

Svar på opgave 386 (Januar 2022)

Opgave:

Vis følgende trigonometriske identitet:

$$\frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{3\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{5\pi}{14}} = 416.$$

Besvarelse:

1. metode.

Vi sætter

$$a = \sin \frac{\pi}{14} = \cos \frac{6\pi}{14} = \cos \frac{3\pi}{7}, \quad b = \sin \frac{3\pi}{14} = -\cos \frac{10\pi}{14} = -\cos \frac{5\pi}{7},$$

$$c = \sin \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{2\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{7}.$$

Efter det trigonometriske formelmaskineri gælder

$$\cos 7v = 64\cos^7 v - 112\cos^5 v + 56\cos^3 v - 7\cos v.$$

For $v = \frac{3\pi}{7}$ fås

$$-1 = \cos 3\pi = 64\cos^7 \frac{3\pi}{7} - 112\cos^5 \frac{3\pi}{7} + 56\cos^3 \frac{3\pi}{7} - 7\cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow 64a^7 - 112a^5 + 56a^3 - 7a + 1 = 0.$$

For $v = \frac{5\pi}{7}$ fås

$$-1 = \cos 5\pi = 64\cos^7 \frac{5\pi}{7} - 112\cos^5 \frac{5\pi}{7} + 56\cos^3 \frac{5\pi}{7} - 7\cos \frac{5\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow 64(-b)^7 - 112(-b)^5 + 56(-b)^3 - 7(-b) + 1 = 0.$$

Endelig fås for $v = \frac{\pi}{7}$:

$$-1 = \cos \pi = 64\cos^7 \frac{\pi}{7} - 112\cos^5 \frac{\pi}{7} + 56\cos^3 \frac{\pi}{7} - 7\cos \frac{\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow 64c^7 - 112c^5 + 56c^3 - 7c + 1 = 0.$$

Nu er

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = (x+1)(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)^2, \quad (1)$$

så vi ser, at a , $-b$ og c er nulpunkter i polynomiet (1) og dermed i ligningen

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0,$$

og efter Vietas formler for rødderne i et polynomium er

$$a - b + c = \frac{1}{2}, \quad -ab - bc + ac = -\frac{1}{2}, \quad abc = \frac{1}{8}.$$

Så får vi

$$\frac{1}{4} = (a - b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(-ab - bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2 - 1,$$

hvoraf

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{4}.$$

Videre er

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= (-ab - bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2abc(-a + b - c) \\ &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

hvoraf

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 = \frac{3}{8}.$$

Endelig er

$$\begin{aligned} \frac{9}{64} &= ((ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2)^2 = (ab)^4 + (bc)^4 + (ac)^4 + 2(abc)^2(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= (ab)^4 + (bc)^4 + (ac)^4 + 2 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

hvoraf

$$(ab)^4 + (bc)^4 + (ac)^4 = \frac{13}{128}.$$

Til slut er

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} = \frac{(ab)^4 + (bc)^4 + (ac)^4}{(abc)^4} = \frac{\frac{13}{128}}{\left(\frac{1}{8}\right)^4} = 416.$$

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Vi sætter i den komplekse plan

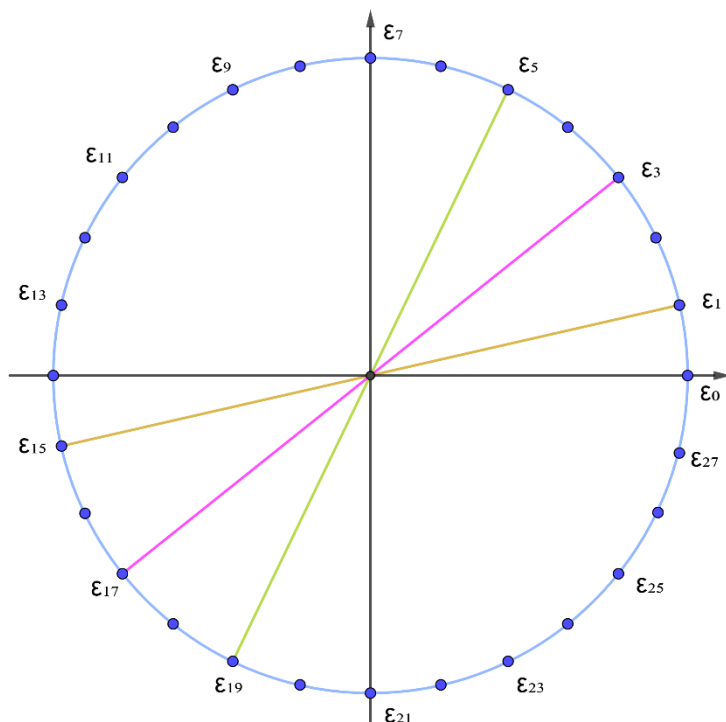
$$\varepsilon_k = e^{\frac{ik\pi}{14}} = \cos \frac{k\pi}{14} + i \sin \frac{k\pi}{14}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 27.$$

