Svar på opgave 380 (Maj 2021)

Opgave:

a. Vis, at

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{2\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{3\pi}{7}=\sqrt{7}\ .$$

b. Vis, at

$$\tan\tfrac{3\pi}{7}-4\sin\tfrac{\pi}{7}=\sqrt{7}\,.$$

c. Vis, at

$$\tan\tfrac{2\pi}{7}-4\sin\tfrac{4\pi}{7}=-\sqrt{7}\ .$$

Vi husker, at opgave b har været stillet som opgave 169 c (April 2000), hvor der blev anført et bevis for formlen ved hjælp af komplekse tal.
Vi efterlyser derfor her et trigonometrisk eller euklidisk bevis.

Besvarelse:

a.

1. metode

For nemheds skyld sætter vi $v=\frac{\pi}{7}$. Så er

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{2\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{3\pi}{7}=\frac{\sin v\cdot\sin 2v\cdot\sin 3v}{\cos v\cdot\cos 2v\cdot\cos 3v}=\frac{a}{b}\ .$$

Vi udregner først nævneren b og benytter at

$$\cos 3v = -\cos 4v \quad \text{og} \quad \sin v = -\sin 8v$$

og får

$$b=\cos v\cdot\cos 2v\cdot\cos 3v=-\cos v\cdot\cos 2v\cdot\cos 4v=-\cos v\cdot\cos 2v\cdot\cos 4v\cdot\frac{8\sin v}{8\sin v}$$

$$=\frac{-2\sin v\cdot\cos v\cdot 4\cdot\cos 2v\cdot\cos 4v}{8\sin v}=\frac{-4\sin 2v\cdot\cos 2v\cdot\cos 4v}{8\sin v}$$

$$=\frac{-2\sin 4v\cdot\cos 4v}{8\sin v}=\frac{-\sin 8v}{8\sin v}=\frac{\sin v}{8\sin v}=\frac{1}{8}.$$

Derefter udregner vi tælleren a og benytter

$$\sin v=\sin\tfrac{2\pi}{14}=\cos\tfrac{5\pi}{14}=\cos\tfrac{5v}{2}\ \ ,\ \ \sin 2v=\sin\tfrac{4\pi}{14}=\cos\tfrac{3\pi}{14}=\cos\tfrac{3v}{2}\ ,$$

$$\sin 3v=\sin\tfrac{6\pi}{14}=\cos\tfrac{\pi}{14}=\cos\tfrac{v}{2}\ \ ,\ \ \cos\tfrac{\pi}{14}=\cos\tfrac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}\ .$$

Så er

$$a = \sin v \cdot \sin 2v \cdot \sin 3v = \cos\tfrac{5v}{2} \cdot \cos\tfrac{3v}{2} \cdot \cos\tfrac{v}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos 5v}{2} \cdot \frac{1+\cos 3v}{2} \cdot \frac{1+\cos v}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{(1+\cos v)(1+\cos 3v)(1+\cos 5v)} \ .$$

Nu er

$$\cos 3v = -\cos 4v \quad \text{og} \quad \cos 5v = -\cos 2v \ ,$$

så vi får

$$a = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{(1+\cos v)(1-\cos 4v)(1-\cos 2v)} = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{r} \ .$$

Vi udregner radikanden r:

$$r = (1 + \cos v - \cos 4v - \cos v \cdot \cos 4v) \cdot (1 - \cos 2v)$$

$$= 1 + \cos v - \cos 4v - \cos v \cdot \cos 4v - \cos 2v - \cos v \cdot \cos 2v$$

$$+ \cos 2v \cdot \cos 4v + \cos v \cdot \cos 2v \cdot \cos 4v \ .$$

Her er

$$\cos v \cdot \cos 2v \cdot \cos 4v = -\cos v \cdot \cos 2v \cdot \cos 3v = -b = -\tfrac{1}{8} \ ,$$

så radikanden omskrives til

$$r = 1 + \cos v - \cos 2v - \cos 4v - \cos v \cdot \cos 4v - \cos v \cdot \cos 2v + \cos 2v \cdot \cos 4v - \tfrac{1}{8} \ .$$

