Svar på opgave 379 (April 2021)

Opgave:

Naturlige tal er lette

a. Find samtlige hele positive tal c, så ligningen

$$2x + 3y = c$$

har præcis 1000 hele positive løsningssæt (x,y).

b. Der gælder, at

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 6 + 7 + 8\ .$$

Bestem det mindste naturlige tal $k > 6$, så

$$1 + 2 + \cdots + k = k + (k + 1) + \cdots + n\ ,$$

hvor n er et naturligt tal større end k.

Besvarelse:

a.
1. metode.

Hvis c er lige, er y lige, og da $y = -\frac{2}{3}x + \frac{c}{3}$, er $2 \leq y < \frac{c}{3}$. I så fald er

$$2x = c - 3y \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}(c - 3y)\ ,$$

hvor $c - 3y$ er positiv og lige, så x er et helt positivt tal.

Hvis c er ulige, er y ulige, så $1 \leq y < \frac{c}{3}$. Igen er $c - 3y$ positiv og lige, så $x = \frac{1}{2}(c - 3y)$ er hel og positiv.

Nu deler vi op efter c modulo 6.

Hvis $c = 6k$, er y lige, og $2 \leq y < \frac{c}{3} = 2k$. Mulighederne for y er 2, 4, 6, . . . , $2k - 2$, dvs. vi har $k - 1$ muligheder.

Hvis $c = 6k + 1$, er y ulige og

$$1 \leq y < \frac{c}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq y < \frac{6k+1}{3} = 2k + \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq y \leq 2k\ ,$$

så mulighederne for y er 1, 3, 5, . . . , $2k - 1$, dvs. der er k muligheder.

Hvis $c = 6k + 2$, er y lige og

$$2 \leq y < \frac{c}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq y < \frac{6k+2}{3} = 2k + \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq y \leq 2k\ ,$$

så mulighederne for y er 2, 4, 6, . . . , $2k$, dvs. der er k muligheder.

Hvis $c = 6k + 3$, er y ulige og

$$1 \le y < \tfrac{c}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le y < \tfrac{6k+3}{3} = 2k+1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le y \le 2k \ ,$$

så mulighederne for y er 1, 3, 5, . . . , $2k - 1$, dvs. der er k muligheder.

Hvis $c = 6k + 4$, er y lige og

$$2 \le y < \tfrac{c}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le y < \tfrac{6k+4}{3} = 2k+1+\tfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le y \le 2k+1 \ ,$$

så mulighederne for y er 2, 4, 6, . . . , $2k$, dvs. der er k muligheder.

Hvis $c = 6k + 5$, er y ulige og

$$1 \le y < \tfrac{c}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le y < \tfrac{6k+5}{3} = 2k+1+\tfrac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le y \le 2k+1 \ ,$$

så mulighederne for y er 1, 3, 5, . . . , $2k + 1$ dvs. der er $k + 1$ muligheder.

Sammenfattende har vi fundet, at

hvis $c = 6k$ er der $k - 1$ muligheder for y ,
hvis $c = 6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ er der k muligheder for y ,
hvis $c = 6k + 5$ er der $k + 1$ muligheder for y .

Hvis antallet af løsninger skal være præcis 1000, gælder

hvis $c = 6k$, er $k - 1 = 1000$, dvs. $k = 1001$ og ligningen er $2x + 3y = 6006$,

hvis $c = 6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, er $k = 1000$ og ligningen er en af følgende:
$2x + 3y = 6001$, $2x + 3y = 6002$, $2x + 3y = 6003$, $2x + 3y = 6004$,

hvis $c = 6k + 5$ er $k + 1 = 1000$, dvs. $k = 999$ og ligningen er $2x + 3y = 5999$.

De fundne værdier af c er altså 5999, 6001, 6002, 6003, 6004, 6006.

Hvis vi fx ser på tilfældet $c = 6001$ kan vi løse den diofantiske ligning på sædvanlig måde:

$$2x + 3y = 6001 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 6001 - 3y \quad \Leftrightarrow \quad x = 3000 - y + \frac{1-y}{2} \ .$$

Vi sætter $t = \frac{1-y}{2}$, så $y = 1 - 2t$ og dermed

$$x = 3000 - (1 - 2t) + t = 2999 + 3t \ .$$

Samtlige løsninger har altså parameterfremstillingen

$$(x,y) = (2999 + 3t \ , \ 1 - 2t) \ .$$

Dette giver tabellen med 1000 positive løsninger:

t	0	-1	-2	. . .	-999
(x,y)	(2999,1)	(2996,3)	(2993,5)	. . .	(2,1999)

I planen har linjen med ligningen $2x + 3y = c$ retningsvektoren (-3,2), så hver løsning fremgår af den forrige ved addition af (-3,2) til koordinatsættet.