Så har vi

$$\varepsilon_{14+k} = -\varepsilon_k$$

og

$$\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{14-k} = e^{\frac{ik\pi}{14}} \cdot e^{\frac{i(14-k)\pi}{14}} = e^{\frac{14i\pi}{14}} = e^{i\pi} = -1. \quad (1)$$



For $k = 1, 3, 5$ sætter vi

$$x_k = \sin^2 \frac{k\pi}{14},$$

og desuden får vi brug for det lidt kryptiske udtryk

$$\begin{aligned} a_k &= -\varepsilon_k^2 - \varepsilon_{14-k}^2 = -(\varepsilon_k + \varepsilon_{14-k})^2 + 2\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{14-k} \\ &= -(2i \cdot \operatorname{Im} \varepsilon_k)^2 - 2 = -4i^2 \cdot (\operatorname{Im} \varepsilon_k)^2 - 2 = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{14} - 2 = 4x_k - 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Nu er

$$\begin{aligned} x^{28} - 1 &= (x^{14} - 1)(x^{14} + 1) = (x^{14} - 1)(x^2 + 1)(x^{12} - x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^{14} - 1)(x^2 + 1)p(x). \end{aligned}$$

Polynomiet $x^{28} - 1$ har de 28 enhedsrødder ε_k for $k = 0, 1, 2, \dots, 27$. Disse tal fordeler sig således:

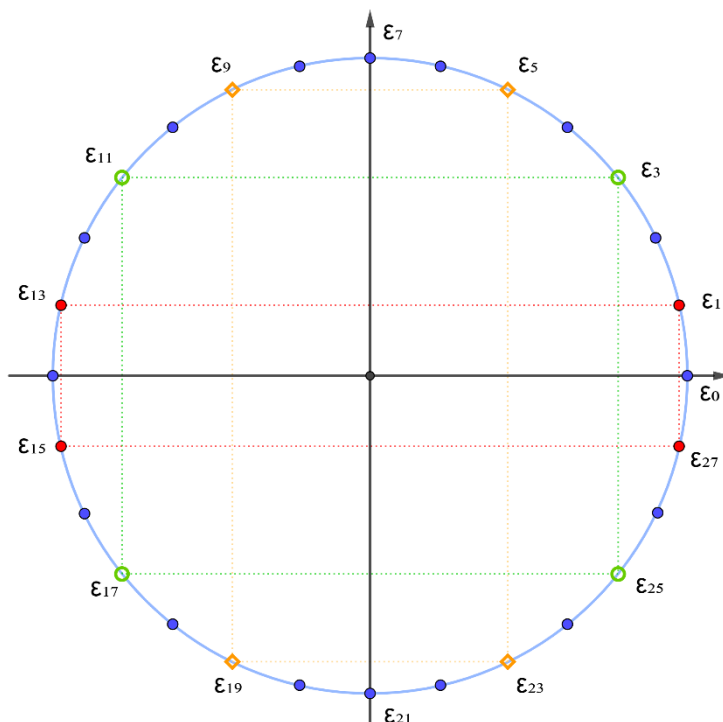
Tallene ε_k er rødder i $x^{14} - 1$ for $k = 0, 2, 4, 6, \dots, 24, 26$,

Tallene ε_k er rødder i $x^2 + 1$ for $k = 7, 21$,

Tallene ε_k er rødder i $p(x)$ for $k = 1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27$.

