Svar på opgave 377 (Februar 2021)

Opgave:

Det er let at regne med kubikrødder!

a. Bestem alle naturlige tal *p* og *q*, så

$$\sqrt[3]{\sqrt{p}+q}-\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}=1 .$$

b. Find alle positive reelle tal *x*, for hvilke

$$\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}$$

er et helt tal.

Besvarelse:

a.

1. metode.
Vi opløfter til tredje potens på begge sider, så ligningen er ensbetydende med

$$\sqrt{p}+q-3\sqrt[3]{\sqrt{p}+q}^{\,2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}+3\sqrt[3]{\sqrt{p}+q}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}^{\,2}-\left(\sqrt{p}-q\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\quad 2q-3\sqrt[3]{(p-q^2)\left(\sqrt{p}+q\right)}+3\sqrt[3]{(p-q^2)\left(\sqrt{p}-q\right)}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad -3\sqrt[3]{p-q^2}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{p}+q}-\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}\right)=1-2q .$$

Parentesen på venstre side har værdien 1 efter den oprindelige ligning, så vi får

$$-3\sqrt[3]{p-q^2}=1-2q \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[3]{p-q^2}=\tfrac{1}{3}(2q-1) . \qquad (1)$$

Her må $\frac{1}{3}(2q-1)$ være et naturligt tal, fordi kubikroden af et naturligt tal er irrational eller et naturligt tal. Vi ser, at vi kun kan bruge værdierne $q = 2, 5, 8, \ldots$, dvs. vi kan sætte $q = 3k - 1$, så vi af (1) får

$$\sqrt[3]{p-(3k-1)^2}=\tfrac{1}{3}(2(3k-1)-1) \quad\Leftrightarrow\quad p-(3k-1)^2=(2k-1)^3 \quad\Leftrightarrow\quad p=8k^3-3k^2 .$$

Ved at gøre prøve ses, at alle talpar af formen

$$(p,q) = (8k^3 - 3k^2 , 3k - 1)$$

er løsninger til (1), idet

$$\sqrt[3]{p-q^2}=\sqrt[3]{8k^3-3k^2-9k^2-1+6k}=\sqrt[3]{8k^3-12k^2+6k-1}$$

$$=\sqrt[3]{(2k-1)^3}=2k-1=\tfrac{1}{3}(2q-1)\ .$$

Løsninger er fx. (p,q) = (5,2) og (p,q) = (52,5) svarende til k = 1 og k = 2. Disse giver følgende besynderligheder:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1 \quad \text{og} \quad \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}-\sqrt[3]{\sqrt{52}-5}=1\ .$$

2. metode (Asger Olesen, Tønder).

Vi sætter

$$a=\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}\ ,$$

så vi kan omskrive således:

$$\sqrt[3]{\sqrt{p}+q}=1+\sqrt[3]{\sqrt{p}-q} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{p}+q=\left(1+\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{p}+q=1+\sqrt{p}-q+3\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}^{\,2}+3\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2q-1=3a^2+3a \quad \Leftrightarrow \quad 3a^2+3a-(2q-1)=0\ .$$

Diskriminanten for denne andengradsligning i a er

$$d = 9 + 12(2q - 1) = 24q - 3\ ,$$

som er positiv, da q er et naturligt tal. Vi får løsningerne

$$a=\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}=\frac{-3\pm\sqrt{24q-3}}{6}\ .$$

Her kan kun fortegnet + for kvadratroden benyttes, thi ellers var $a < 0$ og dermed

$$1=\sqrt[3]{\sqrt{p}+q}-\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}=\sqrt[3]{\sqrt{p}+q}-a>\sqrt[3]{\sqrt{p}+q}>1\ ,$$

hvilket er en modstrid. Altså er

$$\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}=\frac{-3+\sqrt{24q-3}}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 6\sqrt[3]{\sqrt{p}-q}=-3+\sqrt{24q-3}$$

$$216\left(\sqrt{p}-q\right)=\left(\sqrt{24q-3}-3\right)^3.$$

Efter en række trælse algebraiske omformninger fås, at dette er ensbetydende med

$$9\sqrt{p}=(q+1)\sqrt{24q-3} \quad \Leftrightarrow \quad 81p=(q+1)^2\cdot(24q-3) \quad \Leftrightarrow \quad 27p=(q+1)^2\cdot(8q-1).$$