Nu er

$$\cos x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right) \ ,$$

så

$$r = \tfrac{7}{8} + \cos v - \cos 2v - \cos 4v - \tfrac{1}{2}(\cos 5v + \cos 3v) - \tfrac{1}{2}(\cos 3v + \cos v) + \tfrac{1}{2}(\cos 6v + \cos 2v)$$

$$= \tfrac{7}{8} + \cos v - \cos 2v - \cos 4v - \tfrac{1}{2}\cos 5v - \tfrac{1}{2}\cos 3v - \tfrac{1}{2}\cos 3v - \tfrac{1}{2}\cos v + \tfrac{1}{2}\cos 6v + \tfrac{1}{2}\cos 2v \ .$$

Vi benytter, at

$$\cos v = -\cos 6v \quad , \quad \cos 4v = -\cos 3v \quad , \quad \cos 2v = -\cos 5v \ ,$$

og får

$$r = \tfrac{7}{8} + \cos v - \tfrac{1}{2}\cos v - \tfrac{1}{2}\cos v + \cos 5v - \tfrac{1}{2}\cos 5v - \tfrac{1}{2}\cos 5v + \cos 3v - \tfrac{1}{2}\cos 3v - \tfrac{1}{2}\cos 3v = \tfrac{7}{8}.$$

Dermed er

$$a = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{8}$$

og

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{8}}{\frac{1}{8}} = \sqrt{7} \ .$$

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg)

Vi sætter

$$7x = k\pi \quad , \quad k = 1, 2, 3 \ .$$

Så er $4x = k\pi - 3x$ og dermed $\tan 4x = -\tan 3x$. Additionsformlerne for tan giver

$$\tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x} \quad , \quad \tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} \ .$$

Vi sætter for nemheds skyld $t = \tan x$ og får ved lidt algebra:

$$\tan 4x = -\tan 3x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} \quad \Leftrightarrow \quad t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0 .$$

Efter ovenstående er rødderne i denne ligning ag 6. grad

$$\pm\tan\tfrac{\pi}{7} \ , \ \pm\tan\tfrac{2\pi}{7} \ , \ \pm\tan\tfrac{3\pi}{7} \ .$$

Produktet af rødderne i 6.gradspolynomiet er polynomiets konstantled, dvs.

$$-\left(\tan\tfrac{\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{2\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{3\pi}{7}\right)^2 = -7 \ ,$$

og da $\tan\tfrac{\pi}{7}$, $\tan\tfrac{2\pi}{7}$ og $\tan\tfrac{3\pi}{7}$ er positive, er

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{2\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{3\pi}{7} = \sqrt{7} \ .$$

b.

1. metode

Vi sætter $v = \tfrac{\pi}{7}$ og skal vise, at

$$\tan 3v - 4\sin v = \sqrt{7} \ .$$

Vi benytter først, at

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)) \quad \text{og} \quad \sin 4v = \sin 3v$$

og får

$$\tan 3v - 4\sin v = \frac{\sin 3v}{\cos 3v} - 4\sin v = \frac{1}{\cos 3v}\left(\sin 3v - 4\cos 3v \cdot \sin v\right)$$

$$= \frac{1}{\cos 3v}\left(\sin 3v - 4\cdot\tfrac{1}{2}(\sin 4v - \sin 2v)\right) = \frac{1}{\cos 3v}(2\sin 2v - \sin 3v) \ . \qquad (1)$$

Vi sætter

$$a = 2\sin 2v - \sin 3v \ ,$$

og får ved kvadrering

$$a^2 = 4\sin^2 2v + \sin^2 3v - 4\sin 2v \cdot \sin 3v \ .$$

Idet

$$\sin^2\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}(1 - \cos x) \quad \text{og} \quad \sin x \cdot \sin y = \tfrac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \ ,$$

får vi

$$a^2 = 4\cdot\tfrac{1}{2}(1 - \cos 4v) + \tfrac{1}{2}(1 - \cos 6v) - 4\cdot\tfrac{1}{2}(\cos v - \cos 5v)$$

$$= 2 - 2\cos 4v + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 6v - 2\cos v + 2\cos 5v \ .$$

Nu benytter vi, at

$$\cos 4v = -\cos 3v \quad , \quad -2\cos v = -4\cos v + 2\cos v \quad , \quad \cos 5v = -\cos 2v \ ,$$

og får

$$a^2 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 6v + 2\cos 3v - 2\cos 2v + 2\cos v - 4\cos v$$

$$= \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 6v - 2(-\cos v + \cos 2v - \cos 3v) - 4\cos v \ .$$

Nu er

$$\cos v - \cos 2v + \cos 3v = \tfrac{1}{2} \qquad (2)$$

(se neden for), så

$$a^2 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 6v - 2\cdot(-\tfrac{1}{2}) - 4\cos v \ ,$$

og da

$$\cos v = -\cos 6v \quad \text{og} \quad \cos^2\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}(1+\cos x) \ ,$$

er

$$a^2 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 6v + 1 + 4\cos 6v = \tfrac{7}{2} + \tfrac{7}{2}\cos 6v$$

$$= \tfrac{7}{2}(1+\cos 6v) = \tfrac{7}{2}\cdot 2\cos^2 3v = 7\cos^2 3v .$$

Idet

$$a = 2\sin 2v - \sin 3v = 2\sin 2v - \sin 4v = 2\sin 2v\cdot(1 - \cos 2v) > 0 \ ,$$

får vi

$$a = \sqrt{7}\cos 3v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\cos 3v} = \frac{\sqrt{7}}{a} \ .$$

Efter (1) er

$$\tan v - 4\sin v = \frac{1}{\cos 3v}\cdot a = \frac{\sqrt{7}}{a}\cdot a = \sqrt{7} \ .$$

Vi mangler at vise formlen (2). Vi sætter

$$k = \cos v - \cos 2v + \cos 3v$$

og får

$$k = \frac{1}{2\sin v}(2\sin v\cdot\cos v - 2\sin v\cdot\cos 2v + 2\sin v\cdot\cos 3v) \ .$$

Vi benytter formlen

$$2\sin x\cdot\cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y) \ ,$$

så

$$k = \frac{1}{2\sin v}(\sin 2v - (\sin(-v) + \sin 3v) + (\sin(-2v) + \sin 4v))$$

$$= \frac{1}{2\sin v}(\sin 2v + \sin v - \sin 3v - \sin 2v + \sin 4v) = \frac{1}{2\sin v}(\sin v - \sin 3v + \sin 4v) \ ,$$

og da $\sin 3v = \sin 4v$, er

$$k = \frac{\sin v}{2\sin v} = \frac{1}{2}$$

som ønsket.

2. metode

Efter opgave a kan vi omformulere sådan:

$$\tan 3v - 4\sin v = \sqrt{7} \quad \Leftrightarrow \quad \tan 3v - 4\sin v = \tan v\cdot\tan 2v\cdot\tan 3v$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 3v\cdot(1 - \tan v\cdot\tan 2v) = 4\sin v \quad \Leftrightarrow \quad \tan 3v\cdot\frac{\tan v + \tan 2v}{\tan(v + 2v)} = 4\sin v$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan v + \tan 2v = 4\sin v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin v}{\cos v} + \frac{\sin 2v}{\cos 2v} = 4\sin v$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin v \cdot \cos 2v + \sin 2v \cdot \cos v = 4\sin v \cdot \cos v \cdot \cos 2v$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin(v + 2v) = 2\sin 2v \cdot \cos 2v \quad \Leftrightarrow \quad \sin 3v = \sin 4v \quad \Leftrightarrow \quad \sin\tfrac{3\pi}{7} = \sin\tfrac{4\pi}{7} \ ,$$

hvilket åbenbart er sandt.