Rødderne i $p(x)$ kan deles i grupperne

$$\{\varepsilon_1, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{15}, \varepsilon_{27}\}, \{\varepsilon_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{17}, \varepsilon_{25}\}, \{\varepsilon_5, \varepsilon_9, \varepsilon_{19}, \varepsilon_{23}\}.$$



For grupperne får vi følgende udregninger:

$$\begin{aligned}(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_{13})(x - \varepsilon_{15})(x - \varepsilon_{27}) &= (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_{13})(x + \varepsilon_1)(x + \varepsilon_{13}) \\ &= (x^2 - \varepsilon_1^2)(x^2 - \varepsilon_{13}^2) = x^4 + (-\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{13}^2)x^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_{13}^2 = x^4 + a_1 x^2 + 1.\end{aligned}$$

Den anden gruppe giver

$$(x - \varepsilon_3)(x - \varepsilon_{11})(x - \varepsilon_{17})(x - \varepsilon_{25}) = \dots = x^4 + a_3 x^2 + 1,$$

og den tredje:

$$(x - \varepsilon_5)(x - \varepsilon_9)(x - \varepsilon_{19})(x - \varepsilon_{23}) = \dots = x^4 + a_5 x^2 + 1.$$

Dermed får vi opløsningen

$$\begin{aligned}p(x) &= (x^4 + a_1 x^2 + 1)(x^4 + a_3 x^2 + 1)(x^4 + a_5 x^2 + 1) \\ &= x^{12} + (a_1 + a_3 + a_5)x^{10} + (3 + a_1 a_3 + a_3 a_5 + a_5 a_1)x^8 + (2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + a_1 a_3 a_5)x^6 \\ &\quad + (3 + a_1 a_3 + a_3 a_5 + a_5 a_1)x^4 + (a_1 + a_3 + a_5)x^2 + 1.\end{aligned}$$

Sammenligning af koefficienter giver

$$a_1 + a_3 + a_5 = -1 \quad , \quad 3 + a_1 a_3 + a_3 a_5 + a_5 a_1 = 1 \quad , \quad 2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + a_1 a_3 a_5 = -1 \quad ,$$

hvoraf

$$a_1 + a_3 + a_5 = -1 \quad , \quad a_1 a_3 + a_3 a_5 + a_5 a_1 = -2 \quad , \quad a_1 a_3 a_5 = 1.$$

Efter (2) er

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{a_1 + 2}{4} + \frac{a_3 + 2}{4} + \frac{a_5 + 2}{4} = \frac{a_1 + a_3 + a_5 + 6}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\begin{aligned}
 x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_1 &= \frac{a_1+2}{4} \cdot \frac{a_3+2}{4} + \frac{a_3+2}{4} \cdot \frac{a_5+2}{4} + \frac{a_5+2}{4} \cdot \frac{a_1+2}{4} \\
 &= \frac{a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1 + 4(a_1 + a_3 + a_5) + 12}{16} = \frac{-2 + 4 \cdot (-1) + 12}{16} = \frac{3}{8}, \\
 x_1x_3x_5 &= \frac{a_1+2}{4} \cdot \frac{a_3+2}{4} \cdot \frac{a_5+2}{4} = \frac{a_1a_3a_5 + 2(a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1) + 4(a_1 + a_3 + a_5) + 8}{64} \\
 &= \frac{1 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) + 8}{64} = \frac{1}{64}.
 \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{3\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{5\pi}{14}} &= \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_5^2} = \frac{x_1^2x_3^2 + x_3^2x_5^2 + x_5^2x_1^2}{(x_1x_3x_5)^2} \\
 &= \frac{(x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_1)^2 - 2x_1x_3x_5(x_1 + x_3 + x_5)}{(x_1x_3x_5)^2} = \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{5}{4}}{\left(\frac{1}{64}\right)^2} = 416.
 \end{aligned}$$

3. metode (Palle Bak Petersen, Hillerød).

