Svar på opgave 384 (November 2021)

Opgave:

Bestem det mindste reelle tal, der kan optræde som areal af to forskellige trekanter med hele sidelængder.

Besvarelse:

1. metode.

Idet trekanten med areal T har en omkreds på $2s$ sætter vi

$$t = (a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$$
$$= 2s(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c) = 16s(s - a)(s - b)(s - c) = 16T^2 .$$

Vi kan antage, at $c \leq b \leq a$ og sætte

$$b = c + x \ , \ a = b + y = c + x + y \ ,$$

hvor $x, y \geq 0$. Så er

$$t = (3c + 2x + y)(c - y)(c + y)(c + 2x + y) \ . \tag{1}$$

Altså er $y < c$. Hvis c, x og y er reelle tal, der opfylder

$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ y < c \ ,$$

findes en trekant med sidelængder

$$c + x + y \ , \ c + x \ , \ c \ ,$$

fordi trekantulighederne er opfyldt:

$$c + x + y + c + x > c \quad \Leftrightarrow \quad c + 2x + y > 0 \ ,$$
$$c + x + y + c > c + x \quad \Leftrightarrow \quad c + y > 0$$
$$c + x + c > c + x + y \quad \Leftrightarrow \quad c > y \ .$$

Vi bemærker, at når x vokser, vil også værdien af t i (1) vokse.

Nu viser vi, at tal $t < 63$ ikke på to forskellige måder kan skrives på formen (1), når $x, y \geq 0$ og $y < c$. Vi deler op i tilfælde efter c.

I. $c = 1$. Vi får

$$a = 1 + x + y \ , \ b = 1 + x \ , \ c = 1 \ .$$

Da $x, y \geq 0$ og $y < c = 1$, er $y = 0$ så

$$a = b = 1 + x \ , \ c = 1 \ .$$

Vi får

$$t = (3 + 2x)\cdot 1\cdot 1\cdot (1 + 2x) = 4x^2 + 8x + 3\ .$$

Værdierne $x = 0, 1, 2, 3$ giver $t = 3, 15, 35, 63$.

II. $c = 2$. Her er

$$a = 1 + x + y\ \ ,\ \ b = 1 + x\ \ ,\ \ c = 2\ .$$

Hvis $y = 0$ er

$$a = b = 1 + x\ \ ,\ \ c = 2\ ,$$

og

$$t = (6 + 2x)\cdot 2\cdot 2\cdot (2 + 2x) = 16(x^2 + 4x + 3)\ .$$

Værdierne $x = 0, 1$ giver $t = 48, 128$.

Hvis $y = 1$, er

$$a = 2 + x + y = 3 + x\quad ,\quad b = 2 + x\quad ,\quad \mathrm{c} = 2$$

og

$$t = (6 + 2x + 1)\cdot 1\cdot 3\cdot (2 + 2x + 1) = 12x^2 + 60x + 63 \geq 63\ ,$$

som for $x = 0, 1$ giver $t = 63, 135$.

III. $c \geq 3$. Da $x, y \geq 0$ og $y < c$, er

$$y + 1 \leq c \quad \Leftrightarrow \quad c - y \geq 1\ \ ,$$

$$c + y \geq c\quad ,\quad c + 2x + y \geq c\ ,$$

så vi får vurderingen

$$t \geq 3c\cdot 1\cdot c\cdot c = 3c^3 \geq 81 > 63\ .$$

I alt har vi fundet, at værdien $t = 63$ antages for $c = 1$:

$$a = b = 1 + x = 1 + 3\ \ ,\ \ c = 1\ ,$$

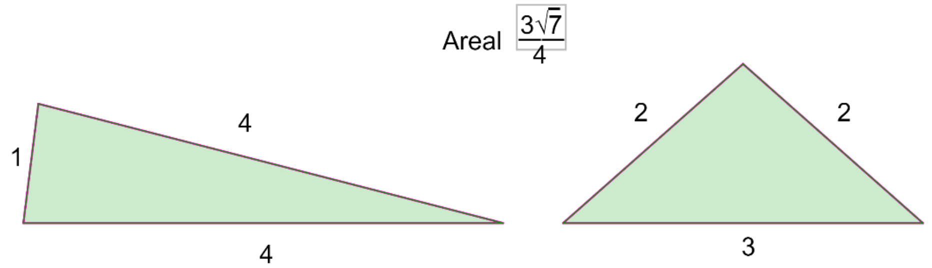
og for $c = 2$:

$$a = 1 + x + y = 1 + 0 + 2\quad ,\quad b = c + x = 2 + 0 = 2\quad ,\quad c = 2\ .$$

Dermed har vi fundet to trekanter med hele sider og samme areal, nemlig

$$(a,b,c) = (4,4,1)\quad \text{hvor}\quad T^2 = \tfrac{t}{16} = \tfrac{63}{16}\ ,$$

$$(a,b,c) = (3,2,2)\quad \text{hvor}\quad T^2 = \tfrac{t}{16} = \tfrac{63}{16}\ .$$



