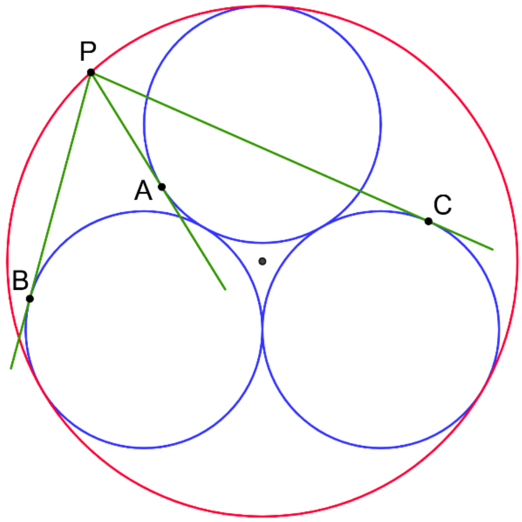
Svar på sommeropgave (2022)

Opgave:

Tre cirkler med samme radius tangerer hinanden udvendigt, og alle tre cirkler tangerer en større cirkel indvendigt. Fra et vilkårligt punkt P på den store cirkel trækkes tangenter til de små cirkler. Vis, at længden af den længste tangent er lig med summen af længderne af de to korteste, dvs. med figurens betegnelser, at $PC = PA + PB$.



Besvarelse:

1. metode.

Lad de små cirkler have radius 1 og den store cirkel radius R. Desuden er O, X, Y og Z centrer for den store og de tre små cirkler.
Nu er ΔXYZ ligesidet med sidelængde 2 og O er centrum i denne trekant, så

$$OX = OY = OZ = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \ .$$

Altså er

$$R = 1 + \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \ .$$

Vi trækker linjerne OX, OP og AX og sætter $u = \angle XOP$. Da ΔPAX er retvinklet, er

$$PA^2 = PX^2 - AX^2 = PX^2 - 1 \ .$$

I ΔPOX giver cosinusrelationen

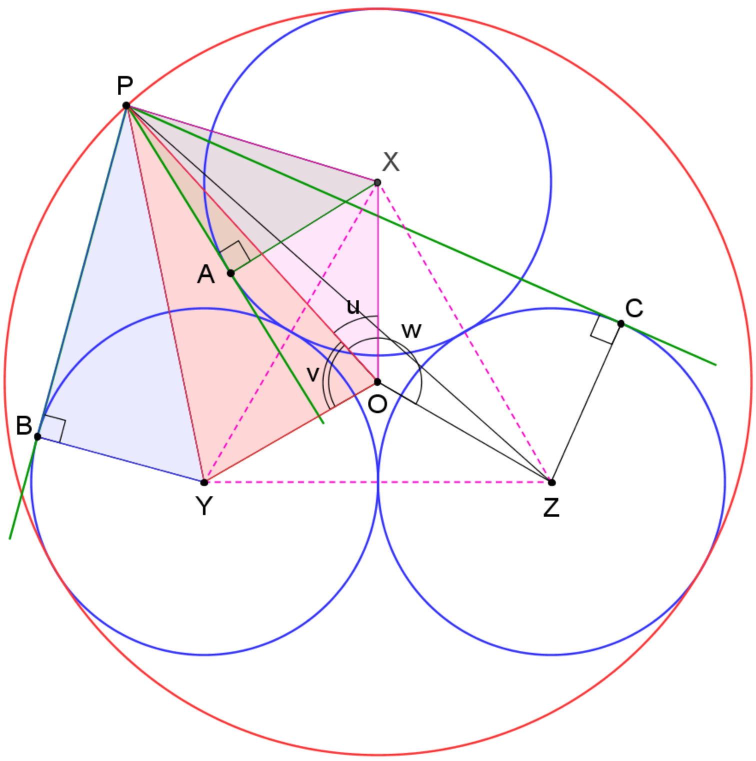
$$PX^2 = PO^2 + OX^2 - 2 \cdot PO \cdot OX \cdot \cos u$$

$$= \left(1+\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(1+\tfrac{2}{3}\sqrt{3}\right) \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \cos u$$

$$= \tfrac{11}{3} + \tfrac{4}{3}\sqrt{3} - \left(\tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\right) \cdot \cos u \quad ,$$

hvoraf

$$PA^2 = PX^2 - 1 = \left(\tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\right) \cdot (1 - \cos u) = \left(\tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\right) \cdot 2\sin^2 \tfrac{u}{2} \ .$$