Rødderne i polynomiet $f(x) = x^7 - 1$ er de 7. enhedsrødder

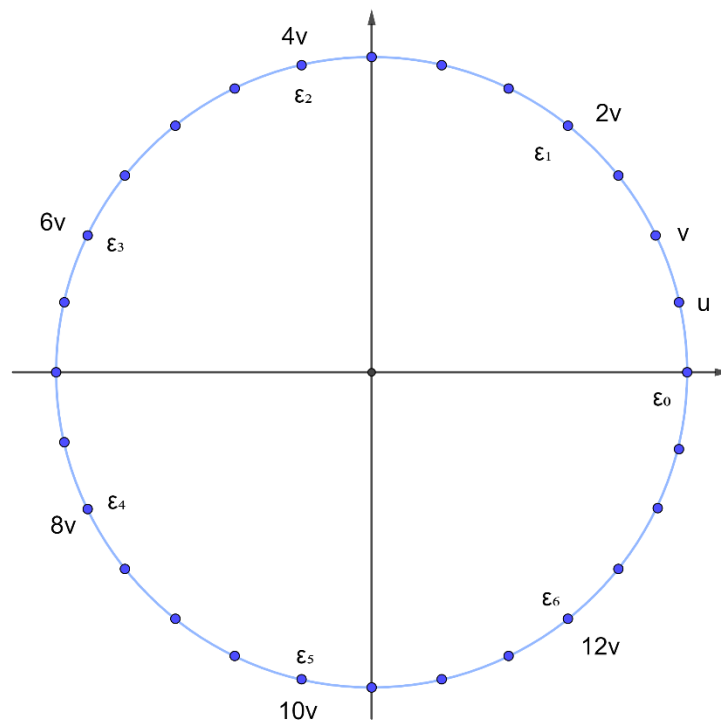
$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{7} + i \sin \frac{2\pi k}{7}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 6.$$

Summen af røddernes realdele er 0, og hvis vi for nemheds skyld sætter $v = \frac{\pi}{7}$, er derfor

$$1 + \cos 2v + \cos 4v + \cos 6v + \cos 8v + \cos 10v + \cos 12v = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 2v - \cos 3v - \cos v - \cos v - \cos 3v + \cos 2v = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \cos v + 2 \cos 2v - 2 \cos 3v = 0 \quad \Leftrightarrow \cos v - \cos 2v + \cos 3v = \frac{1}{2}.$$



Vi sætter $u = \frac{\pi}{14}$, så det givne udtryk kan omskrives til

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{3\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{5\pi}{14}} &= \frac{1}{\sin^4 u} + \frac{1}{\sin^4 3u} + \frac{1}{\sin^4 5u} \\ &= \frac{\sin^4 u \cdot \sin^4 3u + \sin^4 u \cdot \sin^4 5u + \sin^4 3u \cdot \sin^4 5u}{\sin^4 u \cdot \sin^4 3u \cdot \sin^4 5u} = \frac{t}{n}. \end{aligned}$$

Efter det trigonometriske formelmaskineri er

$$\begin{aligned} \sin^4 u &= \frac{1}{8}(\cos 4u - 4\cos 2u + 3) \\ \sin^4 3u &= \frac{1}{8}(\cos 12u - 4\cos 6u + 3) \\ \sin^4 5u &= \frac{1}{8}(\cos 20u - 4\cos 10u + 3). \end{aligned}$$

Dermed kan vi udregne de tre produkter i tælleren:

$$\begin{aligned} \sin^4 u \cdot \sin^4 3u &= \frac{1}{64}(\cos 4u - 4\cos 2u + 3)(\cos 12u - 4\cos 6u + 3) \\ &= \frac{1}{64}(\cos 2v - 4\cos v + 3)(\cos 6v - 4\cos 3v + 3) \\ &= \frac{1}{64}(\cos 2v - 4\cos v + 3)(-\cos v - 4\cos 3v + 3). \end{aligned}$$

Ved multiplikation af parenteserne og brug af formlen

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

får vi

$$\sin^4 u \cdot \sin^4 3u = \frac{1}{64} \left(11 - \frac{35}{2} \cos v + 15 \cos 2v - \frac{41}{2} \cos 3v \right).$$

Efter samme princip fås

$$\sin^4 u \cdot \sin^4 5u = \frac{1}{64} \left(11 - \frac{41}{2} \cos v + \frac{35}{2} \cos 2v - 15 \cos 3v \right)$$

og

$$\sin^4 3u \cdot \sin^4 5u = \frac{1}{64} \left(11 - 15 \cos v + \frac{41}{2} \cos 2v - \frac{35}{2} \cos 3v \right).$$

Addition af de tre produkter giver

$$t = \frac{1}{64} (33 + 53(-\cos v + \cos 2v - \cos 3v)) = \frac{1}{64} (33 + 53 \cdot \frac{-1}{2}) = \frac{13}{128}.$$

Derefter reducerer vi nævneren:

$$n = \sin^4 u \cdot \sin^4 3u \cdot \sin^4 5u = \frac{1}{512} (\cos 2v - 4 \cos v + 3)(11 - 15 \cos v + \frac{41}{2} \cos 2v - \frac{35}{2} \cos 3v).$$