2. metode **(Jens-Søren Andersen, Esbjerg).**

Lad T være arealet af en trekant med hele sidelængder a, b og c, hvor $a \le b \le c$.
Efter Herons formel er

$$16T^2 = (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\ .$$

Vi sætter

$$x_1 = a+b-c \quad , \quad x_2 = a+c-b \quad , \quad x_3 = b+c-a$$

og får

$$x_1 + x_2 + x_3 = a+b+c$$

så

$$16T^2 = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)\ .$$

Desuden er

$$a = \tfrac{1}{2}(x_1+x_2) \quad , \quad b = \tfrac{1}{2}(x_1+x_3) \quad , \quad c = \tfrac{1}{2}(x_2+x_3)\ ,$$

og

$$x_1 \le x_2 \iff a+b-c \le a+c-b \iff b \le c\ ,$$
$$x_2 \le x_3 \iff a+c-b \le b+c-a \iff a \le b\ .$$

At a, b og c er hele tal er ensbetydende med, at x_1, x_2 og x_3 har samme paritet. Dermed er afbildningen

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\,,\ \tfrac{1}{2}(x_1+x_3)\,,\ \tfrac{1}{2}(x_2+x_3)\right) = (a,b,c)$$

en bijektiv afbildning af mængden

$$\left\{(x_1,x_2,x_3)\in N^3 \,\middle|\, x_1,x_2,x_3 \text{ har samme paritet og } x_1 \le x_2 \le x_3\right\}$$

på mængden

$$\left\{(a,b,c)\in N^3 \,\middle|\, a,b,c \text{ er sider i en trekant og } a \le b \le c\right\}.$$

Vi ser på funktionen

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3)$$

og opstiller en tabel for alle muligheder, hvor $x_1 + x_2 + x_3 \le 8$ og én mulighed, hvor $x_1 + x_2 + x_3 = 9$.

$x_1 + x_2 + x_3$	3	5	6	7	7	8	9
(x_1, x_2, x_3)	(1,1,1)	(1,1,3)	(2,2,2)	(1,1,5)	(1,3,3)	(2,2,4)	(1,1,7)
$f(x_1, x_2, x_3)$	3	15	48	35	63	128	63

Tallene $f(x_1, x_2, x_3)$ er forskellige, bortset fra, at $f(1,3,3) = f(1,1,7) = 63$.

Lad os nu antage, at $x_1 + x_2 + x_3 \ge 9$. Vi deler op i tre tilfælde.

I. $x_3 \ge 7$. Da $x_1 \le x_2 \le x_3$ er

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) \ge 1\cdot 1\cdot 7\cdot 9 = 63\ .$$

II. $4 \le x_3 \le 6$. Så er

$$x_1 + x_2 \ge 9 - x_3 \ge 3\ ,$$

og da $x_1 \le x_2$ har vi mulighederne

$$(x_1, x_2)\ :\ (1,2)\ ,\ (1,3)\ ,\ (1,4)\ ,\ .\ .\ .\ ,\ (2,2)\ ,\ (2,3)\ ,\ .\ .\ .$$

så $x_2 \ge 2$. Altså er

$$f\,(x_1, x_2\,, x_3) = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \ \ge 1\cdot 2\cdot 4\cdot 9 > 63\ .$$

III. $x_3 \le 3$. Da $x_1 + x_2 + x_3 \ge 9$, er $x_1 = x_2 = x_3$, fordi $x_1 \le x_2 \le x_3$. Dermed er

$$f\,(x_1, x_2\,, x_3) = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \ = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 9 > 63\ .$$

Dermed har vi indset, at $f\,(x_1, x_2\,, x_3) > 63$ for alle værdier af $f\,(x_1, x_2\,, x_3)$, som ikke er medtaget i tabellen. Det søgte tal T opfylder derfor $16T^2 = 63$, så $T = \frac{1}{4}\sqrt{63} \approx 1{,}984$. Vi får, at

$$(x_1, x_2\,, x_3) = (1,3,3) \text{ giver } (a,b,c) = (\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)\ ,\ \tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)\ ,\ \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3)) = (2,2,3)\ ,$$

$$(x_1, x_2\,, x_3) = (1,1,7) \text{ giver } (a,b,c) = (\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)\ ,\ \tfrac{1}{2}(x_1 + x_3)\ ,\ \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3)) = (1,4,4)\ .$$

Bemærkning.

Hvis en trekant har sidelængder a, b og c, er arealet

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)}\ ,$$

hvor $x_1, x_2\,, x_3$ er naturlige tal med samme paritet og $x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c$. Hvis derfor trekantens omkreds er ulige, er arealet

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\text{ulige tal}}\ \ ,\quad x_1, x_2\,, x_3 \text{ er ulige}\ .$$

Hvis omkredsen er lige, er arealet

$$\sqrt{\text{helt tal}}\ \ ,\quad x_1, x_2\,, x_3 \text{ er lige}\ .$$

Specielt kan trekanten kun have et heltalligt areal, hvis omkredsen er lige.