3. metode (Jan Erik Pedersen, Åkirkeby)

Vi sætter v = $\frac{\pi}{7}$ og har, at

$$\tan 2v = \frac{2\tan v}{1-\tan^2 v} \ , \ \tan 3v = \frac{3\tan v - \tan^3 v}{1-3\tan^2 v} \ .$$

Vi sætter $x = \tan v$, og idet

$$\tan 3v = -\tan 4v = \frac{4\tan^3 v - 4\tan v}{\tan^4 v - 6\tan^2 v + 1}$$

fås, idet $x \neq 0$ at

$$\frac{4x^3-4x}{x^4-6x^2+1} = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x^2-4}{x^4-6x^2+1} = \frac{3-x^2}{1-3x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7 = 0 \ . \tag{3}$$

Efter opgave **a** har vi altså

$$\tan v \cdot \tan 2v \cdot \tan 3v = \sqrt{7} \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \sqrt{7} \ . \tag{4}$$

Vi skal vise, at

$$\tan 3v - 4\sin v = \sqrt{7} \ ,$$

og da

$$\sin v = \frac{\tan v}{\sqrt{1+\tan^2 v}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ ,$$

skal vi efter (4) vise, at

$$\frac{x^3-3x}{1-3x^2} - \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x^2}{1-x^2} \cdot \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \ .$$

Dette omskrives sådan:

$$\frac{x^3-3x}{1-3x^2} - \frac{2x^2(x^3-3x)}{(1-x^2)(1-3x^2)} = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3-3x}{1-3x^2}\left(1 - \frac{2x^2}{1-x^2}\right) = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-3}{1-3x^2} \cdot \frac{1-3x^2}{1-x^2} = \frac{4}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-3}{1-x^2} = \frac{4}{\sqrt{1+x^2}} \ .$$

Da $0 < x < 1$ er dette ensbetydende med

$$\frac{x^4-6x^2+9}{x^4-2x^2+1} = \frac{16}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7 = 0 \ .$$

Efter (3) er dette opfyldt.

c.

1. metode

Efter opgave a kan vi omforme formlen således:

$$\tan 2v - 4\sin 4v = -\tan v\cdot\tan 2v\cdot\tan 3v \quad\Leftrightarrow\quad \tan 2v\cdot(1 + \tan v\cdot\tan 3v) = 4\sin 4v$$

$$\Leftrightarrow\quad \tan 2v\cdot\frac{\tan v - \tan 3v}{\tan(v-3v)} = 4\sin 4v \quad\Leftrightarrow\quad \tan 2v\cdot\frac{\tan v - \tan 3v}{\tan(-2v)} = 4\sin 4v$$

$$\Leftrightarrow\quad \tan 3v - \tan v = 4\sin 4v \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sin 3v}{\cos 3v} - \frac{\sin v}{\cos v} = 4\sin 4v$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin 3v\cdot\cos v - \sin v\cdot\cos 3v = 4\sin 4v\cdot\cos 3v\cdot\cos v$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin(3v - v) = 4\sin 4v\cdot\cos 3v\cdot\cos v$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin 2v = 4\cdot 2\cdot\sin 2v\cdot\cos 2v\cdot\cos 3v\cdot\cos v$$

$$\Leftrightarrow\quad 8\cos v\cdot\cos 2v\cdot\cos 3v = 1\ .$$

Dette er sandt efter opgave *a*.

2. metode

Vi har, at

$$\tan\tfrac{2\pi}{7} - 4\sin\tfrac{4\pi}{7} = -\sqrt{7} \quad\Leftrightarrow\quad 8\sin\tfrac{2\pi}{7}\cdot\cos\tfrac{2\pi}{7} - \frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}} = \sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}\left(8\cos^2\tfrac{2\pi}{7} - 1\right) = \sqrt{7}\ . \tag{5}$$

Idet $\cos\frac{2\pi}{7} > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, er

$$8\cos^2\tfrac{2\pi}{7} - 1 > 8\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 1 = 1 > 0\ ,$$

så venstre side af ligningen (5) er positiv. Hvis vi sætter $w = \frac{2\pi}{7}$, er (3) derfor ensbety- dende med

$$\left(8\sin w\cdot\cos w - \frac{\sin w}{\cos w}\right)^2 = 7\ . \tag{6}$$

Nu har vi fra det trigonometriske formelmaskineri, at

$$\sin 7w = \sin w\cdot(7 - 56\sin^2 w + 112\sin^4 w - 64\sin^6 w)\ . \tag{7}$$

Da $\sin 7w = \sin 2\pi = 0$, er (7) ensbetydende med

$$64\sin^6 w - 112\sin^4 w + 56\sin^2 w - 7 = 0\ . \tag{8}$$

For overskueligheds skyld sætter vi $s = \sin w$ og $c = \cos w$, så (8) kan omskrives til