For nemheds skyld sætter vi

$$k^2 = \tfrac{16}{3} + \tfrac{8}{3}\sqrt{3} \ ,$$

så

$$PA = k \cdot \sin \tfrac{u}{2} \ .$$

I ΔPBY er

$$PB^2 = PY^2 - BY^2 = PY^2 - 1 \ .$$

Vi sætter $v = \angle POY$ og får ved cosinusrelationen i ΔPOY ved regninger som ovenstående, at

$$PB^2 = k^2 \cdot \sin^2 \tfrac{v}{2} \ .$$

Endelig sætter vi $w = \angle POZ$ og får

$$PC^2 = k^2 \cdot \sin^2 \tfrac{w}{2} \ .$$

På figuren ser vi, at

$$v = 120° - u \quad , \quad w = 120° + u \quad ,$$

så vi skal vise, at

$$\sin\tfrac{w}{2} = \sin\tfrac{u}{2} + \sin\tfrac{v}{2} \ ,$$

som vi ved hjælp af additionsformlerne omformer til

$$\sin\left(60° + \tfrac{u}{2}\right) = \sin\tfrac{u}{2} + \sin(60° - \tfrac{u}{2})$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 60° \cdot \cos\tfrac{u}{2} + \cos 60° \cdot \sin\tfrac{u}{2} = \sin\tfrac{u}{2} + \sin 60° \cdot \cos\tfrac{u}{2} - \cos 60° \cdot \sin\tfrac{u}{2}$$

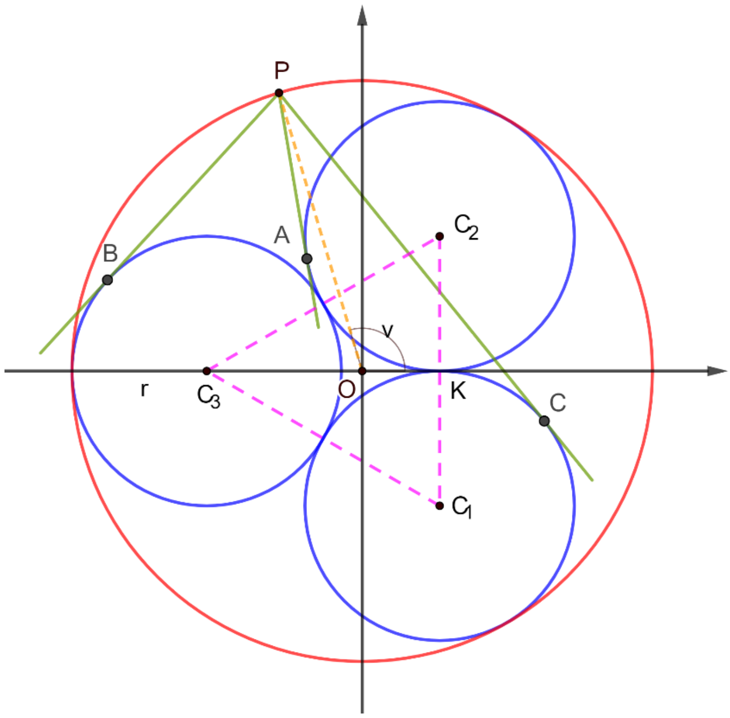
$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 60° \cdot \sin\tfrac{u}{2} = \sin\tfrac{u}{2} \ ,$$

hvilket er sandt.

2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Lad r og R være radius i de små og i den store cirkel. Centrene C_1, C_2 og C_3 for de små cirkler udspænder en ligesidet trekant med sidelængde $2r$. Denne trekant anbringes i et koordinatsystem, så centrum O for den store cirkel er trekantens centrum og C_1C_2 er parallel med y-aksen som vist. Så falder en af trekantens højder på linjen OC_3. Hvis K er skæringspunktet mellem x-aksen og C_1C_2 er

$$OK = \tfrac{1}{3}KC_3 = \tfrac{1}{3}r\sqrt{3} \quad \text{og} \quad OC_3 = \tfrac{2}{3}KC_3 = \tfrac{2}{3}r\sqrt{3} \ .$$



Derfor har vi koordinaterne

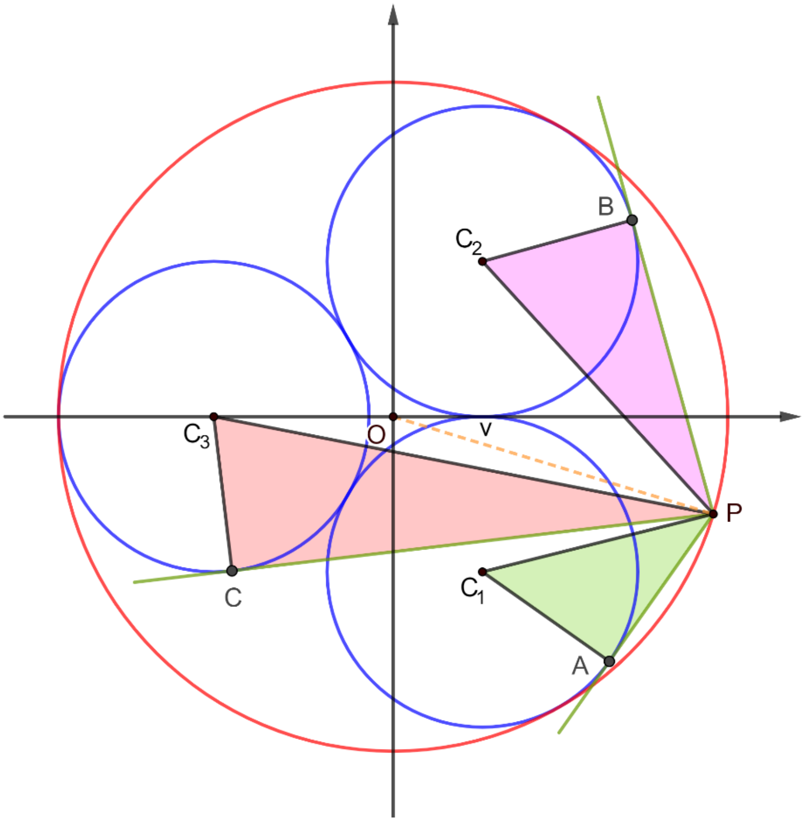
$$C_1\left(\tfrac{r}{\sqrt{3}}, -r\right) \ , \ C_2\left(\tfrac{r}{\sqrt{3}}, r\right) \ , \ C_3\left(-\tfrac{2r}{\sqrt{3}}, 0\right) \ .$$

Det vilkårligt valgte punkt P på den store cirkel har koordinaterne

$$P\ (R\cos v\ ,\ R\sin v)\ ,$$

hvor v en den vinkel, som stedvektoren $\overrightarrow{OP}$ danner med x-aksens positive del. Vi vælger P på den bue, der er udspændt af røringspunkterne mellem cirklerne med centre C_1 og C_2 og den store cirkel, dvs. $-60° \leq v \leq 60°$.
Vi har, at

$$R = OC_3 + r = r\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)\ . \qquad (1)$$



Nu giver Pythagoras sætning på figuren i ΔPAC_1, at

$$PA^2 = PC_1^{\ 2} - r^2 = \left(R\cos v - \tfrac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(R\sin v + r\right)^2 - r^2 = R^2 + \tfrac{1}{3}r^2 + 2Rr\sin v - \tfrac{2Rr}{\sqrt{3}}\cos v\,.$$

I ΔPCC_3 fås

$$PC^2 = PC_3^{\ 2} - r^2 = \left(R\cos v + \tfrac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 + (R\sin v)^2 - r^2 = R^2 + \tfrac{1}{3}r^2 + \tfrac{4Rr}{\sqrt{3}}\cos v\ .$$

I ΔPBC_2 er

$$PB^2 = PC_2^{\ 2} - r^2 = \left(R\cos v - \tfrac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 + (R\sin v - r)^2 - r^2 = R^2 + \tfrac{1}{3}r^2 - \tfrac{2Rr}{\sqrt{3}}\cos v - 2Rr\sin v\ .$$

Efter (1) har vi

$$R^2 + \tfrac{1}{3}r^2 = r^2\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \tfrac{1}{3}r^2 = r^2\left(\tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

og at

$$\tfrac{4}{\sqrt{3}}Rr = \tfrac{4}{\sqrt{3}}r^2\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}+1\right) = r^2\left(\tfrac{8}{3}+\tfrac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

Dermed er

$$R^2 + \tfrac{1}{3}r^2 = \tfrac{4}{\sqrt{3}}Rr\,.$$

Så har vi

$$PA^2 = \tfrac{4}{\sqrt{3}}Rr + 2Rr\sin v - \tfrac{2Rr}{\sqrt{3}}\cos v = \tfrac{2Rr}{\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}\sin v - \cos v\right)\ ,$$

$$PB^2 = \tfrac{2Rr}{\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\sin v - \cos v\right)$$

$$PC^2 = \tfrac{2Rr}{\sqrt{3}}\left(2+2\cos v\right)\ ,$$

Endelig fås efter figuren

$$PC = PA + PB \quad\Leftrightarrow\quad PC^2 = PA^2 + PB^2 + 2\,\sqrt{PA^2\cdot PB^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2 + 2\cos v = 4 - 2\cos v + 2\sqrt{(2-\cos v+\sqrt{3}\sin v)(2-\cos v-\sqrt{3}\sin v)}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1 + \cos v = 2 - \cos v + \sqrt{(2-\cos v)^2 - 3\sin^2 v}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cos v - 1 = \sqrt{(2-\cos v)^2 - 3(1-\cos^2 v)}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cos v - 1 = \sqrt{4\cos^2 v - 4\cos v + 1} \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos v - 1 = \sqrt{(2\cos v - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cos v - 1 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos v \geq \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -60^\circ \leq v \leq 60^\circ.$$

Dette er sandt, og dermed er det ønskede bevist.

Alternativt kan man skrive om således:

$$PA^2 = \tfrac{2Rr}{\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}\sin v - \cos v\right) = \tfrac{4Rr}{\sqrt{3}}\left(1+\sin 120^\circ\cdot\sin v + \cos 120^\circ\cdot\cos v\right)$$

$$= \tfrac{4Rr}{\sqrt{3}}\left(1+\cos(v-120^\circ)\right) = \tfrac{8Rr}{\sqrt{3}}\cos^2\left(\tfrac{v}{2}-60^\circ\right)\ ,$$

$$PB^2 = \tfrac{2Rr}{\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\sin v - \cos v\right) = \tfrac{4Rr}{\sqrt{3}}\left(1-\sin 120^\circ\cdot\sin v + \cos 120^\circ\cdot\cos v\right)$$

$$= \tfrac{4Rr}{\sqrt{3}}\left(1+\cos(v+120^\circ)\right) = \tfrac{8Rr}{\sqrt{3}}\cos^2\left(\tfrac{v}{2}+60^\circ\right),$$

$$PC^2 = \tfrac{2Rr}{\sqrt{3}}\left(2+2\cos v\right) = \tfrac{8Rr}{\sqrt{3}}\cos^2\tfrac{v}{2}\ .$$

Dermed er

$$PA = \sqrt{\tfrac{8Rr}{\sqrt{3}}}\cos\left(\tfrac{v}{2}-60^\circ\right)\ ,\ PB = \sqrt{\tfrac{8Rr}{\sqrt{3}}}\cos\left(\tfrac{v}{2}+60^\circ\right)\ ,\ PC = \sqrt{\tfrac{8Rr}{\sqrt{3}}}\cos\tfrac{v}{2}\ ,$$

hvor vi har benyttet $-60^\circ \leq v \leq 60^\circ$. Så er

$$PA + PB = \sqrt{\tfrac{8Rr}{\sqrt{3}}}\left(\cos\left(\tfrac{v}{2}-60^\circ\right)+\cos\left(\tfrac{v}{2}+60^\circ\right)\right) = \sqrt{\tfrac{8Rr}{\sqrt{3}}}(2\cos\tfrac{v}{2}\cdot\cos 60^\circ) = PC\ .$$

3. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg)

Vi viser en mere generel sætning ved udelukkende klassisk-geometriske metoder - endda uden trigonometri.
Vi ser først på en cirkel med centrum O og en mindre cirkel med centrum X, der tan- gerer den store cirkel indvendigt i punktet C. Lad P være et punkt på den store cirkel og lad tangenten fra P til den lille cirkel have røringspunktet A. Desuden skærer PC den lille cirkel i E.
Da ΔCXE er ligebenet, er $\angle XCE = \angle XEC$, og da ΔCOP er ligebenet, er

$$\angle OPC = \angle OCE = \angle XCE.$$

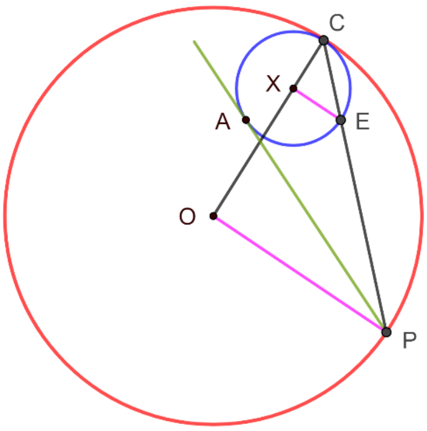
Dermed er $\angle XEC = \angle OPC$, så $XE \parallel OP$. Vi får heraf, at