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Vi generaliserer opgaven: Lad a og b være indbyrdes primiske positive hele tal. For hvilke værdier af c har ligningen

$$ax + by = c$$

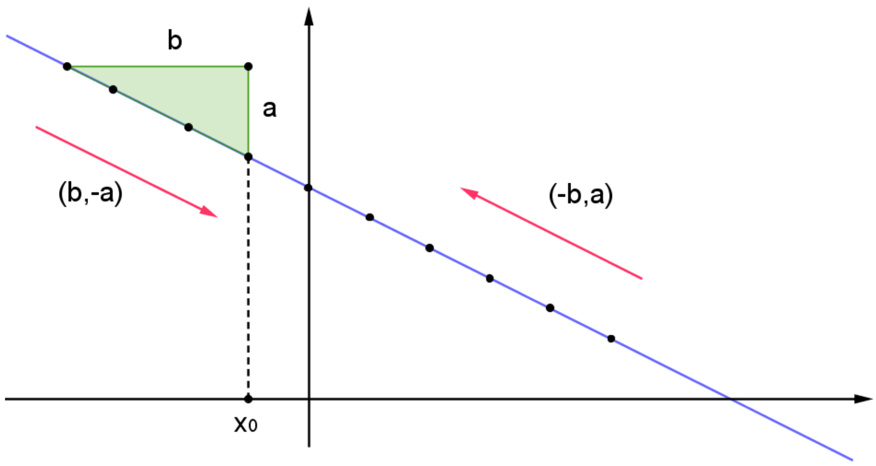
præcis m løsninger?

Da ligningen $ax + by = c$ har et løsningssæt, hvor x og y er positive hele tal, er c positiv og hel. Hvis (x_0,y_0) er en løsning, er det velkendt, at samtlige hele løsninger (x,y) kan udtrykkes ved parameterfremstillingen

$$(x,y) = (x_0 + bn\ ,\ y_0 - an)\ ,$$

hvor n gennemløber de hele tal.

Ligningen $ax + by = c$ fremstiller en ret linje i planen med $(-b,a)$ som retningsvektor. Nu er a, b og c positive hele tal, så linjen skærer y-aksens positive del i tallet $\frac{c}{b}$ og des- uden er linjens hældning negativ.



Lad x_0 være det største ikke-positive hele tal, så (x_0,y_0) er en heltallig løsning til ligningen. Det betyder, at på figuren ligger punktet (x_0,y_0) på linjen i 2. kvadrant så tæt på y-aksen som muligt. Derfor må x_0 være et af tallene

$$0\ , -1, -2, \ldots , -b + 1\ .$$

Af figuren ser vi nemlig, at hvis $x_0 \le -b$, kunne man afsætte vektoren $(b,-a)$ med begyndelsespunkt i (x_0,y_0) og dermed få en ny ikke-positiv værdi af x_0, der lå tættere på 0.

At talsættet $(x_0 + bn\ ,\ y_0 - an)$ består af positive hele tal, er så ensbetydende med, at n opfylder, at $y_0 - an > 0$. Af figuren ser vi, at hvis ligningen $ax + by = c$ skal have præcis m hele positive løsninger, er dette ensbetydende med, at

$$y_0 - am > 0 \ \wedge\ y_0 - a(m + 1) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y_0 > am \ \wedge\ y_0 \le am + a \quad \Leftrightarrow \quad am < y_0 \le am + a\ ,$$

eller

$$y_0 = am + k \quad \text{hvor} \quad k = 1, 2, \ldots , a\ .$$

Altså er de værdier af c, for hvilke $ax + by = c$ har præcis m løsninger netop tallene

$$ax_0 + by_0 \quad \text{hvor} \quad x_0 = 0, -1, -2, \ldots , -b + 1 \quad \text{og} \quad y_0 = am + k \ \ (k = 1, 2, 3, \ldots, a)\ .$$

Antallet af sådanne værdier af c er dermed $a \cdot b$.