Vi skal derfor bestemme de værdier af q, for hvilke 27 går op i $f(q) = (q + 1)^2(8q - 1)$.
Vi finder, at

$$f(2) = 3^2\cdot 15 = 3^3\cdot 5 \quad , \quad f(5) = 6^2\cdot 39 = 2^2\cdot 3^3\cdot 13 \quad , \quad f(8) = 9^2\cdot 63 = 3^6\cdot 7\ ,$$

som alle er delelige med 27. Det er derfor nærliggende at formode, at $f(q)$ er delelig med 27 for enhver værdi af q af typen $q = 3n + 2$, hvor n gennemløber de naturlige tal. Vi finder

$$f(3n + 2) = (3n + 3)^2\cdot(8(3n + 2) - 1) = 3^3(n + 1)\cdot(8n + 5)\ ,$$

hvilket viser formodningen. At der ikke findes andre muligheder for q ses ved at vise, at $f(3n)$ og $f(3n + 1)$ ikke er delelige med 27:

$$f(3n) = (3n + 1)^2\cdot(8\cdot 3n - 1) \equiv 1^2\cdot(-1) = -1 \equiv 2 \pmod 3\ ,$$

$$f(3n+1) = (3n+2)^2 \cdot (8(3n+1)-1) = (3n+2)^2 \cdot (24n+7) \equiv 2^2 \cdot 7 \equiv 1 \pmod 3 .$$

Derfor har løsningerne til den oprindelige ligning parameterfremstillingen

$$(p,q) = \left(\tfrac{1}{27} \cdot 3^3 \cdot (n+1)^2 \cdot (8n+5), 3n+2\right) = \left((n+1)^2 \cdot (8n+5), 3n+2\right) .$$

Denne parameterfremstilling er i virkeligheden den samme som den, der er omtalt under 1. metode.
I stedet for at vælge $q = 3n + 2$ oven for, kunne vi vælge $q = 3n - 1$, så

$$f(3n-1) = (3n)^2 \cdot (8(3n-1)-1) = 9n^2(24n-9) = 27n^2(8n-3) .$$

så ville vi få parameterfremstillingen

$$(p,q) = \left(\tfrac{1}{27} \cdot 27n^2(8n-3), 3n-1\right) = \left(8n^3 - 3n^2, 3n-1\right) .$$

Bemærkning.

Man kunne også vælge at se på ligningen

$$\sqrt[3]{\sqrt{p}+q} - \sqrt[3]{\sqrt{p}-q} = 2 .$$

Samme fremgangsmåde som oven for giver ligningen

$$2q - 3\sqrt[3]{(p-q^2)\left(\sqrt{p}+q\right)} + 3\sqrt[3]{(p-q^2)\left(\sqrt{p}-q\right)} = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad -3\sqrt[3]{p-q^2} \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{p}+q} - \sqrt[3]{\sqrt{p}-q}\right) = 8 - 2q .$$

Parentesen på venstre side har værdien 2 efter den oprindelige ligning, så vi får

$$-3\sqrt[3]{p-q^2} \cdot 2 = 8 - 2q \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{p-q^2} = \tfrac{1}{6}(2q-8) = \tfrac{1}{3}(q-4) . \qquad (2)$$

Her kan q antage værdierne 4, 7, 10,…, så vi kan sætte $q = 1 + 3k$. Så er

$$\tfrac{1}{3}(q-4) = \tfrac{1}{3}(1+3k-4) = k-1.$$

Vi får så

$$\sqrt[3]{p-q^2} = k-1 \quad \Leftrightarrow \quad p = (k-1)^3 + (1+3k)^2 = k^3 + 6k^2 + 9k.$$

En parameterfremstilling for løsningerne til ligningen bliver dermed

$$(p,q) = (k^3 + 6k^2 + 9k , 3k + 1) .$$

Værdierne $k = 1$ og $k = 2$ giver $(p,q) = (16,4)$ og $(p,q) = (50,7)$, så vi får formlerne

$$\sqrt[3]{\sqrt{16}+4} - \sqrt[3]{\sqrt{16}-4} = 2 \quad \text{og} \quad \sqrt[3]{\sqrt{50}+7} - \sqrt[3]{\sqrt{50}-7} = 2 .$$

Den første er den trivielle

$$\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{0} = 2.$$

b.

Vi sætter

$$f(x) = \sqrt[3]{13+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{13-\sqrt{x}} \quad \text{for } x \geq 0 .$$

Så er

$$f'(x)=\frac{1}{6\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}^{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}^{2}}\right).$$

Vi har, at

$$f'(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[3]{13+\sqrt{x}}>\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}\ ,$$

hvilket åbenbart er sandt. Dermed er $f(x)$ aftagende for $x > 0$. Nu er

$$f(x)=\sqrt[3]{\sqrt{x}+13}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-13}\ , \tag{3}$$

så vi slutter, at

$$f(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}+13>\sqrt{x}-13\ ,$$

hvilket er sandt. Vi har, at $f(0)=2\sqrt[3]{13}\approx 4,7027,$ så

$$0\ < f(x)\ <\ 5\ .$$

Desuden ser vi af (3), at

$$f(x)\to 0 \text{ for } x\to\infty\,.$$

Derfor kan $f(x)$ antage de hele værdier 1, 2, 3 og 4. Vi gennemgår disse tilfælde efter tur.

