Svar på opgave 381 (August 2021)

Opgave:

a. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$y = \frac{x^3+12x}{3x^2+4} \quad , \quad z = \frac{y^3+12y}{3y^2+4} \quad , \quad x = \frac{z^3+12z}{3z^2+4} \ .$$

b. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$x^3 - 9(y^2 - 3y + 3) = 0$$
$$y^3 - 9(z^2 - 3z + 3) = 0$$
$$z^3 - 9(x^2 - 3x + 3) = 0 \ .$$

c. Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$2x + x^2y = y$$
$$2y + y^2z = z$$
$$2z + z^2x = x \ .$$

Besvarelse:

a.

1. metode.

Vi definerer funktionen

$$f(x) = \frac{x^3+12x}{3x^2+4} \ ,$$

som er voksende, idet

$$f\,'(x) = \frac{3(x^2-4)^2}{(3x^2+4)^2} > 0 .$$

Vi har så, at

$$y = f(x) \quad , \quad z = f(y) \quad , \quad x = f(z) \ .$$

Vi kan antage, at $x = \min\{x,y,z\}$. Så er $y = f(x) \le f(y) = z$. Da så $y \le z$, er $f(y) \le f(z)$ eller $z \le x$. Dermed er

$$x \le y \le z \le x \ ,$$

så $x = y = z$. Altså er

$$x = \frac{x^3+12x}{3x^2+4} \quad \Leftrightarrow \quad 3x^3+4x = x^3+12x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3-8x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=\pm 2 .$$

Løsningerne er altså

$$(x,y,z) \ : \ (-2,-2,-2) \ , \ (0,0,0) \ , \ (2,2,2) \ .$$

2. metode.

Vi får, at

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \quad \text{og} \quad (x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \ ,$$

hvoraf

$$y+2=\frac{(x+2)^3-6x^2-8}{3x^2+4}+2=\frac{(x+2)^3-2(3x^2+4)}{3x^2+4}+2=\frac{(x+2)^3}{3x^2+4}$$

og

$$y-2=\frac{(x-2)^3+6x^2+8}{3x^2+4}-2=\frac{(x-2)^3+2(3x^2+4)}{3x^2+4}-2=\frac{(x-2)^3}{3x^2+4} \quad .$$

Tilsvarende formler fås for de variable y og z og for x og z.
Hvis $x = 2$, er

$$y=\frac{2^3+12\cdot 2}{3\cdot 2^2+4}=\frac{32}{16}=2 \quad \text{og} \quad z = 2 \ .$$

Hvis $y \neq 2$, er

$$\frac{y+2}{y-2}=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^3 \quad , \quad \frac{z+2}{z-2}=\left(\frac{y+2}{y-2}\right)^3 \quad , \quad \frac{x+2}{x-2}=\left(\frac{z+2}{z-2}\right)^3 \ .$$

Disse ligninger indsættes indbyrdes i hinanden bagfra, og man får

$$\frac{x+2}{x-2}=\left(\frac{z+2}{z-2}\right)^3=\left(\frac{y+2}{y-2}\right)^9=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{27} \ .$$

Altså har vi mulighederne

$$\frac{x+2}{x-2}=-1 \quad , \quad \frac{x+2}{x-2}=0 \quad , \quad \frac{x+2}{x-2}=1 \ .$$

Den første ligning giver $x = 0$, den anden $x = -2$ og den tredje har ingen løsning. Løs- ningen $x = 0$ giver $y = 0$ og $z = 0$, og løsningen $x = -2$ giver $y = -2$ og $z = -2$.

Bemærkning. Ønsker man ikke at benytte differentialregning, kan man se, at $f(x)$ er voksende ved at bemærke, at

$$f(a)-f(b)=\frac{a^3+12a}{3a^2+4}-\frac{b^3+12b}{3b^2+4}=\frac{3(ab-4)^2+4(a-b)}{(3a^2+4)(3b^2+4)}\cdot(a-b) \ .$$

Hvis $a > b$, er altså $f(a) > f(b)$.

b.

Vi har, at

$$(y - 3)^3 = y^3 - 3y^2\cdot 3 + 3y\cdot 3^2 - 3^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27 = y^3 - 9(y^2 - 3y + 3) \ . \qquad (1)$$

Den første ligning i systemet giver

$$x^3 = 9(y^2 - 3y + 3) \ ,$$

så (1) giver

$$(y - 3)^3 = y^3 - x^3 \ .$$

Tilsvarende omskrives de to andre ligninger, så systemet er ensbetydende med

$$(y - 3)^3 = y^3 - x^3$$
$$(z - 3)^3 = z^3 - y^3$$
$$(x - 3)^3 = x^3 - z^3 \,.$$

Addition giver

$$(x - 3)^3 + (y - 3)^3 + (z - 3)^3 = 0 \,. \tag{2}$$

De tre variable x, y og z kan ikke alle være mindre end eller lig med 3, idet venstre side i (2) i så fald var negativ. Vi kan derfor antage, at $x \geq 3$. Den tredje ligning i systemet omskrives sådan:

$$z^3 - 9(x^2 - 3x + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 - 27 = 9x(x - 3) \,,$$

og da $x \geq 3$ følger heraf, at $z \geq 3$. På samme måde er $y \geq 3$.
Af (2) slutter vi, at $x = y = z = 3$ er den eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses, at $(x,y,z) = (3,3,3)$ faktisk passer.

c.

Hvis en af de ubekendte, fx x, er ± 1, får vi

$$2x + x^2y = y \quad \Leftrightarrow \quad \pm 2 + y = y \,,$$

hvilket er umuligt. Ingen af de variable har altså værdien ± 1. Så kan ligningssystemet omformes til

$$y = \frac{2x}{1-x^2} \quad , \quad z = \frac{2y}{1-y^2} \quad , \quad x = \frac{2z}{1-z^2} \,.$$

Nu husker vi formlen

$$\tan 2v = \frac{2\tan v}{1-\tan^2 v} \,,$$

så vi foretager substitutionen $x = \tan v$ for $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$, v $v \neq \frac{\pi}{4}$. Så får vi ligningssy- stemet

$$y = \tan 2v \quad , \quad z = \frac{2\tan 2v}{1-\tan^2 2v} = \tan 4v \quad , \quad x = \frac{2\tan 4v}{1-\tan^2 4v} = \tan 8v \,.$$

Dermed findes et helt tal k, så

$$\tan v = \tan 8v \quad \Leftrightarrow \quad 8v - v = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad v = \tfrac{1}{7}k\pi \,,$$

og derfor

$$-\tfrac{\pi}{2} < \tfrac{1}{7}k\pi < \tfrac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{7\pi}{2} < k\pi < \tfrac{7\pi}{2} \,,$$

så $-3 \leq k \leq 3$. Derfor har ligningssystemet løsningerne

$$(x,y,z) = \left(\tan\tfrac{k\pi}{7}, \tan\tfrac{2k\pi}{7}, \tan\tfrac{4k\pi}{7}\right) \,, \quad k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \,.$$

Værdien $k = 0$ giver den indlysende løsning $(x,y,z) = (0,0,0)$, mens $k = \pm 1$ eksempelvis giver

$$(x,y,z) = (\pm 0{,}48157 \,,\ \pm 1{,}25396 \,,\ \mp 4{,}38129) \,.$$

Vi nævner, at $(x,y,z) = (\pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{i})$ er komplekse løsninger til ligningssystemet.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Benner
- Walther Janous
- Jan Erik Pedersen.