Efter et orgie af algebra når vi frem til

$$n = \frac{1}{512} \left(73 \frac{1}{4} + 146 \frac{1}{4} (\cos 2v - \cos v - \cos 3v) \right) = \frac{1}{512} \left(\frac{293}{4} + \frac{585}{4} \cdot \frac{-1}{2} \right) = \frac{1}{512} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4096}.$$

Den søgte størrelse har derfor værdien

$$\frac{1}{\sin^4 \frac{\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{3\pi}{14}} + \frac{1}{\sin^4 \frac{5\pi}{14}} = \frac{\frac{13}{128}}{\frac{1}{4096}} = \frac{13 \cdot 4096}{128} = 416.$$

Bemærkning. Vi kan også reducere nævneren på følgende måde. Da

$$\sin \frac{3\pi}{14} = \cos \frac{4\pi}{14} \text{ og } \sin \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{2\pi}{14}, \text{ er}$$

$$\begin{aligned} \sin u \cdot \sin 3u \cdot \sin 5u &= \sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14} = \sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \cos \frac{2\pi}{14} \\ &= \frac{2 \cos \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{\pi}{14} \cdot \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{2\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{14} \cdot \cos \frac{4\pi}{14}}{4 \cos \frac{\pi}{14}} \\ &= \frac{\sin \frac{8\pi}{14}}{8 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{14} \right)}{8 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\cos \left(-\frac{\pi}{14} \right)}{8 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$n = \left(\sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{3\pi}{14} \cdot \sin \frac{5\pi}{14} \right)^4 = \left(\frac{1}{8} \right)^4 = \frac{1}{4096}.$$

Bemærkning. Som oven for nævnt er

$$\sin \frac{\pi}{14} = \cos \frac{3\pi}{7}, \quad \sin \frac{3\pi}{14} = -\cos \frac{5\pi}{7} = \cos \frac{2\pi}{7}, \quad \sin \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{7},$$

så formelen også kan skrives på følgende smukke måde:

$$\frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{3\pi}{7}} = 416.$$

4. metode (Asger Olesen, Tønder).

Ved at benytte formlerne

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x \quad \text{og} \quad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

fås

$$\sin \frac{\pi}{14} = -\cos \frac{4\pi}{7}, \quad \sin \frac{3\pi}{14} = \cos \frac{2\pi}{7}, \quad \sin \frac{5\pi}{14} = \cos \frac{\pi}{7},$$

så formelen kan omskrives til

$$\frac{1}{\cos^4 \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{3\pi}{7}} = 416.$$

Den trigonometriske funktion *secans* er som bekendt defineret ved

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

så vi skal vise, at

$$\sec^4 \frac{\pi}{7} + \sec^4 \frac{2\pi}{7} + \sec^4 \frac{4\pi}{7} = 416.$$

Nu er

$$(A, B, C) = \left(\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7} \right)$$

vinkelsættet i den såkaldt *heptagonale trekant*, som indeholder en mængde interessante sætninger, som kan findes i henvisninger for neden. I den heptagonale trekant skal vi vise, at

$$\sec^4 A + \sec^4 B + \sec^4 C = 416.$$

Vi har, at

$$\begin{aligned} \sec^4 A + \sec^4 B + \sec^4 C &= (\sec^2 A + \sec^2 B + \sec^2 C)^2 \\ &\quad - 2(\sec^2 A \cdot \sec^2 B + \sec^2 B \cdot \sec^2 C + \sec^2 C \cdot \sec^2 A), \end{aligned}$$

Så det ønskede vil være vist, hvis vi kan vise, at

$$\sec^2 A + \sec^2 B + \sec^2 C = 24$$

og

$$\sec^2 A \cdot \sec^2 B + \sec^2 B \cdot \sec^2 C + \sec^2 C \cdot \sec^2 A = 80,$$

fordi

$$24^2 - 2 \cdot 80 = 416.$$

Vi viser to lemmaer, der fører frem til disse resultater.

