Svar på opgave 371 (August 2020)

Opgave:

Et par opgaver med hele positive tal

a. Et helt positivt tal kaldes *overtroisk*, hvis det er 13 gange sin egen tværsum. Bestem alle overtroiske tal.

b. Et talsæt (a,b,c) af tre hele positive tal, hvor $a < b < c$, kaldes en *årtusindtrio*, hvis det største og det mindste tal har en forskel på 2001 og summen af vilkårlig to af tallene er et kvadrattal. Bestem samtlige årtusindtrioer.

c. Bestem samtlige femcifrede kvadrattal, der ender på to ens cifre.

d. Bestem antallet af ligebenede, stumpvinklede trekanter med heltallige sider, når omkredsen er 2020.

Besvarelse:

a.

1. metode.

Et overtroisk tal $(ab)_{10}$ med to cifre opfylder, at

$$10a + b = 13(a + b) \quad \text{eller} \quad 3a + 12b = 0 \ ,$$

hvilket er umuligt.
Hvis et trecifret tal $(abc)_{10}$ er overtroisk, gælder

$$100a + 10b + c = 13(a + b + c) \ ,$$

hvoraf

$$100a + 10b + c = 13a + 13b + 13c \quad \Leftrightarrow \quad 87a - 3b - 12c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 29a = b + 4c \ .$$

Den størst mulige værdi for $b + 4c$ er 45 og den opnås for $b = c = 9$. Derfor må $a = 1$, så ligningen får udseendet

$$b + 4c = 29$$

med løsningerne

$$(b,c) \ : \ (1,7) \ , \ (5,6) \ , \ (9,5) \ .$$

Dermed er tallene 117, 156 og 195 de eneste mulige trecifrede overtroiske tal, og man kontrollerer let, at de opfylder betingelsen.
Et firecifret overtroisk tal $(abcd)_{10}$ opfylder, at

$$1000a + 100b + 10c + d = 13(a + b + c + d) \ . \qquad (1)$$

Tallet på venstre side af lighedstegnet er mindst 1000, mens tallet på højre side højst er

$13 \cdot (9+9+9+9) = 468$. Derfor findes ingen firecifrede overtroiske tal.
Endelig findes ingen overtroiske tal med mere end fire cifre, idet hvert ekstra ciffer bidrager med mindst 1000 til tallet på venstre side i den tilsvarende ligning (1), mens der på højre side bidrages med højst $13 \cdot 9 = 117$.
Dermed er de eneste overtroiske tal de tre anførte.

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

For et naturligt tal n findes ikke-negative hele tal a_0, a_1 og a_2, så

$$n = 100a_2 + 10a_1 + a_0 \ ,$$

hvor a_0 og a_1 begge er mindre end 10 og mindst et af tallene a_0, a_1, a_2 er positivt. Med $T(n)$ betegner vi tværsummen af n, så

$$T(n) = T(a_2) + a_1 + a_0 \ .$$

I. Hvis $a_2 > 1$, er $T(a_2) \leq a_2$, så $-T(a_2) \geq -a_2$ og vi får

$$n - 13 \cdot T(n) = 100a_2 + 10a_1 + a_0 - 13(T(a_2) + a_1 + a_0)$$

$$\geq 100a_2 + 10a_1 + a_0 - 13a_2 - 13a_1 - 13a_0 = 87a_2 - 3a_1 - 12a_0 \ .$$

Nu er

$$87a_2 \geq 87 \cdot 2 \quad , \quad -3a_1 \geq -3 \cdot 9 \quad , \quad -12a_0 \geq -12 \cdot 9 \ ,$$

så

$$n - 13 \cdot T(n) \geq 87 \cdot 2 - 3 \cdot 9 - 12 \cdot 9 = 39 > 0 \ .$$

Hvis n er overtroisk, er $n - 13 \cdot T(n) = 0$, og dette er altså umuligt, hvis $a_2 > 1$.

II. Hvis $a_2 = 1$, er

$$n - 13 \cdot T(n) = 100a_2 + 10a_1 + a_0 - 13(T(1) + a_1 + a_0)$$

$$= 100 + 10a_1 + a_0 - 13 - 13a_1 - 13a_0 = 87 - 3a_1 - 12a_0 \ .$$

Hvis n er overtroisk, er

$$87 - 3a_1 - 12a_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 29 - 4a_0 \ .$$

Denne ligning har løsningerne

$$(a_1, a_0) \ : \ (9,5) \ , \ (5,6) \ , \ (1,7) \ .$$

Samtlige overtroiske tal er derfor 195, 156 og 117.

