Svar på opgave 389 (April 2022)

Opgave:

a. Vis, at der for alle naturlige tal $n \geq 3$ gælder

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{5} \cdots \sqrt[n-1]{n} > n \;.$$

b. Vis, at der for alle naturlige tal n gælder

$$1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \cdots \sqrt[n]{n!} \leq \frac{6n!}{2^n} \;.$$

c. Vis for alle naturlige tal n, at

$$6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$$

er delelig med 33.

Besvarelse:

a.

1. metode.

Vi benytter uligheden $A \geq G$ mellem det aritmetiske middeltal A og det geometriske middeltal G på de k - 1 tal

$$k\,,\, k\,,\, .\; .\; .\; .\,,\, k\,,\, 1 \;\;,$$

hvor tallet k er gentaget k - 2 gange. Så får vi

$$A = \frac{k(k-2)+1}{k-1} \quad \text{og} \quad G = \sqrt[k-1]{k^{k-2}} \;.$$

Altså gælder for k = 2, 3, . . ., n:

$$A \geq G \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k(k-2)+1}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{k^{k-2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(k-1)^2}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{\frac{k^{k-1}}{k}}$$

$$\Leftrightarrow \quad k-1 \geq \frac{k}{\sqrt[k-1]{k}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[k-1]{k} \geq \frac{k}{k-1} \;,$$

hvor lighedstegn kun gælder for k = 2. Dermed er

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{5} \cdots \sqrt[n-1]{n} > \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1} = n \;.$$

2. metode.

Vi benytter uligheden $G \geq H$ mellem det geometriske middeltal G og det harmoniske middeltal H på tallene

$$1\,,\,1\,,\,1\,,\,.\,.\,.\,,\,1\,,\,k\,,$$

hvor 1 er gentaget k - 2 gange. Så er

$$G = \sqrt[k-1]{k}$$

og

$$H = \frac{k-1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}+\frac{1}{k}} = \frac{k-1}{k-2+\frac{1}{k}} = \frac{k(k-1)}{(k-2)k+1} = \frac{k(k-1)}{(k-1)^2} = \frac{k}{k-1}\,.$$

For $k = 2, 3, \ldots, n$ er altså

$$G \geq H \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[k-1]{k} > \frac{k}{k-1}\,,$$

og derefter fortsættes som under 1. metode.

3. metode.

Binomialformlen giver

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} = \frac{\binom{k-1}{0}}{(k-1)^0} + \frac{\binom{k-1}{1}}{(k-1)^1} + \cdots + \frac{\binom{k-1}{k-1}}{(k-1)^{k-1}}\,.$$

Her er der k - 1 led, og

$$\frac{\binom{k-1}{0}}{(k-1)^0} = 1 \quad \text{og} \quad \frac{\binom{k-1}{1}}{(k-1)^1} = \frac{k-1}{k-1} = 1\,,$$

og for $1 < i \leq k - 1$ er

$$\frac{\binom{k-1}{i}}{(k-1)^i} = \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-i)}{i!\cdot(k-1)^i} < \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-i)}{(k-1)^i} < 1\,.$$

Dermed er

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \leq 1+1+\cdots+1 = k\,,$$

hvor 1 er gentaget k gange. Altså er

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \leq k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{k-1} \leq \sqrt[k-1]{k}\,.$$

Derefter fortsættes som under 1. metode.

4. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Vi bruger induktion. For n = 3 er påstanden

$$2\sqrt{3} > 3\,,$$

hvilket er sandt. Antag, at uligheden er sand for $n = k - 1$, hvor $k \geq 3$, dvs. at

$$2\cdot\sqrt{3}\cdots\sqrt[k-2]{k-1} > k-1\ .$$

Vi skal vise, at

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdots\sqrt[k-2]{k-1}\cdot\sqrt[k-1]{k} > k\ .$$

Efter induktionsforudsætningen har vi, at

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdots\sqrt[k-2]{k-1}\cdot\sqrt[k-1]{k} > (k-1)\cdot\sqrt[k-1]{k}\ ,$$

så vi ønsker at vise, at

$$(k-1)\cdot\sqrt[k-1]{k} > k\ .$$

Nu er

$$(k-1)\cdot\sqrt[k-1]{k} > k \quad\Leftrightarrow\quad \ln\sqrt[k-1]{k} > \ln\tfrac{k}{k-1} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{k-1}\ln k > \ln\tfrac{k}{k-1}$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln k > (k-1)\cdot(\ln k - \ln(k-1))\ . \qquad (1)$$

Efter middelværdisætningen findes et tal c mellem $k - 1$ og k, så

$$\frac{\ln k - \ln(k-1)}{k-(k-1)} = \ln'(c)$$

eller

$$\ln k - \ln(k-1) = \frac{1}{c} < \frac{1}{k-1}\ .$$

Dette giver

$$(k-1)\cdot(\ln k - \ln(k-1)) < 1 < \ln k\ ,$$

så (1) er opfyldt.