$$64s^6 - 112s^4 + 56s^2 - 7 = 0\ . \tag{9}$$

Vi skal vise ligning (6), dvs. at

$$\left(8sc - \frac{s}{c}\right)^2 = 7\ ,$$

som vi omskriver sådan:

$$64s^2c^2 - 16s^2 + \frac{s^2}{c^2} = 7 \quad\Leftrightarrow\quad 64s^2(1 - s^2) - 16s^2 + \frac{s^2}{1-s^2} = 7$$

$$\Leftrightarrow\quad 64s^2(1 - s^2)^2 - 16s^2(1 - s^2) + s^2 = 7(1 - s^2)$$

$$\Leftrightarrow\quad 64s^6 - 128s^4 + 64s^2 + 16s^4 - 16s^2 + s^2 = 7 - 7s^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 64s^6 - 112s^4 + 56s^2 - 7 = 0 ,$$

hvilket netop er ligning (9).

3. metode

Vi har, at $\sin 7w = \sin 2\pi = 0$, og vi skal vise, at

$$4\sin 2w - \tan w = \sqrt{7} .$$

Nu er

$$4\sin 2w - \tan w = \frac{1}{\cos w}(4\sin 2w\cdot\cos w - \sin w) = \frac{1}{\cos w}(8\sin w\cdot\cos^2 w - \sin w)$$
$$= \frac{1}{\cos w}(8\sin w\cdot(1 - \sin^2 w) - \sin w) = \frac{1}{\cos w}(7\sin w - 8\sin^3 w)$$
$$= \frac{1}{\cos w}(6\sin w - 8\sin^3 w + \sin w) = \frac{1}{\cos w}(2\sin 3w + \sin w) > 0 ,$$

så vi skal vise, at

$$(4\sin 2w - \tan w)^2 = 7 .$$

Fra opgave a har vi, at

$$\cos\tfrac{\pi}{7} - \cos\tfrac{2\pi}{7} + \cos\tfrac{3\pi}{7} = \tfrac{1}{2} \quad \text{eller} \quad \cos\tfrac{2\pi}{7} - \cos\tfrac{\pi}{7} - \cos\tfrac{3\pi}{7} = -\tfrac{1}{2} ,$$

hvilket er ensbetydende med

$$\cos\left(2\pi - \tfrac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \tfrac{3\pi}{7}\right) = -\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \cos\tfrac{12\pi}{7} + \cos\tfrac{8\pi}{7} + \cos\tfrac{4\pi}{7} = -\tfrac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos 2w + \cos 4w + \cos 6w = -\tfrac{1}{2} .$$

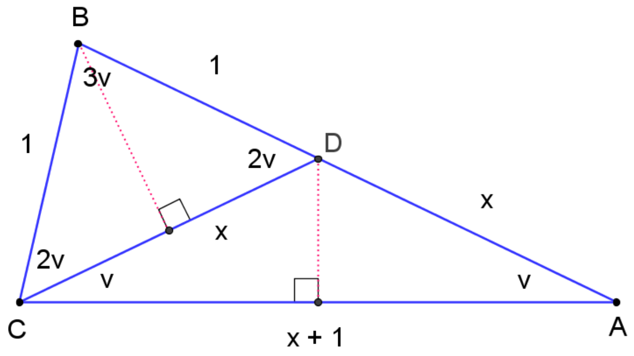
Derefter er

$$7 - (4\sin 2w - \tan w)^2 = \frac{1}{\cos^2 w}\left(7\cos^2 w - (4\sin 2w\cdot\cos w - \sin w)^2\right)$$
$$= \frac{1}{\cos^2 w}\left(7\cos^2 w - (2\sin 3w + \sin w)^2\right)$$
$$= \frac{1}{\cos^2 w}\left(7\cos^2 w - 4\sin^2 3w - 4\sin 3w\cdot\sin w - \sin^2 w\right)$$
$$= \frac{1}{2\cos^2 w}\left(7(1+\cos 2w) - 4(1-\cos 6w) - 4(\cos 2w - \cos 4w) - 1 + \cos 2w\right)$$
$$= \frac{1}{2\cos^2 w}\left(7 + 7\cos 2w - 4 + 4\cos 6w - 4\cos 2w + 4\cos 4w - 1 + \cos 2w\right)$$
$$= \frac{1}{2\cos^2 w}\left(4\cos 2w + 4\cos 4w + 4\cos 6w + 2\right)$$
$$= \frac{1}{\cos^2 w}\left(1 + 2(\cos 2w + \cos 4w + \cos 6w)\right) = \frac{1}{\cos^2 w}\left(1 + 2\cdot(-\tfrac{1}{2})\right) = 0 ,$$