I. $f(x) = 4$. Vi får

$$\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-13}=4\,.$$

Vi sætter

$$h=\sqrt[3]{\sqrt{x}-13}\quad \text{så}\quad \sqrt[3]{\sqrt{x}+13}=h+4\ .$$

Derfor er

$$(h+4)^3 = h^3 + 12h^2 + 48h + 64 = \sqrt{x}+13 \quad \text{og} \quad h^3 = \sqrt{x} - 13\ ,$$

hvoraf

$$(h+4)^3 = h^3 + 26 \quad\Leftrightarrow\quad 12h^2 + 48h + 38 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad h=-2\pm\tfrac{1}{6}\sqrt{30}$$

Nu er

$$h=\sqrt[3]{\sqrt{x}-13}>\sqrt[3]{-13}\approx -2,35$$

så vi kun kan bruge

$$h=-2+\tfrac{1}{6}\sqrt{30}\ .$$

Derefter er

$$h^3=\left(\tfrac{1}{6}\sqrt{30}-2\right)^3=\tfrac{77}{36}\sqrt{30}-13\ ,$$

så

$$\sqrt{x}=h^3+13=\tfrac{77}{36}\sqrt{30} \quad\Leftrightarrow\quad x=\tfrac{29645}{216}\approx 137,245\ .$$

II. $f(x) = 3$. Vi får

$$\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{\sqrt{x}-13}=3\,.$$

Vi sætter

$$h=\sqrt[3]{\sqrt{x}-13}\quad \text{så}\quad \sqrt[3]{\sqrt{x}+13}=h+3\ .$$

På samme måde som oven for fås

$$(h+3)^3 = h^3 + 26 \quad \Leftrightarrow \quad 9h^2 + 27h + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{-9 \pm \sqrt{77}}{6} .$$

Her kan vi kun bruge

$$h = \frac{-9 + \sqrt{77}}{6} ,$$

hvoraf

$$\sqrt{x} = h^3 + 13 = \tfrac{40}{27}\sqrt{77} \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{123200}{729} \approx 168{,}999 .$$

III. $f(x) = 2$. Vi får

$$\sqrt[3]{13+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-13} = 2 .$$

Vi sætter

$$h = \sqrt[3]{\sqrt{x}-13} \quad \text{så} \quad \sqrt[3]{\sqrt{x}+13} = h+2 \quad .$$

Så fås

$$(h+2)^3 = h^3 + 26 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 + 2h - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = -3 \ \vee \ h = 1 .$$

Her er kun $h = 1$ brugbar, så

$$\sqrt{x} = h^3 + 13 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = 196 .$$

IV. $f(x) = 1$. Vi får

$$\sqrt[3]{13+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-13} = 1 .$$

Vi sætter

$$h = \sqrt[3]{\sqrt{x}-13} \quad \text{så} \quad \sqrt[3]{\sqrt{x}+13} = h+1 \quad .$$

Så er

$$(h+1)^3 = h^3 + 26 \quad \Leftrightarrow \quad 3h^2 + 3h - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{-3 \pm \sqrt{309}}{6} .$$

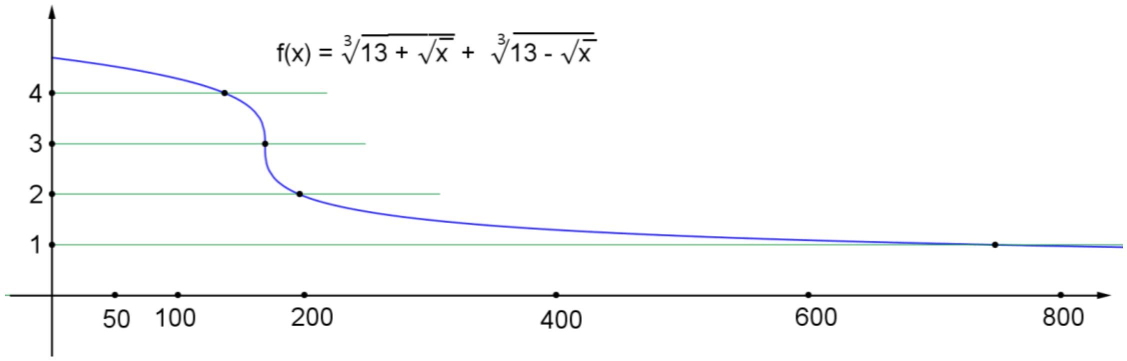
Kun fortegnet + kan bruges, og

$$\sqrt{x} = h^3 + 13 = \left(\frac{-3+\sqrt{309}}{6}\right)^3 + 13 = \frac{14}{9}\sqrt{309} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{20188}{27} \approx 747{,}704 .$$