5. metode (Hans Mortensen, Skive).

Som under 4. metode skal vi vise, at

$$(k-1)\sqrt[k-1]{k} > k\,.$$

Denne ulighed omskrives således:

$$\ln(k-1)+\tfrac{1}{k-1}\ln k > \ln k \quad\Leftrightarrow\quad \ln(k-1) > \ln k\cdot\left(1-\tfrac{1}{k-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln(k-1) > \ln k\cdot\tfrac{k-2}{k-1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\ln(k-1)}{k-2} > \frac{\ln k}{k-1}\ .$$

Dette er tilfældet, hvis funktionen $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ er aftagende. Vi finder, at

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot(x-1)-\ln x\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\cdot\ln x}{x(x-1)^2}\ ,$$

så at

$$f'(x) < 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(1-\ln x) < 1\,.$$

Dette er opfyldt for $x \geq 2$, og dermed er den ønskede vist.

b.

1. metode.

Vi husker, at talfølgen

$$a_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \quad , \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

er monotont voksende og konvergerer mod e. Idet $a_1 = 2$, gælder altså for alle n at

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad n^n \cdot \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \geq 2n^n \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)^n \geq 2n^n \,. \tag{2}$$

Nu viser vi ved induktion, at

$$2^n \cdot n! \leq n^n \quad \text{for} \;\; n \geq 6. \tag{3}$$

For $n = 1, 2, 3, 4, 5$ gælder $2^n \cdot n! > n^n$, men for $n = 6$ er

$$2^6 \cdot 6! = 64 \cdot 720 = 46080 < 46656 = 6^6 \,.$$

Vi multiplicerer induktionsforudsætningen (3) med $2(n + 1)$ og benytter (2), så vi får

$$2^n \cdot n! \cdot 2(n+1) \leq n^n \cdot 2(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{n+1} \cdot (n+1)! \leq 2(n+1) \cdot n^n \leq (n+1)(n+1)^n = (n+1)^{n+1} \,.$$

Dermed er (3) vist, hvor n er erstattet med $n + 1$ og induktionsbeviset er ført.
Af (3) fås for $n \geq 6$:

$$2^n \cdot n! \leq n^n \quad \Leftrightarrow \quad n! \leq \left(\tfrac{1}{2}n\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{n!} \leq \tfrac{1}{2}n \,. \tag{4}$$

Uligheden

$$1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \cdots \sqrt[n]{n!} \leq \frac{6n!}{2^n} \tag{5}$$

Viser vi ved induktion for $n \geq 6$. Vi får ved hjælp af induktionsforudsætningen (5) ved at benytte (4), at

$$1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \cdots \sqrt[n]{n!} \cdot \sqrt[n+1]{(n+1)!} \leq \frac{6n!}{2^n} \cdot \sqrt[n+1]{(n+1)!} \leq \frac{6n!}{2^n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{6(n+1)!}{2^{n+1}} \,,$$

og dermed er beviset ført for $n \geq 6$, idet n er erstattet med $n + 1$.
Uligheden gælder for $n = 1, 2, 3, 4, 5$, idet

$$1 < \frac{6 \cdot 1}{2^1} = 3 \quad , \quad 1 \cdot \sqrt{2!} = \sqrt{2} < \frac{6 \cdot 2!}{2^2} = 3 \quad , \quad 1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \approx 2{,}57 < \frac{6 \cdot 3!}{2^3} = 4{,}5 \,,$$

$$1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \approx 5{,}69 < \frac{6 \cdot 4!}{2^4} = 9 \quad , \quad 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \cdot \sqrt[5]{5!} \approx 14{,}82 < \frac{6 \cdot 5!}{2^5} = 22{,}5 \,.$$

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Vi sætter

$$f(n) = 1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \cdots \sqrt[n]{n!} \quad og \quad g(n) = a \cdot \frac{n!}{2^n} \,,$$

hvor a foreløbig er et givet positivt reelt tal. Vi får, at

$$f(n) = 1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \sqrt[4]{4!} \cdots \sqrt[n-1]{(n-1)!} \cdot \sqrt[n]{n!} = f(n-1) \cdot \sqrt[n]{n!} \ ,$$

og at

$$g(n) = a \cdot \frac{n!}{2^n} = a \cdot \frac{(n-1)! \cdot n}{2^{n-1} \cdot 2} = g(n-1) \cdot \frac{n}{2} \ .$$

Heraf fås

$$\frac{g(n)}{f(n)} = \frac{g(n-1)}{f(n-1)} \cdot \frac{\frac{n}{2}}{\sqrt[n]{n!}} \ .$$

Ved udregning ser vi, at

$$\frac{\frac{n}{2}}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n}{2\sqrt[n]{n!}} < 1 \ \text{ for } \ n \le 5 \ .$$

Vi viser dernæst, at

$$\frac{n}{2\sqrt[n]{n!}} > 1 \ \text{ for } \ n \ge 6 \ .$$

Dette er ensbetydende med, at

$$n > 2\sqrt[n]{n!} \quad \Leftrightarrow \quad n! < \left(\tfrac{n}{2}\right)^n \quad \text{for} \quad n \ge 6 \ .$$

Denne ulighed viser vi ved induktion, så vi antager, at

$$(n-1)! < \left(\tfrac{n-1}{2}\right)^{n-1}$$

for et $n > 6$. Efter induktionsforudsætningen er

$$n! = n(n-1)! < n \cdot \left(\tfrac{n-1}{2}\right)^{n-1} \ .$$

Vi skal derfor vise, at

$$n \cdot \left(\tfrac{n-1}{2}\right)^{n-1} < \left(\tfrac{n}{2}\right)^n \ .$$

Vi kan omskrive denne ulighed således:

$$\left(\tfrac{n-1}{2}\right)^{n-1} < \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{n}{2} \cdot \left(\tfrac{n}{2}\right)^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tfrac{n-1}{2}\right)^{n-1} < \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{n}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-1) \cdot \ln \tfrac{n-1}{2} < \ln \tfrac{1}{2} + (n-1) \cdot \ln \tfrac{n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-1) \cdot \left(\ln \tfrac{n-1}{2} - \ln \tfrac{n}{2}\right) < -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln n - \ln(n-1) > \tfrac{1}{n-1} \cdot \ln 2 \ . \qquad (5)$$

Efter middelværdisætningen findes et tal c, så $n - 1 < c < n$ og

$$\frac{\ln n - \ln(n-1)}{n - (n-1)} = f\,'(c) = \frac{1}{c} > \frac{1}{n}$$

eller

$$\ln n - \ln(n-1) > \tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n-1}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) > \tfrac{1}{n-1} \cdot \ln 2 \ .$$

Her har vi benyttet, at der for $n \ge 6$ gælder, at $\frac{1}{n} \le \frac{1}{6}$, så

$$1 - \tfrac{1}{n} \ge 1 - \tfrac{1}{6} > 0{,}70 > \ln 2.$$

Altså er uligheden (5) eftervist.

Ovenfor fik vi

$$\frac{g(n)}{f(n)} = \frac{g(n-1)}{f(n-1)} \cdot \frac{\frac{n}{2}}{\sqrt[n]{n!}} \ ,$$

og efter induktionsbeviset gælder for $n \geq 6$, at

$$\frac{\frac{n}{2}}{\sqrt[n]{n!}} > 1 \ ,$$

og dermed

$$\frac{g(n)}{f(n)} > \frac{g(n-1)}{f(n-1)} \ ,$$

så at

$$\frac{g(6)}{f(6)} > \frac{g(5)}{f(5)} \quad , \quad \frac{g(7)}{f(7)} > \frac{g(6)}{f(6)} \quad , \quad \ldots .$$

Dette betyder, at $\frac{g(n)}{f(n)}$ er mindst for $n = 5$.