hvilket er det ønskede.

4. metode

Vi ser på den lige- benede ΔABC, hvor $A = v = \frac{\pi}{7}$ og $B = C = 3v$. Vi sætter $BC = 1$, og punktet D ligger på AB, så $BD = BC = 1$. Vi sætter $AD = x$, så $AC = x + 1$.



Da ΔBCD er ligebenet, er

$$\angle BDC = \angle BCD = 2v \quad ,$$

$$\angle ACD = v \quad .$$

Da ΔACD er ligebenet, er $CD = x$. I ΔCDA er

$$\cos v = \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x} = \frac{x+1}{2x} \quad ,$$

og i ΔCBD er

$$\cos 2v = \tfrac{x}{2} \quad .$$

Dermed er

$$\cos 2v = 2\cos^2 v - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = 2\cdot\left(\frac{x+1}{2x}\right)^2 - 1 \ ,$$

hvilket efter en del træls algebra reduceres til

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \quad . \tag{10}$$

Sinusrelationen i ΔCBD giver

$$\frac{\sin 3v}{x} = \frac{\sin 2v}{1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin 2v}{\cos 2v} = \frac{\sin 3v}{x\cdot\cos 2v} \quad \Leftrightarrow \quad \tan 2v = \frac{\sin 3v}{x\cdot\frac{x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan 2v = \frac{2}{x^2}\cdot\sin 3v \quad .$$

Idet $\sin 3v = \sin 4v$, er den formel, vi skal vise, ensbetydende med

$$\tan 2v - 4\sin 4v = -\sqrt{7} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x^2}\cdot\sin 3v = 4\sin 3v - \sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 3v\cdot\left(\frac{2}{x^2} - 4\right) = -\sqrt{7} \quad \Leftrightarrow \quad \sin 3v = \frac{x^2\sqrt{7}}{4x^2 - 2} \ . \tag{11}$$

Cosinusrelationen i ΔCBD giver

$$\cos 3v = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2\cdot 1\cdot 1} = \frac{2 - x^2}{2} \ . \tag{12}$$

Da

$$\tfrac{\pi}{4} < 2v = \tfrac{2\pi}{7} < \tfrac{\pi}{3}$$

er

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\tfrac{\pi}{4} > \cos 2v > \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} > \tfrac{x}{2} > \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 1 < x < \sqrt{2}\ .$$

Altså er både sin3v og cos3v positive i (11) og (12).
Vi skal vise, at (11) er sand. Dette sker ved at vise, at grundrelationen er opfyldt:

$$\sin^2 3v + \cos^2 3v = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{x^2\sqrt{7}}{4x^2-2}\right)^2 + \left(\frac{2-x^2}{2}\right)^2 = 1$$

Et orgie i algebra giver, at denne ligning er ensbetydende med

$$4x^2(x^3 - x^2 - 2x + 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1) = 0\ .$$

Efter (10) er dette opfyldt, og beviset er slut.

Bemærkning.

I opgave c, 3. metode, udledte vi formlen

$$\cos\tfrac{4\pi}{7} + \cos\tfrac{8\pi}{7} + \cos\tfrac{12\pi}{7} = -\tfrac{1}{2}$$

eller

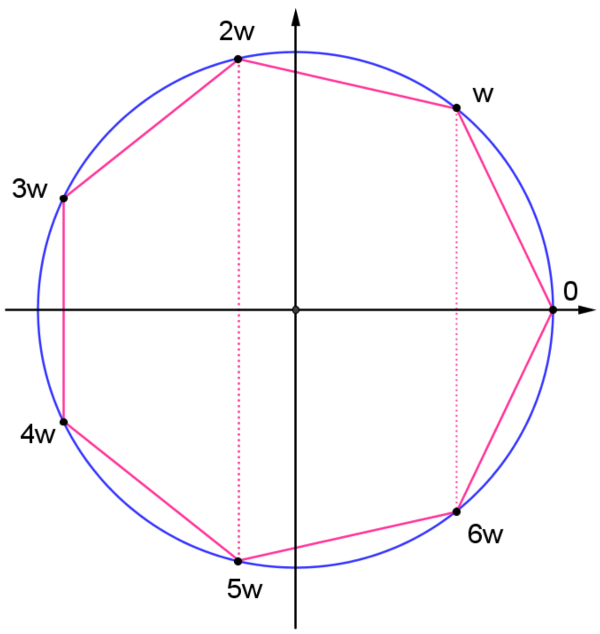
$$\cos\tfrac{4\pi}{7} + \cos\tfrac{6\pi}{7} + \cos\tfrac{2\pi}{7} = -\tfrac{1}{2}\ .$$

Vi kan indse denne formel ved at betragte de 7 enhedsrødder i ligningen $x^7 - 1 = 0$. De er

$$e^{\frac{2\pi i}{7}k} = \cos\tfrac{2\pi k}{7} + i\sin\tfrac{2\pi k}{7}\ ,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, 6\ .$$

Summen af rødderne er lig med koefficienten til leddet af næsthøjest grad (dvs. 6 grad) med modsat fortegn, dvs. summen af rødderne er 0. Altså er summen af røddernes realdele lig med 0:



$$\cos 0 + \cos w + \cos 2w + \cos 3w + \cos 4w + \cos 5w + \cos 6w = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos 0 + (\cos w + \cos 6w) + (\cos 2w + \cos 5w) + (\cos 3w + \cos 4w) = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad 1 + 2\cos 6w + 2\cos 2w + 2\cos 4w = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos 2w + \cos 4w + \cos 6w = -\tfrac{1}{2}\ .$$

Enhedsrødderne udspænder en regulær 7-kant, der er symmetrisk om x-aksen, så sum- men af stedvektorerne til vinkelspidserne er 0.

Bemærkning.

Walther Janous, Innsbruck, nævner følgende (kendte?) trigonometriske produkter:

$$\prod_{k=1}^{\mathrm{int}\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}^{\,n-1}}\ ,\qquad \prod_{k=1}^{\mathrm{int}\frac{n-1}{2}} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}^{\,n-1}}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\sqrt{n} + \frac{1-(-1)^n}{2}\right)\ .$$

Lidt mere overskueligt kan vi skrive, at

for n ulige er

$$\sin\tfrac{\pi}{n}\cdot\sin\tfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\left(\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}^{n-1}} \quad \text{og} \quad \cos\tfrac{\pi}{n}\cdot\cos\tfrac{2\pi}{n}\cdots\cos\left(\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}^{n-1}} \ ,$$

for n lige er

$$\sin\tfrac{\pi}{n}\cdot\sin\tfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\left(\tfrac{n-2}{2}\cdot\tfrac{\pi}{n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}^{n-1}} \quad \text{og} \quad \cos\tfrac{\pi}{n}\cdot\cos\tfrac{2\pi}{n}\cdots\cos\left(\tfrac{n-2}{2}\cdot\tfrac{\pi}{n}\right)=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}^{n-1}} \ .$$

Heraf fås, at

for n ulige er

$$\tan\tfrac{\pi}{n}\cdot\tan\tfrac{2\pi}{n}\cdots\tan\left(\tfrac{n-1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{n}\right)=\sqrt{n} \ ,$$

for n lige er

$$\tan\tfrac{\pi}{n}\cdot\tan\tfrac{2\pi}{n}\cdots\tan\left(\tfrac{n-2}{2}\cdot\tfrac{\pi}{n}\right)=1.$$

Altså gælder for n = 7, at

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{2\pi}{7}\cdot\tan\tfrac{3\pi}{7}=\sqrt{7} \ .$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jan Erik Pedersen