---

b.

1. metode.

Hvis (a,b,c) er en årtusindtrio, findes naturlige tal x, y og z, så

$$x^2 = a + b \quad , \quad y^2 = a + c \quad , \quad z^2 = b + c \ .$$

Vi har så, at

$$b < c \quad \Leftrightarrow \quad a + b < a + c \quad \Leftrightarrow \quad x < y$$

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c \quad \Leftrightarrow \quad y < z \ .$$

Altså er $x < y < z$. Desuden er

$$2001 = c - a = (z^2 - b) - (x^2 - b) = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x) \ .$$

Primfaktoropløsningen af 2001 er $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Derfor er divisorerne i 2001 tallene 1, 3, 23, 29, 69, 87, 667, 2001. Da $z - x < z + x$, får vi fire tilfælde.

I. $z - x = 1$, $z + x = 2001$. Så får vi, at $x = 1000$ og $z = 1001$. Da $x < y < z$ er dette tilfælde udelukket.

II. $z - x = 3$, $z + x = 667$. Her får vi, at $x = 332$ og $z = 335$.

III. $z - x = 23$, $z + x = 87$. Så er $x = 32$ og $z = 55$.

IV. $z - x = 29$, $z + x = 69$. Så er $x = 20$ og $z = 49$.

I hvert af tilfældene ligger y mellem x og z. Vi har, at

$$y^2 = a + c = 2a + (c - a) = 2a + 2001 .$$

Heraf følger, at y^2 er ulige, så y er ulige. Da $43^2 = 1849$ og $45^2 = 2025$, er $y \geq 45$.
I tilfælde II får vi kun muligheden $y = 333$. I tilfælde III får vi mulighederne $y = 45, 47, 49, 51, 53$ og i tilfælde IV mulighederne $y = 45, 47$.
Vi har, at

$$y^2 = 2a + 2001 \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1}{2}(y^2 - 2001)$$

og

$$c = 2001 + a = 2001 + \tfrac{1}{2}(y^2 - 2001) = \tfrac{1}{2}(y^2 + 2001)$$

og

$$b = x^2 - a = z^2 - c .$$

Så får vi i de forskellige tilfælde:

II. Her er $(x,y,z) = (332,333,335)$, så at

$$(a,b,c)$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}(333^2 - 2001) ,\ 335^2 - \tfrac{1}{2}(333^2 + 2001) ,\ \tfrac{1}{2}(333^2 + 2001)\right) = (54444, 55780, 56445) .$$

III. Vi får tabellen

(x,y,z)	(32,45,55)	(32,47,55)	(32,49,55)	(32,51,55)	(32,53,55)
(a,b,c)	(12,1012,2013)	(104,920,2105)	(200,824,2201)	(300,724,2301)	(404,620,2405)

IV. Her får vi tabellen

(x,y,z)	(20,45,49)	(20,47,49)
(a,b,c)	(12,388,2013)	(104,296,2105)

Der findes altså i alt 8 årtusindtrioer. Hvis $(a,b,c) = (12,388,2013)$ gælder således, at $2013 - 12 = 2001$ og

$$12 + 388 = 20^2 \quad , \quad 12 + 2013 = 45^2 \quad , \quad 388 + 2013 = 49^2 .$$

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Lad p, q og r være naturlige tal hørende til en årtusindtrio, dvs.

$$p^2 = a + b \ , \ q^2 = a + c \quad , \quad r^2 = b + c \ .$$

Så er

$$a < b < c \quad \Leftrightarrow \quad a + b < a + c < b + c \quad \Leftrightarrow \quad p < q < r \ .$$

Vi finder *a*, *b* og *c* udtrykt ved *p*, *q* og *r* og får

$$a = (a + b + c) - (b + c) = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2) - r^2 = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2 - r^2) \ .$$

På same måde er

$$b = \tfrac{1}{2}(p^2 + r^2 - q^2) \quad , \quad c = \tfrac{1}{2}(q^2 + r^2 - p^2) \ .$$

Nu er

$$2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29 = c - a = (b + c) - (a + b) = r^2 - p^2 = (r - p)(r + p) \ ,$$

så $d = r - p$ er divisor i 2001 og $1 < r - p < \sqrt{2001} < 45$. Altså er *d* et af tallene 3, 23, 29.
Idet

$$d = r - p \quad \text{og} \quad \tfrac{2001}{d} = r + p \ ,$$

får vi

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{2001}{d} + d\right) \quad , \quad p = \frac{1}{2}\left(\frac{2001}{d} - d\right) \ .$$

Dermed er

$$a = \tfrac{1}{2}(q^2 - (r^2 - p^2)) = \tfrac{1}{2}(q^2 - 2001)$$

$$b = \tfrac{1}{2}(p^2 + r^2 - q^2)$$

$$c = \tfrac{1}{2}(q^2 + (r^2 - p^2)) = \tfrac{1}{2}(q^2 + 2001) \ .$$

Da *a*, *b* og *c* er hele, er *q* ulige og $q^2 > 2001$, dvs. $q > 45$. Vi deler op i tilfælde efter værdien af *d*.

I. $d = 3$. Her er

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2001}{3} - 3\right) = 332 \quad , \quad r = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2001}{3} + 3\right) = 335.$$

Da $p < q < r$ og *q* er ulige, er $q = 333$. Vi får så

$$(a,b,c) = \left(\tfrac{1}{2}(333^2 - 2001) \ , \ \tfrac{1}{2}(332^2 + 335^2 - 333^2) \ , \ \tfrac{1}{2}(333^2 + 2001)\right)$$
$$= (54444 \ , \ 55780 \ , \ 56445) \ .$$

II. $d = 23$. Her er

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2001}{23} - 23\right) = 32 \ , \ r = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2001}{23} + 23\right) = 55 \ ,$$

og da $p < q <$ r og *q* er ulige, har vi værdierne

$$q \ : \ 45, 47, 49, 51, 53 \ .$$

Ved indsættelse fås årtusindtrioerne

$$(a,b,c) \ : \ (12,1012,2013) \ , \ (104,920,2105) \ , \ (200,824,2201) \ ,$$
$$(300,724,2301) \ , \ (404,620,2405) \ .$$

III. $d = 29$. Her er

$$p = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2001}{29} - 29\right) = 20 \ , \ r = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2001}{29} + 29\right) = 49 \ .$$

Værdierne for *q* er

$$q \ : \ 45 \ , 47 \ ,$$

og vi får årtusindtrioerne

$$(a,b,c)\ :\ (12,388,2013)\ ,\ (104,296,2105)\ .$$

---

c.

1. metode.

Lad $n = (abcdd)_{10}$ være et kvadrattal af den ønskede type. Så er

$$n = 100(abc)_{10} + 11d \equiv 3d \pmod 4\ .$$

Nu er alle kvadrattal kongruente med 0 eller 1 modulo 4, og det sidste ciffer d i et kvadrattal er 0, 1, 4, 5, 6 eller 9. Vi får tabellen

d	0	1	4	5	6	9
$3d$ (mod 4)	0	3	0	3	2	3

Altså er $d = 0$ eller $d = 4$, dvs. femcifrede kvadrattal, der ender på to ens cifre, ender på …00 eller på …44.

I. Hvis $d = 0$, er $n = 100(abc)_{10}$ et kvadrattal, dvs. $(abc)_{10}$ er et kvadrattal. Altså har vi mulighederne

$$(abc)_{10}:\ 10^2\ ,\ 11^2\ ,\ 12^2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ 31^2\ ,$$

så vi får 22 kvadrattal, nemlig

$$10000\ ,\ 12100\ ,\ 14400\ ,\ .\ .\ .\ ,\ 96100\ .$$

II. Hvis $d = 4$ og n er et kvadrattal, er

$$n = 100(abc)_{10} + 44 = k^2\ ,$$

hvor k er et lige tal, så $k = 2p$. Dermed er

$$100(abc)_{10} = k^2 - 44 = 4p^2 - 44 = 4(p^2 - 11) \quad \Leftrightarrow \quad (abc)_{10} = \frac{p^2-11}{25}\ .$$

Vi gennemgår mulighederne for p ved division med 5.

Hvis $p = 5q$, er $\frac{1}{25}(p^2-11) = \frac{1}{25}(25q^2-11)$ ikke et helt tal.

Hvis $p = 5q + 1$ er

$$\frac{p^2-11}{25} = \frac{25q^2+10q+1-11}{25} = q^2 + \frac{2(q-1)}{5}\ . \tag{1}$$

Dette giver mulighederne q = 11, 16, 21, 26, 31, fordi tallet i (1) skal være trecifret. Vi får tabellen

q	11	16	21	26	31
n	12544	26244	44944	68644	97344
$\sqrt{n}$	112	162	212	262	312

Hvis $p = 5q + 2$ er

$$\frac{p^2-11}{25} = \frac{25q^2+20q+4-11}{25} = q^2 + \frac{20q-7}{25}\ ,$$

som ikke er et helt tal.

Hvis $p = 5q + 3$ er

$$\frac{p^2-11}{25}=\frac{25q^2+30q+9-11}{25}=q^2+\frac{30q-2}{25} \;,$$

som ikke er hel.
Hvis $p = 5q + 4$ er

$$\frac{p^2-11}{25}=\frac{25q^2+40q+16-11}{25}=q^2+\frac{8q+1}{5} \;,$$

som er et helt tal, hvis $q \equiv 3 \pmod 5$, dvs. vi får $q = 13, 18, 23, 28$. En tabel er følgen- de:

q	13	18	23	28
n	19044	35344	56644	82944
$\sqrt{n}$	138	188	238	288

I alt har vi fundet 22 + 5 + 4 = 31 femcifrede kvadrattal, der ender på to ens cifre.

2. metode (Asger Olesen, Tønder).

Idet $\sqrt{10000}=100$ og $\sqrt{99999}=316,2$ søger vi femcifrede kvadrattal på formen $(abc)_{10}^2$ = $(100a + 10b + c)^2$, hvor $a = 1, 2, 3$ og
$b = 0, 1, 2, \ldots, 8, 9$ og $100 \leq (abc)_{10} \leq 316$ og hvor de to sidste cifre er ens.
Ethvert sådant tal kan skrives på formen

$$(abc)_{10}^2 = (50d \pm r)^2 \;,$$

hvor $d = 2, 3, 4, 5, 6$ og $r = 0, 1, 2, \ldots, 24, 25$. Vi får, at

$$(abc)_{10}^2 = (50d \pm r)^2 = 2500d^2 \pm 100dr + r^2 = 100d(25d \pm r) + r^2 \;.$$

Da $100d(25d \pm r) \geq 0$ for alle relevante værdier for d og r og enten antager værdien 0 eller en værdi, der ender på -00, bestemmes de to sidste cifre i $(abc)_{10}^2$ udelukkende af de to sidste cifre i r^2.
Dette giver følgende muligheder for de to sidste cifre i r^2:

-00, -01, -04, -09, -16, -25, -36, -49, -64, -81, -00, -21, -44,

-69, -96, -25, -56, -89, -24, -61, -00, -41, -84, -29, -76, -25

To ens endecifre er kun muligt, hvis disse er -00 og -44.
Endecifrene -00 optræder kun, hvis $50d \pm r$ ender på 0, så de søgte kvadrattal er

$$100^2,\ 110^2,\ 120^2,\ \ldots,\ 300^2,\ 310^2.$$

Endecifrene -44 svarer til $r = 12$, og de søgte kvadrattal er på formen $(50d \pm 12)^2$, hvor $d = 2, 3, 4, 5, 6$, dog bortset fra $(50 \cdot 2 - 12)^2 = 88^2 = 7744$, der kun er firecifret; vi får altså følgende 9 kvadrattal:

$$112^2,\ 138^2,\ 162^2,\ 188^2,\ 212^2,\ 238^2,\ 262^2,\ 288^2,\ 312^2 \;.$$

---

d.

1. metode.

Lad sidelængderne være x, x og y, hvor x og y er positive hele tal. Vi har, at $y > x$ og at $2x + y = 2020$. Heraf følger, at y er lige. Efter trekantuligheden er

$y < x + x = 2x$, så vi har, at

$$2020 = 2x + y > y + y,$$

så $y < 1010$. De mulige værdier er altså

$$(y,x,x)\ :\ (1008,506,506)\ ,\ (1006,507,507)\ ,\ .\ .\ .\ ,$$

og i almindelighed er

$$(y,x,x)\ :\ (1010 - 2k\ ,\ 505 + k\ ,\ 505 + k)\ ,\ \ k = 1, 2, .\ .\ .\ , 504\ .$$

Ikke alle disse trekanter er imidlertid stumpvinklede. Cosinusrelationen givewr

$$\cos v = \frac{2x^2 - y^2}{2x^2} < 0 \quad \text{så} \quad y^2 > 2x^2\ ,$$

og heri indsættes udtrykkene oven for:

$$(1010 - 2k)^2 > 2(505 + k)^2\ .$$

Dette reduceres til

$$k^2 - 3030k + 255025 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k > 2943{,}355 \quad \vee \quad k < 86{,}645\ .$$

Her kan vi kun bruge $k < 86{,}645$, så vi får de 86 trekanter med sidelængderne

$$(y,x,x)\ :\ (1010 - 2k\ ,\ 505 + k\ ,\ 505 + k)\ ,\ \ k = 1, 2, .\ .\ .\ , 86\ ,$$

eller

$$(y,x,x)\ :\ (1008,506,506)\ ,\ (1006, 507,507)\ ,\ .\ .\ .\ ,\ (840,590,590)\ ,\ (838,591,591)\ .$$

Vi konstaterer, at

$$838^2 = 702244 > 2 \cdot 591^2 = 698562$$

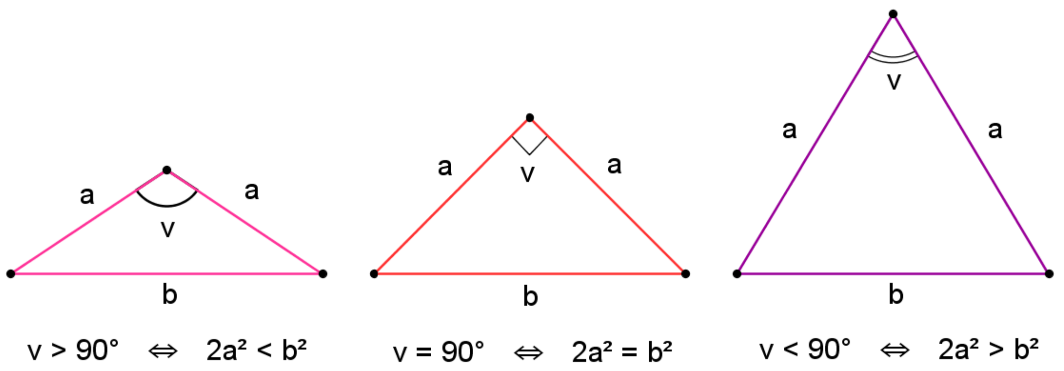
$$836^2 = 698896 < 2 \cdot 592^2 = 700928\ .$$

Den første trekant med sidelængder (1008,506,506) har en topvinkel på 169,81°. Den sidste med sidelængder (838,591,591) har en topvinkel på 90,30°.

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Hvis a er længden af de to lige lange sider og b længden af den sidste side, gælder trekantuligheden $2a > b$ og at

trekanten er stumpvinklet netop hvis $2a^2 < b^2$
trekanten er retvinklet netop hvis $2a^2 = b^2$
trekanten er spidsvinklet netop hvis $2a^2 > b^2$.



For stumpvinklede trekanter gælder altså

$$a\sqrt{2} < b < 2a.$$

Da omkredsen af trekanten er 2020, er b = 2020 - 2a. Dette indsættes i dobbeltuligheden:

$$a\sqrt{2} < 2020 - 2a < 2a \quad \Leftrightarrow \quad a\left(2+\sqrt{2}\right) < 2020 \quad \wedge \quad 2020 < 4a$$

$$\Leftrightarrow \quad a < 591{,}644 \ \wedge \ a > 505 \, .$$

Derfor er der 86 mulige trekanter, svarende til følgende værdier for a:

$$a \ : \ 506, 507, \ldots, 590, 591 \, .$$

Værdierne for b = 2020 - 2a er

$$b \ : \ 1008, 1006, \ldots, 840, 838 \, .$$

Besvarelser modtaget fra:
- Jens Søren Andersen
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Can Amore Problemgruppe