Bemærkning.

Jens-Søren Andersen nævner, at det næstmindste reelle tal, som er areal af to ikke-kongruente trekanter med hele sidelængder er $\frac{1}{4}\sqrt{495} \approx 5{,}562$, idet

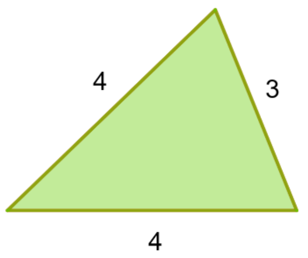
$$f\,(1,3,11) = f\,(3,3,5) = 495\ .$$

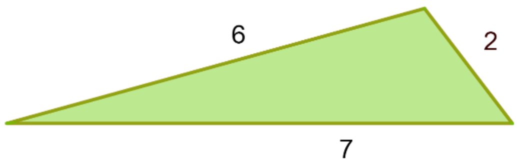
Trekanternes sidelængder fremgår af, at

$$(x_1, x_2\,, x_3) = (1,3,11) \text{ giver } (a,b,c) = (2,6,7)\ ,$$

$$(x_1, x_2\,, x_3) = (3,3,5) \text{ giver } (a,b,c) = (3,4,4)\ .$$

For de to mindste arealer er den ene trekant ligebenet. Man kan spørge, om der findes reelle tal, der er arealer for to ikke-kongruente trekanter, hvoraf ingen er retvinklede
eller ligebenede. Jens-Søren Andersen bemærker, at et par eksempler på dette er trekanterne $(a,b,c) = (4,5,8)$ og $(a,b,c) = (2,9,10)$ med arealer $\frac{3}{4}\sqrt{119}$.





Bemærkning.

Man kunne gennemgå trekanter med hele sider fra ’bunden’ og håbe på at møde to med samme areal. Sådanne trekanter har sidelængder

$$(a,b,c)\ :\ (1,1,1)\ ,(2,2,2)\ ,(2,2,1)\ ,(3,3,3)\ ,(3,3,1)\ ,(3,3,2)\ ,(3,2,2)\ ,$$
$$(4,4,4)\ ,(4,4,3)\ ,(4,4,2)\ ,(4,4,1)\ ,(4,3,3)\ ,(4,3,2)\ ,\ldots .$$

Man kan dog ikke vide, hvor langt op i rækken man skal beregne arealer for om muligt (måske aldrig?) at finde to trekanter med samme areal.

Bemærkning.

Walther Janous, Innsbruck, bemærker, at de tre trekanter med sidelæng- der (2,11,12), (3,8,10) og (4,5,6) alle har arealet $\frac{15}{4}\sqrt{7}$ og at de fire trekanter med side- længder (4,15,16), (5,18,22), (6,10,11) og (8,8,9) alle har arealet $\frac{45}{4}\sqrt{7}$.

Bemærkning.

Jan Erik Pedersen, Aakirkeby, bemærker, at de retvinklede trekanter med siderne (20,21,29) og (12,35,37) har samme areal, nemlig det hele tal 210.

Desuden påpeger han, at vi ved hjælp af Herons formel

$$4T = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

kan opstille en tabel over $4T$ for de mindste værdier af a og b:

(a,b)	$4T$	Værdier for c
(1,2)	$\sqrt{-c^4+10c^2-9} = \sqrt{16-(c^2-5)^2}$	$c = 2$
(1,3)	$\sqrt{-c^4+20c^2-64} = \sqrt{36-(c^2-10)^2}$	$c = 3$
(1,4)	$\sqrt{-c^4+34c^2-225} = \sqrt{64-(c^2-17)^2}$	$c = 4$
(2,3)	$\sqrt{-c^4+26c^2-25} = \sqrt{144-(c^2-13)^2}$	$c = 2, 3, 4$
(2,4)	$\sqrt{-c^4+40c^2-144} = \sqrt{256-(c^2-20)^2}$	$c = 3, 4, 5$

Derefter kan vi se på de værdier af $4T$, som de fundne værdier af c frembringer:

(a,b)	$c = 2$	$c = 3$	$c = 4$	$c = 5$
(1,2)	$\sqrt{15}$			
(1,3)		$\sqrt{35}$		
(1,4)			$\sqrt{63}$	
(2,3)	$\sqrt{63}$	$\sqrt{128}$	$\sqrt{135}$	
(2,4)		$\sqrt{135}$	$\sqrt{240}$	$\sqrt{231}$

Vi har så været heldige at finde to trekanter med sidelængder $(a,b,c) = (2,3,2)$ og $(a,b,c) = (1,4,4)$ med samme areal på $\frac{3}{4}\sqrt{7}$.

Besvarelser fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson & Alve Lindell
- Jan Erik Pedersen
- Con Amore Problemgruppe