Vi bemærker, at hvis

$$ax_0 + by_0 = ax_1 + by_1\ ,$$

hvor

$$x_0\ , x_1 \in \{0,-1,-2,\ldots,-b + 1\} \ \text{ og }\ y_0\ , y_1 \in \{am + k \mid k = 1,2,\ldots,a\}\ ,$$

så er $x_0 = x_1$ og $y_0 = y_1$. Dette skyldes, at

$$ax_0 + by_0 = ax_1 + by_1 \quad \Leftrightarrow \quad a(x_0 - x_1) = b(y_1 - y_0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_0 - x_1}{b} = \frac{y_1 - y_0}{a} \ .$$

Da a og b er indbyrdes primiske, giver ligningen

$$a(x_0 - x_1) = b(y_1 - y_0)$$

at b går op i $x_0 - x_1$, og da x_0 og x_1 er to af tallene 0, -1, -2, . . . , $-b$ + 1, er $x_0 = x_1$ og der- med $y_0 = y_1$.
Hvis $a = 2$, $b = 3$ og $m = 1000$, er de søgte værdier af c:

$$\{2x + 3y \mid x = 0, -1, -2 \ \wedge \ y = 2 \cdot 1000 + k\},$$

hvor k = 1, 2. Altså får vi

$$\begin{aligned}
x = 0 \ , y = 2001 &\ : \ c = 2\cdot 0 + 3\cdot 2001 = 6003 \\
x = 0 \ , y = 2002 &\ : \ c = 2\cdot 0 + 3\cdot 2002 = 6006 \\
x = -1 \ , y = 2001 &\ : \ c = 2\cdot(-1) + 3\cdot 2001 = 6001 \\
x = -1 \ , y = 2002 &\ : \ c = 2\cdot(-1) + 3\cdot 2002 = 6004 \\
x = -2 \ , y = 2001 &\ : \ c = 2\cdot(-2) + 3\cdot 2001 = 5999 \\
x = -2 \ , y = 2002 &\ : \ c = 2\cdot(-2) + 3\cdot 2002 = 6002 \ .
\end{aligned}$$

3. metode (Asger Olesen, Tønder).

Ligningen $2x + 3y = c$ ses at have løsningen $(x,y) =$
$(-c,c)$, og dermed har samtlige løsninger parameterfremstillingen

$$(x,y) = (-c + 3n \ , c - 2n) \ ,$$

hvor n gennemløber de hele tal. Da x og y er hele og positive, gælder

$$-c + 3n \geq 1 \quad \text{og} \quad c - 2n \geq 1 \ ,$$

hvilket er ensbetydende med, at

$$\tfrac{1}{3}(c+1) \leq n \leq \tfrac{1}{2}(c-1) \ .$$

Afhængig af, om $\tfrac{1}{3}(c+1)$ og $\tfrac{1}{2}(c-1)$ er hele tal eller ej, opstår forskellige muligheder, og vi deler op i seks tilfælde efter værdien for c modulo 6.

I. $c = 6k$. Så er

$$\tfrac{1}{3}(c+1) \leq n \leq \tfrac{1}{2}(c-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + \tfrac{1}{3} \leq n \leq 3k - \tfrac{1}{2} \ \text{ dvs. } 2k+1 \leq n \leq 3k-1 \ .$$

II. $c = 6k + 1$. Så er

$$\tfrac{1}{3}(c+1) \leq n \leq \tfrac{1}{2}(c-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + \tfrac{2}{3} \leq n \leq 3k \ \text{ dvs. } 2k+1 \leq n \leq 3k \ .$$

III. $c = 6k + 2$. Så er

$$\tfrac{1}{3}(c+1) \leq n \leq \tfrac{1}{2}(c-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2k+1 \leq n \leq 3k + \tfrac{1}{2} \ \text{ dvs. } 2k+1 \leq n \leq 3k \ .$$

IV. $c = 6k + 3$. Så er

$$\tfrac{1}{3}(c+1) \leq n \leq \tfrac{1}{2}(c-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + \tfrac{4}{3} \leq n \leq 3k+1 \ \text{ dvs. } 2k+2 \leq n \leq 3k+1 .$$

V. $c = 6k + 4$. Så er

$$\tfrac{1}{3}(c+1) \leq n \leq \tfrac{1}{2}(c-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2k + \tfrac{5}{3} \leq n \leq 3k + \tfrac{3}{2} \ \text{ dvs. } 2k+2 \leq n \leq 3k+1 \ .$$