Lemma 1. I den heptagonale trekant gælder

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\frac{1}{8}.$$

Bewis. Vi får, at

$$\begin{aligned} -\sin \frac{\pi}{7} &= \sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{8\pi}{7} = 2 \sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = 4 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= 8 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = 8 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C, \end{aligned}$$

hvoraf

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\frac{1}{8}.$$

Lemma 2. I den heptagonale trekant gælder

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4}.$$

Bewis. I enhver trekant er

$$-\cos C = \cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B + \cos C = \sin A \cdot \sin B,$$

og ved kvadrering fås

$$\cos^2 A \cdot \cos^2 B + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos^2 C = \sin^2 A \cdot \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 A)(1 - \sin^2 B) + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C + 1 - \sin^2 C = \sin^2 A \cdot \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$$

I den heptagonale trekant bliver dette til

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{4},$$

så at

$$1 - \cos^2 A + 1 - \cos^2 B + 1 - \cos^2 C = \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}.$$

Nu får vi

$$\sec^2 A \cdot \sec^2 B = \frac{1}{\cos^2 A \cdot \cos^2 B} = \frac{\cos^2 C}{\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C},$$

og tilsvarende for de to andre produkter $\sec^2 B \cdot \sec^2 C$ og $\sec^2 C \cdot \sec^2 A$. Efter lemma 1 og lemma 2 får vi så

$$\sec^2 A \cdot \sec^2 B + \sec^2 B \cdot \sec^2 C + \sec^2 C \cdot \sec^2 A = \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}{\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{64}} = 80.$$

Vi viser dernæst, at

$$\sec^2 A + \sec^2 B + \sec^2 C = 24.$$

Vi har, at

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

så vi skal vise, at der i den heptagonale trekant gælder

$$1 + \tan^2 A + 1 + \tan^2 B + 1 + \tan^2 C = 24$$

eller at

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C = 21.$$

Vinklerne i trekanten er

$$(A, B, C) = \left(\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7} \right),$$

og vi får

$$\tan 4 \cdot \frac{\pi}{7} = -\tan 3 \cdot \frac{\pi}{7}$$

$$\tan 4 \cdot \frac{2\pi}{7} = \tan \frac{8\pi}{7} = -\tan \frac{6\pi}{7} = -\tan 3 \cdot \frac{2\pi}{7}$$

$$\tan 4 \cdot \frac{4\pi}{7} = \tan \frac{16\pi}{7} = \tan \frac{2\pi}{7} = -\tan \frac{12\pi}{7} = -\tan 3 \cdot \frac{4\pi}{7}.$$

For enhver af vinklerne x i den heptagonale trekant gælder altså, at

$$\tan 4x = -\tan 3x.$$

Efter det trigonometriske formelmaskineri er

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}, \quad \tan 4x = \frac{4 \tan x - 4 \tan^3 x}{\tan^4 x - 6 \tan^2 x + 1},$$

så vi får

$$\tan 4x = -\tan 3x \Leftrightarrow \frac{4 \tan x - 4 \tan^3 x}{\tan^4 x - 6 \tan^2 x + 1} = \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{1 - 3 \tan^2 x}.$$

For overskuelighedens skyld sætter vi $t = \tan x$ og får

$$\begin{aligned} \frac{4t - 4t^3}{t^4 - 6t^2 + 1} = \frac{t^3 - 3t}{1 - 3t^2} &\Leftrightarrow (4t - 4t^3)(1 - 3t^2) = (t^4 - 6t^2 + 1)(t^3 - 3t) \\ \Leftrightarrow t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7) = 0 &\Leftrightarrow \tan x((\tan^2 x)^3 - 21(\tan^2 x)^2 + 35 \tan^2 x - 7) = 0. \end{aligned}$$

I denne ligning kan x antage værdierne $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$, så løsningerne til ligningen

$$z^3 - 21z^2 + 35z - 7 = 0$$

er $\tan^2 A$, $\tan^2 B$ og $\tan^2 C$. Efter Vietes formler for rødderne i polynomiet får vi, at

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C = 21$$

som ønsket.

Henvisninger:

Jens Carstensen: *Den heptagonale trekant* (Matematiske juveler, 2006)

Jens Carstensen: *Mere om den heptagonale trekant* (Matematiske juveler, 2006 & LMFK-Bladet, februar 2002)

Leon Bankoff & Jack Garfunkel: *The heptagonal Triangle* (Mathematics Magazine, Jan-Feb 1973, The Mathematical Association of America)

Alija Muminagić & Jens Carstensen: *Den heptagonale trekant* (MatematikMagasinet 100, oktober 2017)

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen