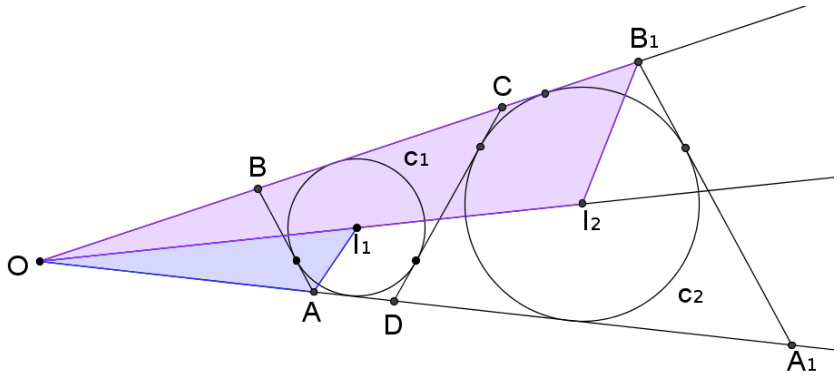


Fig. 12

Da altså $\angle OI_2B_1 = \angle OAI_1$, er ΔOI_2B_1 og ΔOAI_1 ensvinklede, så (fig. 12)

$$\frac{OI_2}{OB_1} = \frac{OA}{OI_1} \quad \text{eller} \quad OA\cdot OB_1 = OI_1\cdot OI_2\,.$$

Ved bogstavombytning fås, at

$$OB_1\cdot OA = OI_1\cdot OI_2\,.$$

I alt har vi så, at

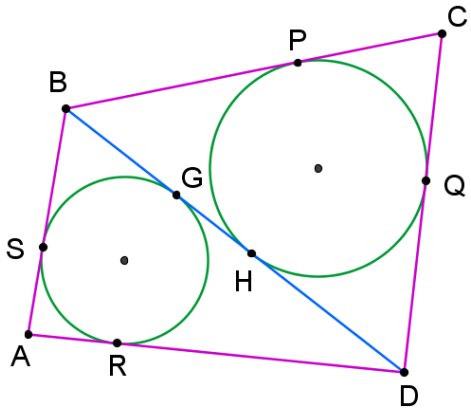
$$OA\cdot OB_1 = OB\cdot OA_1 = OC\cdot OD\,,$$

hvilket er det ønskede.

Beviser og argumenter oven for afhænger af de figurer, de henviser til. Ved at ændre på placeringen af firkanternes spidse og stumpe vinkler og på deres antal, fås andre typer af figurer. En fuldstændig besvarelse af opgaven kræver derfor en grundig undersøgelse af alle disse muligheder. Dette projekt forbigår vi udmattede her.

Følgende besvarelse er modtaget fra Roger Bengtsson, Lund.
Den bygger noget af vejen på analytisk geometri i form af komplekse tal.

Vi husker, at der gælder følgende (velkendte) kriterium for, at en firkant er omskrivelig:



Sætning 1. □*ABCD* er omskrivelig netop hvis summen af det ene par modstående sider er lig med summen af det andet par modstående sider.

Vi skal vise et par andre kriterier (dvs. nødvendige og tilstrækkelige betingelser) for en firkants omskrivelighed.

Sætning 2. I □*ABCD* trækkes en af diagonalerne, fx *BD*. De indskrevne cirkler i Δ*BCD* og Δ*ABD* tangerer *BD* i *H* og *G*. Så gælder at □*ABCD* er omskrivelig netop hvis punkterne *G* og *H* falder sammen.

Bevis. Vi bruger betegnelserne *P*, *Q*, *R*, *S* for røringspunkterne mellem de indskrevne cirkler i trekanterne som vist. Efter sætning 1 gælder, at □*ABCD* er omskrivelig netop hvis