VI. $c = 6k + 5$. Så er

$$\tfrac{1}{3}(c+1) \le n \le \tfrac{1}{2}(c-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2k+2 \le n \le 3k+2 \quad .$$

I hver af de seks tilfælde fås, at kravet om præcis 1000 løsninger medfører, at

I. $3k - 1 - 2k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1001 \quad \Leftrightarrow \quad c = 6k = 6006$.

II. $3k - 2k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad c = 6k + 1 = 6001$.

III. $3k - 2k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad c = 6k + 2 = 6002$.

IV. $3k + 1 – (2k + 1) = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad c = 6k + 3 = 6003$.

V. $3k + 1 - (2k + 1) = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad c = 6k + 4 = 6004$.

VI. $3k + 2 - (2k + 1) = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad k = 999 \quad \Leftrightarrow \quad c = 6k + 5 = 5999$.

b.
1. metode.

Vi benytter

$$1 + 2 + \cdots + k = \tfrac{1}{2}k(k+1)$$

og får

$$k + (k + 1) + \cdots + n = (1 + 2 + \cdots + n) - (1 + 2 + \cdots + (k - 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}n(n+1) - \tfrac{1}{2}k(k-1) \ .$$

Altså opfylder k og n, at

$$\tfrac{1}{2}k(k+1) = \tfrac{1}{2}n(n+1) - \tfrac{1}{2}k(k-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad k^2 + k = n^2 + n - k^2 + k \quad \Leftrightarrow \quad 2k^2 = n(n + 1) \ .$$

Da n og $n + 1$ er indbyrdes primiske, gælder, at n er et kvadrattal og $n + 1$ er det dobbel- te af et kvadrattal eller omvendt.

Vi finder, at $n + 1 = 9$ og $k = 6$ er den anførte løsning. Vi bemærker, at vi skal finde to konsekutive tal, hvis produkt er det dobbelte af et kvadrattal. Vi finder, at

$$49 \cdot 50 = 2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 35^2$$

er den næste mulighed i talrækken, så $n = 49$ og $k = 35$. Altså er

$$1 + 2 + \cdots + 34 + 35 = 35 + 36 + \cdots + 48 + 49 \ (= 630) \ .$$

I øvrigt er den næste løsning $(n,k) = (288,204)$, så

$$1 + 2 + \cdots + 203 + 204 = 204 + 205 + \cdots + 287 + 288 \ (= 20910) \ .$$

2. metode (Walther Janous, Innsbruck).

Ligningen

$$2k^2 = n(n + 1) \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + n - 2k^2 = 0$$

er en andengradsligning i n, og vi får

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8k^2}}{2} \quad .$$

Her må så diskriminanten være et kvadrattal:

$$8k^2 + 1 = w^2 \quad \Leftrightarrow \quad w^2 - 8k^2 = 1 .$$

Dette er et eksempel på den kendte *Pells ligning*. Den minimale løsning er $(w,k) = (3,1)$ og alle løsninger (w_n,k_n) fås af parameterfremstillingen

$$w_n + k_n\sqrt{8} = \left(3+\sqrt{8}\right)^n \quad , \quad w_n - k_n\sqrt{8} = \left(3-\sqrt{8}\right)^n \ ,$$

hvoraf ved subtraktion

$$2k_n\sqrt{8} = \left(3+\sqrt{8}\right)^n - \left(3-\sqrt{8}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad k_n = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left(\left(3+\sqrt{8}\right)^n - \left(3+\sqrt{8}\right)^n\right) \ .$$

Så er

$$k_2 = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left(\left(3+\sqrt{8}\right)^2 - \left(3+\sqrt{8}\right)^2\right) = 6 \ ,$$

hvoraf

$$w_2{}^2 = 1+ 8k_2{}^2 = 1 + 8\cdot 36 = 289 \quad \Leftrightarrow \quad w_2 = 17 \ ,$$

og dermed

$$n_2 = \frac{-1\pm\sqrt{289}}{2} = \begin{cases} -9 \\ 8 \end{cases} ,$$

dvs. $n_2 = 8$. Så er $2k_2{}^2 = 8\cdot 9$ eller $k_2 = 6$, hvilket er den anførte løsning. Derefter er

$$k_2 = \frac{1}{2\sqrt{8}}\left(\left(3+\sqrt{8}\right)^3 - \left(3+\sqrt{8}\right)^3\right) = 35 \ ,$$

så at

$$n_3 = \frac{-1\pm\sqrt{1+8\cdot 35^2}}{2} = \begin{cases} -50 \\ 49 \end{cases} ,$$

så $n_3 = 49$. Samme resultat nåede vi til oven for.