Hvis $a = 4$ er

$$\frac{g(5)}{f(5)} = \frac{g(4)}{f(4)} \cdot \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt[5]{5!}} = \frac{g(3)}{f(3)} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{4!}} \cdot \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt[5]{5!}} = \frac{g(2)}{f(2)} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[3]{3!}} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{4!}} \cdot \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt[5]{5!}}$$

$$= \frac{g(1)}{f(1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2!}} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[3]{3!}} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{4!}} \cdot \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt[5]{5!}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2!}} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[3]{3!}} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{4!}} \cdot \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt[5]{5!}} = k \ .$$

Vi udregner tallet k:

$$k = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2\sqrt[3]{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{24}} \cdot \frac{5}{2\sqrt[5]{120}} \ ,$$

så at

$$k^{60} = 2^{60} \cdot \frac{1}{2^{30}} \cdot \frac{3^{60}}{2^{60} \cdot 6^{20}} \cdot \frac{2^{60}}{24^{15}} \cdot \frac{5^{60}}{2^{60} \cdot 120^{12}} = \frac{2^{120} \cdot 3^{60} \cdot 5^{60}}{2^{90} \cdot 2^{20} \cdot 3^{20} \cdot 2^{45} \cdot 3^{15} \cdot 2^{60} \cdot 2^{36} \cdot 3^{12} \cdot 5^{12}}$$

$$= \frac{2^{120} \cdot 3^{60} \cdot 5^{60}}{2^{251} \cdot 3^{47} \cdot 5^{12}} = \frac{3^{13} \cdot 5^{48}}{2^{131}} \ .$$

Vi finder ved hjælp af regnemaskine, at

$$\log(k^{60}) = 13 \cdot \log 3 + 48 \cdot \log 5 - 131 \cdot \log 2 \approx 0{,}3182 \ ,$$

hvoraf

$$k > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(n)}{f(n)} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad g(n) > f(n) \ ,$$

hvilket er det ønskede.

Hvis man synes, at det er 'usportsligt' at bruge regnemaskine, kan vi vurdere k såle- des:

$$\frac{3^{13} \cdot 5^{48}}{2^{131}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^{12} \cdot 5^{48}}{2^{132}} = 6 \cdot \left(\frac{3 \cdot 5^4}{2^{11}}\right)^{12} = 6 \cdot \left(\frac{3 \cdot 25^2}{2 \cdot 1024}\right)^{12} > 6 \cdot \left(\frac{3 \cdot 25^2}{2 \cdot 1025}\right)^{12}$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{3 \cdot 25}{2 \cdot 41}\right)^{12} = 6 \cdot \left(\frac{75}{82}\right)^{12} > 6 \cdot 0{,}9^{12} = 6 \cdot (0{,}9^2)^6 > 6 \cdot 0{,}8^6$$

$$= 6 \cdot (0{,}8^2)^3 > 6 \cdot 0{,}6^3 = 6 \cdot 0{,}216 > 1 \ .$$

Dette er en skærpelse af den oprindelige ulighed i opgaven, idet konstanten 6 er erstattet med konstanten 4.

c.

Vi bruger induktion. For $n = 1$ er

$$6^2 + 3^3 + 3^1 = 66$$

delelig med 33. Antag nu, at 33 går op i

$$a = 6^{2(k+1)} + 3^{(k+1)+2} + 3^{k+1} = 6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1} .$$

Vi får, at

$$a = 6^2 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k = 36 \cdot 6^{2k} + 3 \cdot 3^{k+2} + 3 \cdot 3^k$$

$$= 3(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k) + 33 \cdot 6^{2k} .$$

Her går 33 op i både første og sidste led, og dermed i a.

Bemærkning.

Jens-Søren Andersen, Esbjerg, har følgende bemærkning. Vi har, at

$$a_n = 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 3^{2n} \cdot 2^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 3^n(3^n \cdot 2^{2n} + 3^2 + 1) = 3^n \cdot (12^n + 10) \; .$$

Hvis vi regner modulo 4 fås

$$a_n \equiv (-1)^n \cdot (0 + 2) \equiv 2 \pmod 4 ,$$

så a_n er delelig med 2 men ikke med 4. Regnes modulo 5 får vi

$$a_n \equiv 3^n \cdot 2^n \equiv 6^n \equiv 1 \pmod 5 ,$$

så a_n er ikke delelig med 5. Da 3, 11 og 2 er indbyrdes primiske, er alle a_n delelige med 66 og ikke blot med 33. Vi får, at

$$a_1 = 66 \quad , \quad a_2 = 1386 = 21 \cdot 66 \quad , \quad a_3 = 46926 = 711 \cdot 66 \quad , \quad a_4 = 1680426 = 25461 \cdot 66$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Hans Benner
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Asger Olesen
- Jørgen Olesen