Vi har dermed fundet fire løsninger på problemet:

$$\left\{\tfrac{29645}{216} , \tfrac{123200}{729} , 196 , \tfrac{20188}{27}\right\} = \left\{137\tfrac{53}{216} , 168\tfrac{728}{729} , 196 , 747\tfrac{19}{27}\right\} .$$

Vi kan afbilde situationen grafisk som vist



Bemærkning.

Vi kan løse de fire ligninger under et for k = 1, 2, 3, 4 ved at opløfte til tredje potens på begge sider:

$$\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}=k \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 13+\sqrt{x}+13-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}^{2}\cdot\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}^{2}=k^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 26+3\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt[3]{13+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{13-\sqrt{x}}\right)=k^3\,.$$

Her er parentesen på venstre side lig med k, så

$$26+3\sqrt[3]{169-x}\cdot k=k^3 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[3]{169-x}=\frac{k^3-26}{3k} \quad\Leftrightarrow\quad 169-x=\left(\frac{k^3-26}{3k}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad x=169-\frac{(k^3-26)^3}{27k^3}=\frac{-k^9+78k^6+2535k^3+17576}{27k^3}\;. \tag{5}$$

For k = 1, 2, 3 ,4 fås resultaterne oven for. Dette forudsætter, at vi i forvejen som vist har godtgjort, at venstre side i (4) ligger mellem 1 og 4.

Hvis vi ikke på forhånd har undersøgt funktionen $f(x)$, men blot foretager omskrivningen oven for og når frem til (5), får vi

$$x=169-\frac{(k^3-26)^3}{27k^3}=\frac{13^2\cdot 27k^3-(k^3-26)^3}{27k^3}\;,$$

og her gætter vi k^3 = -13 som rod i polynomiet af 9. grad i tælleren. En hel rod er nemlig divisor i polynomiets konstantled 26^3 og ved indsættelse af k^3 = -13 får vi:

$$13^2\cdot 27\cdot(-13) - (-13 - 26)^3 = -13^3\cdot 3^3 + 39^3 = 0\,.$$

Ved udregning af tælleren (se oven for) og division med $k^3 + 13$ får vi

$$x=\frac{-(k^3+13)(k^6-91k^3-1352)}{27k^3}=\frac{-(k^3+13)(k^3+13)(k^3-104)}{27k^3}=\frac{(k^3+13)^2(104-k^3)}{27k^3}.$$

Da $x > 0$ og $k > 0$, er $0 < k^3 < 104$, så k kan antage en af værdierne 1, 2, 3, 4. Ved ind- sættelse af disse værdier fås de nævnte løsninger.

Bemærkning.

Ligningen (5) er ensbetydende med

$$27x = \frac{-k^9 + 78k^6 + 2535k^3 + 17576}{k^3} \ .$$

Da $x \geq 0$ kræves, at højre side er ikke-negativ, dvs.

$$k^9 - 78k^6 - 2535k^3 - 17576 \leq 0 \ . \qquad (6)$$

Vi sætter

$$g(k) = k^9 - 78k^6 - 2535k^3 - 17576 \ ,$$

hvoraf

$$g'(k) = 9k^8 - 468k^5 - 7605k^2 = 9k^2(k^6 - 52k^3 - 845) = 9k^2(k^3 + 13)(k^3 - 65) \ .$$

Dette giver, at $g(k)$ er aftagende i $\left[0;\sqrt[3]{65}\right]$ og voksende i $\left[\sqrt[3]{65};\infty\right[$. Nu er $\sqrt[3]{65} \approx 4{,}02$ og vi får tabellen

k	0	1	2	3	4	5
$g(k)$	-17576	-20188	-42336	-123200	-237160	399924

Altså er uligheden (6) opfyldt for k = 1, 2, 3, 4.

Bemærkning.

Der findes tidligere opgaver i *Opgavehjørnet*, der kan minde om opgave 377. Det drejer sig om opgave 159 (april 1999) og opgave 297 (februar 2013):

159 : Find de positive reelle værdier af a, for hvilke tallet

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{a}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{a}}$$

er helt.

297 : Bestem alle hele tal n, så

$$\sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}}$$

er et helt tal.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Hans Benner
- Klaus Grünbaum
- Magnus Jakobsson
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen.