Svar på opgave 382 (September 2021)

Opgave:

a. Bestem to rødder i polynomiet

$$p(x) = x^5 - 55x + 21$$

hvis produkt er 1.

b. Vis, at polynomiet

$$p(x) = \tfrac{1}{630}x^9 - \tfrac{1}{21}x^7 + \tfrac{13}{30}x^5 - \tfrac{82}{63}x^3 + \tfrac{32}{35}x$$

antager hele værdier, når x er hel.

c. Vis, at rødderne x_1, x_2 og x_3 i polynomiet

$$p(x) = ax^3 - ax^2 + bx + b \ ,$$

hvor a og b ikke er 0, opfylder, at

$$\left(x_1 + x_2 + x_3\right)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1 \ .$$

d. Polynomiet $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ har rødderne a, b og c. Bestem a, b og c.

e. Bestem alle polynomier med reelle rødder, hvis koefficienter tilhører {1,-1}.

Besvarelse:

a.

1. metode.

Lad x_1 og x_2 være de søgte rødder. Så er

$$x_1^5 = 55x_1 - 21 \quad \text{og} \quad x_2^5 = 55x_2 - 21 \ .$$

Multiplikation giver

$$x_1^5x_2^5 = (55x_1 - 21)(55x_2 - 21) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 55^2x_1x_2 - 21\cdot 55(x_1 + x_2) + 21^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 21^2 = 55^2 - 1155(x_1 + x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 3 \ .$$

Ligningssystemet

$$x_1 + x_2 = 3 \quad , \quad x_1x_2 = 1$$

har løsningerne

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right) \ , \ x_2 = \tfrac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right) \ .$$

2. metode (Jan Erik Pedersen, Aakirkeby).

Vi har, at

$$x^5 - 55x + 21 = (x^2 - 3x + 1)(x^3 + 3x^2 + 8x + 21)\ .$$

Rødderne x_1 og x_2 i andengradspolynomiet i den første faktor har produktet 1 (polyno- miets konstantled). Rødderne er

$$x_1, x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\ .$$

3. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Lad x_1 og x_2 være to rødder i $p(x)$, så $x_1x_2 = 1$. Vi sætter $x_1 + x_2 = a$.
Så vil

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - ax + 1$$

gå op i $p(x)$. Polynomiers division giver

$$p(x) = (x^2 - ax + 1) \cdot (x^3 + ax^2 + (a^2 - 1)x + a^3 - 2a) + (a^4 - 3a^2 - 54)x + 21 + 2a - a^3\ .$$

Da $x^2 - ax + 1$ går op i $p(x)$, må altså

$$a^4 - 3a^2 - 54 = 0 \quad \wedge \quad 21 + 2a - a^3 = 0\ .$$

Den første ligning giver $a^2 = 9$ eller $a^2 = -6$. Den anden ligning giver

$$a(a^2 - 2) = 21\ .$$

Hvis $a^2 = 9$, fås

$$a(9 - 2) = 21 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3\ ,$$

og hvis $a^2 = -6$ fås

$$a(-6 - 2) = 21 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{a} = -\tfrac{21}{8}\ ,$$

i strid med, at $a^2 = -6$.

Kun værdien $a = 3$ er brugbar, så vi har

$$x_1 + x_2 = 3 \quad \text{og} \quad x_1x_2 = 1.$$

Rødderne x_1 og x_2 er altså løsninger til

$$x^2 - 3x + 1 = 0\ ,$$

så

$$x_1, x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\ .$$

Bemærkning.

Asger Olesen, Tønder, anfører, at hvis vi sætter

$$x^5 - 55x + 21 = (x^2 + ax + 1)(x^3 + bx^2 + cx + 21)$$
$$= x^5 + (a + b)x^4 + (1 + c + ab)x^3 + (21 + ac + b)x^2 + (c + 21a)x + 21$$

får vi systemet

$$b = -a\ ,\ 1 + c + ab = 0\ ,\ 21 + ac + b = 0\ ,\ c + 21a = -55\ .$$

Dette giver, at

$$1 + c - a^2 = 0\ ,\ 21 + ac - a = 0\ ,\ c + 21a = -55\ ,$$

som medfører

$$a^2 - 1 = -21a - 55 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 21a + 54 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3 \ \vee \ a = -18 \ .$$

Dermed er

$$(a,c) = (-3,8) \quad \text{eller} \quad (a,c) = (-18,323) \ ,$$

men kun $(a,c) = (-3,8)$ passer i den midterste ligning, så $(a,b,c) = (-3,3,8)$. Altså er

$$x^5 - 55x + 21 = (x^2 - 3x + 1)(x^3 + 3x^2 + 8x + 21) \ .$$

b.

Der gælder, at

$$p(x) = \tfrac{1}{630}x(x^8 - 30x^6 + 273x^4 - 820x^2 + 576) \ .$$

Her må polynomiet i parentesen have rødder, der er divisorer i $576 = 2^6 \cdot 3^2$. Vi ser, at rødderne er $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ og ± 4, så

$$p(x) = \tfrac{1}{630}(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \ .$$

Her er polynomiet $630p(x)$ produkt af 9 konsekutive hele tal, så det er deleligt med $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 630$. Altså er $p(x)$ hel, hvis x er hel.

c.

Idet

$$p(x) = a\left(x^3 - x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{b}{a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$= a(x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \ ,$$

giver Vietes former

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad , \quad \tfrac{b}{a} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \quad , \quad -\tfrac{b}{a} = x_1x_2x_3 \ .$$

Nu er

$$\left(x_1 + x_2 + x_3\right)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \left(x_1 + x_2 + x_3\right) \cdot \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = 1 \cdot \frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}} = -1 \ .$$

d.

Vi har, at

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - a)(x - b)(x - c) \ ,$$

så Vietes former giver

$$-a = a + b + c \quad , \quad b = ab + ac + bc \quad , \quad c = -abc \ . \qquad (1)$$

Af den sidste ligning fås mulighederne $c = 0$ eller $ab = -1$.
Hvis $c = 0$ giver de to første ligninger, at

$$2a + b = 0 \quad , \quad b(a - 1) = 0 \ .$$

Løsningerne er $(a,b) = (0,0)$ og $(a,b) = (1,-2)$. Dermed er løsninger til opgaven:

$$(a,b,c) \ : \ (0,0,0) \ , \ (1,-2,0)$$

svarende til nulpolynomiet og til, at polynomiet

$$x^3 + x^2 - 2x$$

har rødderne 1, -2 og 0.
Hvis $ab = -1$, er $a = -\frac{1}{b}$, så ligningssystemet (1) bliver til

$$\tfrac{2}{b} = b + c \quad , \quad b = -1 - \tfrac{c}{b} + bc$$

eller

$$2 = b^2 + bc \quad , \quad b^2 = -b - c + b^2c \ .$$

Den anden af disse ligninger giver

$$b^2 + b + c - b^2c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b(b+1) - c(b^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b+1)(b - c(b-1)) = 0 \ .$$

Altså har vi mulighederne $b = -1$ eller $b = c(b - 1)$.
Hvis $b = -1$, er $a = 1$ og $c = -1$, så $(a,b,c) = (1,-1,-1)$ svarende til, at polynomiet

$$x^3 + x^2 - x - 1$$

har rødderne 1, -1 og -1.
Hvis $b = c(b - 1)$ er $c = \frac{b}{b-1}$, så vi får

$$2 = b^2 + bc \quad \Leftrightarrow \quad 2 = b^2 + \frac{b^2}{b-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2(b-1) = b^2(b-1) + b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b^3 - 2b + 2 = 0 \ .$$

Hvis $b = k_0$ er løsning til denne ligning, har vi løsningerne

$$(a,b,c) = \left(-\frac{1}{k_0}, k_0, \frac{k_0}{k_0 - 1}\right) .$$

Bemærkning.

Jan Erik Pedersen, anfører, at vi med komplekse tal får

$$b^3 - 2b + 2 = (b + 1{,}769292)(b^2 - 1{,}769292b + 1{,}130394) \ .$$

Her har andengradspolynomiet rødderne

$$b = 0{,}884646 \pm 0{,}589743\mathrm{i} \ ,$$

så

$$a = -\tfrac{1}{b} = -0{,}782599 \pm 0{,}521714\mathrm{i} \quad , \quad c = -2a - b = 0{,}680551 \pm 1{,}633170\mathrm{i} \ .$$

Bemærkning.

Teorien for løsning af tredjegradsligningen giver den eksakte løsning

$$k_0{}^3 - 2k_0 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_0 = \sqrt[3]{-1 + \tfrac{\sqrt{19}}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-1 - \tfrac{\sqrt{19}}{3\sqrt{3}}} \approx -1{,}769292.$$

e.

Lad polynomiet

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

være et polynomium, hvor $a_i = \pm 1$. Vi kan forudsætte, at $a_n = 1$. Thi hvis $a_n = -1$, kan vi i stedet se på polynomiet $-p(x)$.

Lad nu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være polynomiets reelle rødder. Efter Vietes formler er

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1} \quad , \quad x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2} \quad , \quad x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n a_0 \, .$$

Nu er

$$0 \le x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)$$
$$= a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 1 - 2a_{n-2} \, .$$

Altså er $a_{n-2} = -1$, så

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 - 2a_{n-2} = 3 \, .$$

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal giver

$$\frac{3}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \ge \sqrt[n]{\left(|x_1| \cdot |x_2| \cdots |x_n|\right)^2} = \sqrt[n]{a_0^2} = 1 \, , \qquad (2)$$

hvoraf $n \le 3$. Polynomier, der opfylder opgavens krav, er altså af højst tredje grad.
Antag først, at $n = 3$. Så gælder lighedstegnet i (2), så

$$|x_1| = |x_1| = |x_1| = \sqrt[3]{|x_1x_2x_3|} = 1 \, .$$

Dermed er polynomierne

$$(x - 1)^3 \;,\; (x - 1)^2(x + 1) \;,\; (x + 1)^2(x - 1) \quad , \quad (x + 1)^3$$

de eneste muligheder, der opfylder kravet om reelle rødder. Vi kan dog kun bruge

$$(x - 1)^2(x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1 \quad \text{og} \quad (x + 1)^2(x - 1) = x^3 + x^2 - x - 1 \, .$$

Lad så $n = 2$. Blandt de fire polynomier

$$x^2 \pm x \pm 1$$

har kun de to følgende reelle rødder:

$$x^2 + x - 1 \quad \text{og} \quad x^2 - x - 1 \, .$$

For $n = 1$ får vi polynomierne $x + 1$ og $x - 1$. Dermed har vi i alt fundet følgende 12 po- lynomier, der opfylder betingelsen:

$$\pm(x^2 - 1)(x \pm 1) \;,\; \pm(x^2 \pm x - 1) \quad , \quad \pm(x \pm 1) \;.$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Hans Benner
- Roger Bengtsson
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen
- Con Amore Problemgruppe