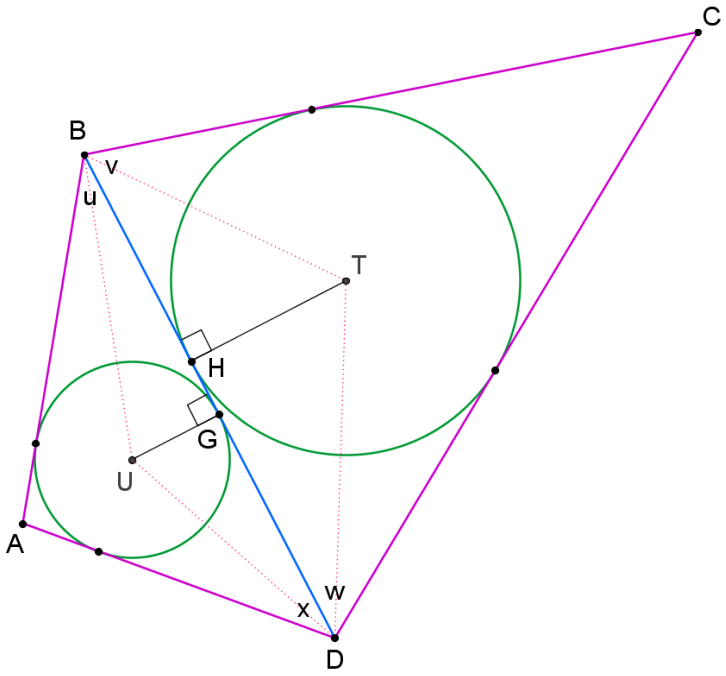
$$BS + SA + DQ + CQ = BP + CP + AR + DR\ .$$

Da $SA = AR$, $CQ = CP$, $BP = BH$ og $DR = DG$ er dette ensbetydende med

$$BP - BS = DQ - DR \quad \Leftrightarrow \quad BH - BG = DH - D$$

$$\Leftrightarrow \quad GH = DH - (DH + GH) \quad \Leftrightarrow \quad GH = -GH\ ,$$

hvilket netop betyder, at *G* og *H* falder sammen.



Vi bruger for nemheds skyld følgende betegnelserne for de vinkler, som diagonalen BC danner med firkantens sider:

$$u = \angle ABD \ , \ v = \angle DBC \ , \ x = \angle ADB \ , \ w = \angle BDC \ .$$

Desuden er T og U centre for de indskrevne cirkler i ΔBCD og ΔABD. Forbindelseslinjerne mellem vinkelspidserne B og D og centrene U og T halverer vinklerne u, v, x og w.
Da gælder:

Sætning 3. $\square ABCD$ er omskrivelig netop hvis

$$\tan\tfrac{u}{2}\cdot\tan\tfrac{w}{2} = \tan\tfrac{v}{2}\cdot\tan\tfrac{x}{2}.$$

Bevis. Vi har, at

$$\tan\tfrac{u}{2} = \frac{UG}{GB} \ , \ \tan\tfrac{x}{2} = \frac{UG}{GD} \ , \ \tan\tfrac{w}{2} = \frac{TH}{HD} \ , \ \tan\tfrac{v}{2} = \frac{TH}{HB} \ .$$

Dermed er

$$\tan\tfrac{u}{2}\cdot\tan\tfrac{w}{2} = \tan\tfrac{v}{2}\cdot\tan\tfrac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{UG}{GB}\cdot\frac{TH}{HD} = \frac{TH}{HB}\cdot\frac{UG}{GD}$$

$$\Leftrightarrow \quad GB\cdot HD = HB\cdot GD \quad \Leftrightarrow \quad \frac{HB}{GB}\cdot\frac{GD}{HD} = 1 \ . \qquad (1)$$