3. metode (Asger Olesen, Tønder).

Ligningen

$$2k^2 = n(n + 1)$$

er ensbetydende med

$$(2k - n - 1)^2 + (2k - n)^2 = (2n - 2k + 1)^2 \ ,$$

idet reduktion af den sidste ligning giver den første. Vi har dermed et pythagoræisk talsæt, hvori forskellen mellem kateternes længder er 1. De mindste sådanne talsæt vides at være

$$(3,4,5) \ , \ (20,21,29) \ , \ (119,120,169) \ , \ (696,697,985) \ .$$

Da $n > k$ har vi følgende muligheder:

I. $2n - 2k + 1 = 5$. Her er $n = k + 2$, og dermed

$$(2k - n - 1)^2 = (2k - k - 2 - 1)^2 = (k - 3)^2 \quad \text{og} \quad (2k - n)^2 = (k - 2)^2 \ .$$

Derfor er

$$(k - 3)^2 + (k - 2)^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 6 \ \vee \ k = -1 \ .$$

Altså er $k = 6$ og $n = 8$ svarende til opgavens indledende eksempel.

II. $2n - 2k + 1 = 29$. Her er $n = k + 14$, og dermed

$$(2k - n - 1)^2 = (2k - k - 14 - 1)^2 = (k - 15)^2 \quad \text{og} \quad (2k - n)^2 = (k - 14)^2 .$$

Derfor er

$$(k - 15)^2 + (k - 14)^2 = 29^2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 35 \ \vee \ k = -6 .$$

Altså er $k = 35$ og $n = 49$. Dette er svaret på opgaven, så vi har genfundet fremstillingen oven for under 1. metode.

Vi bemærker, at der findes uendelig mange pythagoræiske tripler, hvor forskellen mellem kateternes længder er 1. De findes ved at kombinere den velkendte parameter- fremstilling af de primitive pythagoræiske tripler med en passende Pell-ligning.

4. metode (Asger Olesen, Tønder).

Vi skal løse ligningen $k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, hvor $n > k > 6$.

Nu er nabotal indbyrdes primiske og desuden har nabotal forskellige pariteter, så vi får to muligheder.

I. n er lige og $n + 1$ er ulige.

Vi har, at $k^2 = \frac{n}{2}(n+1)$. De hele tal $\frac{n}{2}$ og $n + 1$ er primiske, og da deres produkt er et kvadrat, er $\frac{n}{2}$ og $n + 1$ også kvadrattal, og vi sætter

$$\frac{n}{2} = y^2 \quad , \quad n + 1 = x^2 .$$

Dette giver, at $x^2 - 2y^2 = 1$. Efter teorien for Pell-ligninger har denne de tre mindste posi- tive løsningssæt

$$(x,y) : (3,2) , (17,12) , (99,70)$$

svarende til

$$(n,k) : \ (8,6) , (288,204) , (9800,6930) .$$

II. n er ulige og $n + 1$ er lige.

Vi har, at $k^2 = \frac{n+1}{2} \cdot n.$ De hele tal $\frac{n+1}{2}$ og n er primiske, og da deres produkt er et kvadrat, er $\frac{n+1}{2}$ og n også kvadrattal, og vi sætter

$$\frac{n+1}{2} = y^2 \quad , \quad n = x^2 .$$

Dette giver, at $x^2 - 2y^2 = -1$, der har de tre mindste positive løsningssæt

$$(x,y) \ : \ (7,5) \ , \ (41,29) \ , \ (239,169)$$

svarende til

$$(n,k) \ : \ (49,35) \ , (1681,1189) \ , \ (57121,40391) .$$

Vi ser altså, at vi i det første tilfælde får opgavens indledende eksempel $k = 6$, mens det andet giver den ønskede løsning $k = 35$.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Benner
- Johs. M. Christensen
- Klaus Grünbaum

- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen
- Jan Erik Pedersen