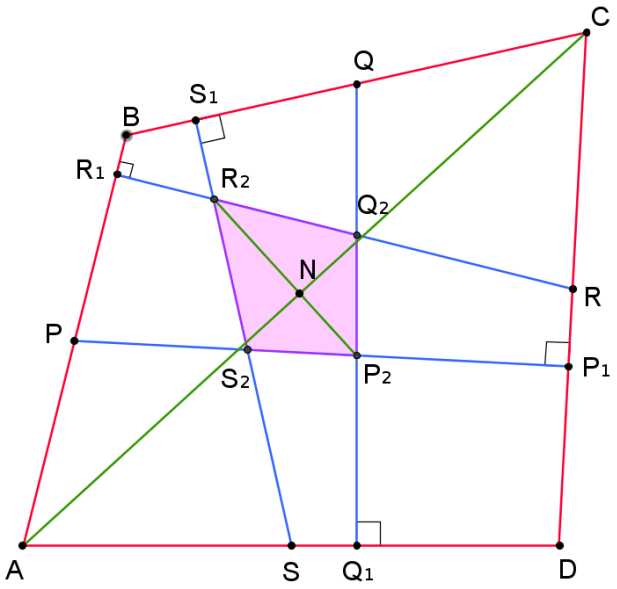
Nu gælder tydeligvis, at

$$\frac{HB}{GB} \le 1 \quad \text{og} \quad \frac{GD}{HD} \le 1 \ ,$$

og ligningen (1) er derfor netop opfyldt, hvis G og H falder sammen, dvs. efter sætning 2 hvis $\square ABCD$ er omskrivelig.

Hvis punkterne G og H har en anden placering i forhold til hinanden, skal betegnelserne og formlerne oven for modificeres tilsvarende.

Sætning 4. Lad $\square ABCD$ være en (ikke nødvendigvis omskrivelig) firkant. Den konstruktion, der er nævnt i opgaven, giver $\square P_2Q_2R_2S_2$. Da vil diagonalerne AC og P_2R_2 være ortogonale.



Bevis. Vi foretager et bevis ved regninger med komplekse tal. Vi kan dreje og skalere firkanten op eller ned og anbringe den i koordinatsystemet i den komplekse plan, så vinkelspidserne A, B, C og D svarer til de komplekse tal

$$A : 0 \quad , \quad B : z = a + b\mathrm{i} \quad , \quad C : w = c + d\mathrm{i} \quad , \quad D : 1 \quad .$$

Vi betegner linjerne således:

$$m_1 : QQ_1 \quad , \quad m_2 : PP_1 \quad , \quad m_3 : RR_1 \quad , \quad m_4 : SS_1 \quad .$$

Midtpunkterne af siderne i $\square ABCD$ svarer til de komplekse tal

$$\mathrm{P} : \frac{z}{2} \quad , \quad \mathrm{Q} : \frac{z+w}{2} \quad , \quad \mathrm{R} : \frac{w+1}{2} \quad , \quad \mathrm{S} : \frac{1}{2} \quad .$$

Linjernes parameterfremstillinger er med kompleks skrivemåde:

$$m_1 : \frac{z+w}{2} + \mathrm{i}(1-0)t \quad , \quad m_2 : \frac{z}{2} + i(w-1)t \quad ,$$

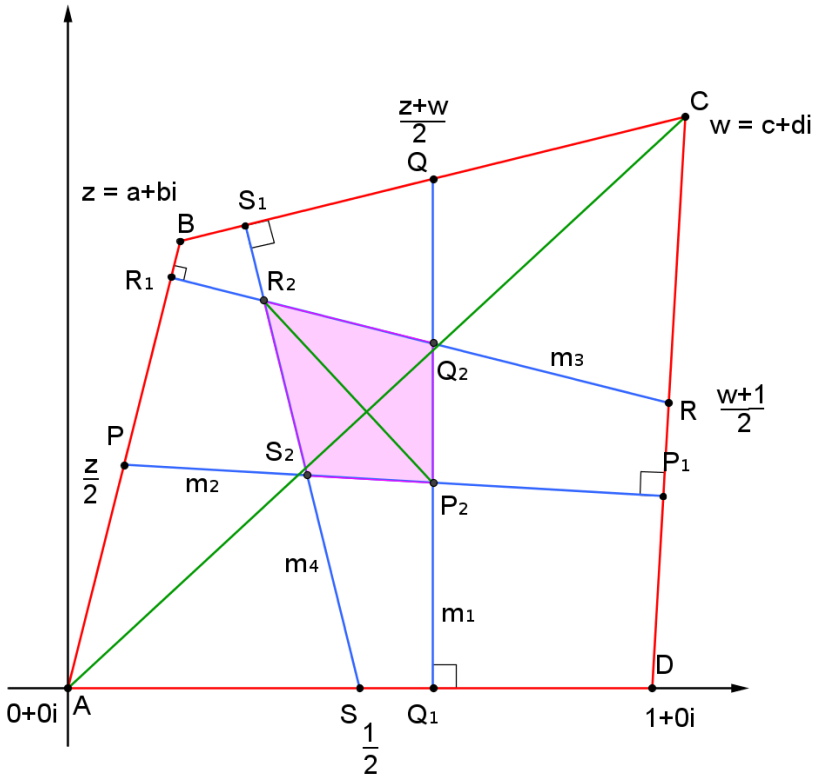
$$m_3 : \frac{w+1}{2} + \mathrm{i}(0-z)t \quad , \quad m_4 : \frac{1}{2} + \mathrm{i}(z-w)t \quad .$$

Vi har her brugt, at linjerne går gennem midtpunkterne

$$\frac{z+w}{2} \; , \; \frac{z}{2} \; , \; \frac{w+1}{2} \; , \; \frac{1}{2}$$

af siderne BC, AB, CD og AD i firkanten og har normalvektorerne

$$\overrightarrow{AD} \; , \; \overrightarrow{DC} \; , \; \overrightarrow{BA} \; , \; \overrightarrow{CB}.$$



Skæringspunktet P_2 mellem m_1 og m_2 fås ved at løse ligningen

$$\frac{z+w}{2}+\mathrm{i}t=\frac{z}{2}+\mathrm{i}(w-1)s \quad\Leftrightarrow\quad \frac{w}{2}+\mathrm{i}t=\mathrm{i}(w-1)s$$

$$\Leftrightarrow\quad c+d\mathrm{i}+2\mathrm{i}t=2\mathrm{i}(c+d\mathrm{i}-1)s \quad\Leftrightarrow\quad c+2ds=\mathrm{i}(2cs-2s-d+2t)$$

$$\Leftrightarrow\quad c+2ds=0\ \wedge\ 2cs-2s-d+2t=0\,.$$

Heraf fås $s=\frac{-c}{2d}$, så vi får det komplekse tal svarende til punktet P_2:

$$\frac{z}{2}+\mathrm{i}(w-1)s=\frac{a+b\mathrm{i}}{2}+\mathrm{i}(c+d\mathrm{i}-1)\cdot\frac{-c}{2d}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\mathrm{i}-\frac{c}{2d}(\mathrm{i}c-d-\mathrm{i})$$

$$=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\mathrm{i}-\frac{c^2}{2d}\mathrm{i}+\frac{c}{2}+\frac{c}{2d}\mathrm{i}=\frac{a+c}{2}+\frac{bd+c-c^2}{2d}\mathrm{i}\,.$$

Skæringspunktet R_2 mellem m_3 og m_4 fås ved at løse ligningen

$$\frac{1}{2}+\mathrm{i}(z-w)t=\frac{w+1}{2}+\mathrm{i}(0-z)s \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}+\mathrm{i}(a+b\mathrm{i}-c-d\mathrm{i})t=\frac{c+d\mathrm{i}+1}{2}-\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})s\,,$$

som efter et par trælse regninger giver

$$(-2b+2d)t-c-2bs=\mathrm{i}(-2at+2ct+d-2as)\ .$$

Heraf slutter vi, at

$$(-2b+2d)t-c-2bs=0 \quad\Leftrightarrow\quad (2d-2b)t=c+2bs \qquad (2)$$

og

$$-2at+2ct+d-2as \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{2as-d}{2c-2a}\,,$$

hvilket indsat i (2) giver

$$(2d-2b)\cdot\frac{2as-d}{2c-2a}=c+2bs\ ,$$

og efter en del kedsommelig algebra får vi

$$s=\frac{c^2+d^2-bd-ac}{2ad-2bc}\ . \qquad (3)$$

Dette indsættes i parameterfremstillingen for m_2, så vi får det komplekse tal svarende til punktet R_2:

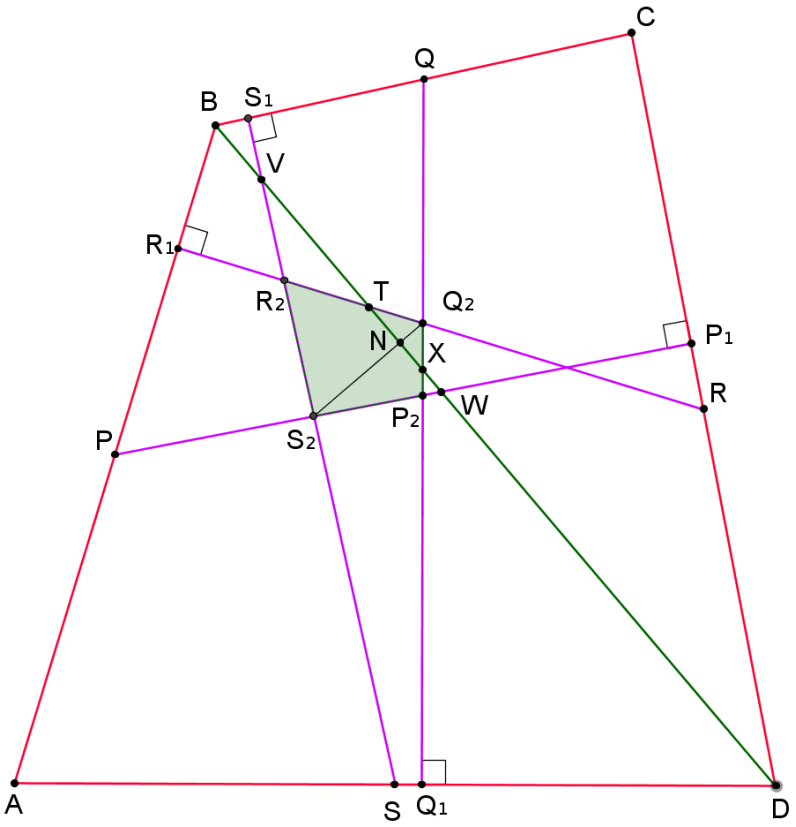
$$\frac{w+1}{2}-\mathrm{i}zs=\frac{c+d\mathrm{i}+1}{2}-\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})s=\frac{c+1}{2}+bs+\left(\frac{d}{2}-as\right)\mathrm{i}\ .$$

Nu kan vi beregne hældningen k_1 for P_2R_2 som forskellen mellem imaginærdelene divideret med forskellen mellem realdelene for de to punkter:

$$k_1=\frac{\frac{bd+c-c^2}{2d}-\left(\frac{d}{2}-as\right)}{\frac{a+c}{2}-\left(\frac{c+1}{2}+bs\right)}=\frac{bd+c-c^2-d^2+2das}{d(a+c)-d(c+1)-2bds}\ .$$

Heri indsættes udtrykket for s fra (3) og efter et orgie i algebra får man endelig $k_1=-\frac{c}{d}$

Da hældningen for AC er $k_2=\frac{d}{c}$, er $k_1k_2=-1$, så sætningen er bevist.



Vi kan herefter gå i gang med at bevise sætningen i opgaven.

Lad □*ABCD* være omskrivelig. Så gælder efter sætning 3 for vinklerne *u*, *v*, *x*, *w* mellem diagonalen *BD* og siderne, at

$$\tan\tfrac{u}{2}\cdot\tan\tfrac{w}{2}=\tan\tfrac{v}{2}\cdot\tan\tfrac{x}{2}. \qquad (4)$$

Diagonalen BD skærer RR_1 og SS_1 i T og V. Så er ΔBR_1T og ΔQ_2NT retvinklede og desuden er $\angle R_1TB=\angle Q_2TN$, så trekanterne er ensvinklede. Altså er $\angle TQ_2N=u$. På samme måde er ΔBS_1V og ΔS_2NV ensvinklede, så $\angle S_1BV=\angle NS_2V=v$.

Lad BD skære QQ_1 og PP_1 i X og W. Så er ΔDXQ_1 og ΔQ_2XN ensvinklede, så

$$\angle P_2Q_2S_2=\angle XQ_2N=\angle XDQ_1=x.$$

Desuden er ΔS_2NW og ΔDP_1W ensvinklede, så

$$\angle Q_2S_2P_2=\angle NS_2W=\angle P_1DN=w.$$

Da ligningen (4) er opfyldt for vinklerne mellem diagonalen S_2Q_2 og siderne i $\square P_2Q_2R_2S_2$, er denne firkant omskrivelig efter sætning 3.