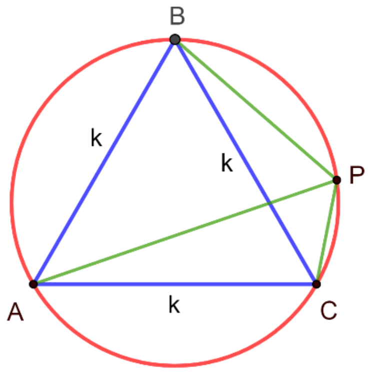
$$\frac{PE}{PC} = \frac{OX}{OC} \quad \text{eller} \quad PE = PC \cdot \frac{OX}{OC}.$$

Efter sætning om punkts potens i forhold til en cirkel, er

$$PA^2 = PE \cdot PC = PC^2 \cdot \frac{OX}{OC}.$$

Samme formel fås, hvis den lille cirkel tangerer den store udvendigt.





Nu er det kendt, at der for et punkt P på den omskrevne cirkel for en ligesidet ΔABC gælder, at afstanden fra P til en af vinkelspidserne er lig med summen af afstandene fra P til de øvrige to vinkelspidser. På figuren er altså $PA = PB + PC$.
Dette følger af Ptolemæus sætning: Hvis trekantens sidelængde er k, får vi nemlig

$$PC \cdot AB + PB \cdot AC = PA \cdot BC \quad \Leftrightarrow \quad PC \cdot k + PB \cdot k = PA \cdot k.$$

Flere beviser for dette kan findes i den lille bog *Matematiske Miniaturer* (2004).
Lad nu O være centrum for en cirkel med radius R og C_1, C_2og C_3 være punkter på cirklen med en indbyrdes bueafstand på 120°. Tre cirkler med samme radius r og cen- trer X_1, X_2 og X_3 tangerer cirklen indvendigt i C_1, C_2og C_3. Fra et punkt P på den store cirkel trækkes tangenter PA, PB og PC til cirklerne med centrer X_1, X_2 og X_3. Efter ovenstående gælder

$$PA^2 = PC_1^{\,2} \cdot \frac{OX_1}{OC_1} \quad , \quad PB^2 = PC_2^{\,2} \cdot \frac{OX_2}{OC_2} \quad , \quad PC^2 = PC_3^{\,2} \cdot \frac{OX_3}{OC_3}.$$

Da $OX_1 = OX_2 = OX_3 = R - r$ og $OC_1 = OC_2 = OC_3 = R$, er

$$PA^2 = PC_1^{\ 2} \cdot \frac{R-r}{R} \quad , \quad PB^2 = PC_2^{\ 2} \cdot \frac{R-r}{R} \quad , \quad PC^2 = PC_3^{\ 2} \cdot \frac{R-r}{R} \; . \qquad (1)$$

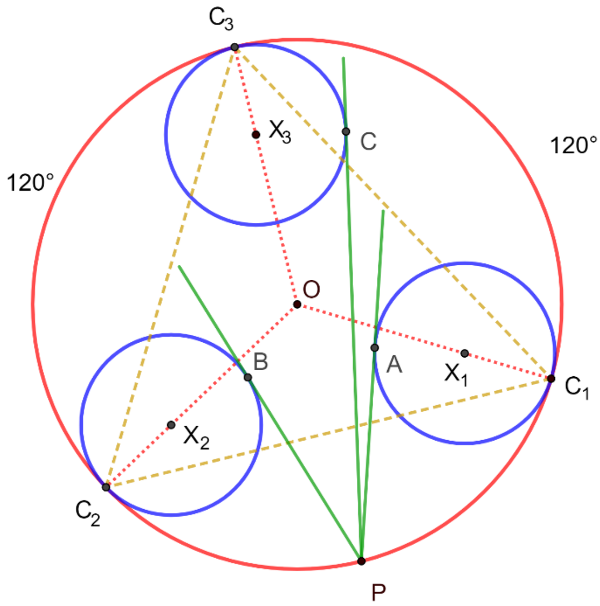
Efter den nævnte sætning for den ligesidede trekant, er

$$PC_3 = PC_1 + PC_2 \; ,$$

som efter (1) omskrives til

$$PC \cdot \sqrt{\frac{R}{R-r}} = PA \cdot \sqrt{\frac{R}{R-r}} + PB \cdot \sqrt{\frac{R}{R-r}} \; ,$$

så $PA + PB = PC$.



4. metode (Roger Bengtsson, Lund)

Vi antager, at de små cirkler har radius 1. I et koordinatsystem har den omskrevne cirkel centrum i (0,0), og en af de små cirklers centrum ligger på y-aksens positive del.
De små cirklers centrer får så koordinaterne

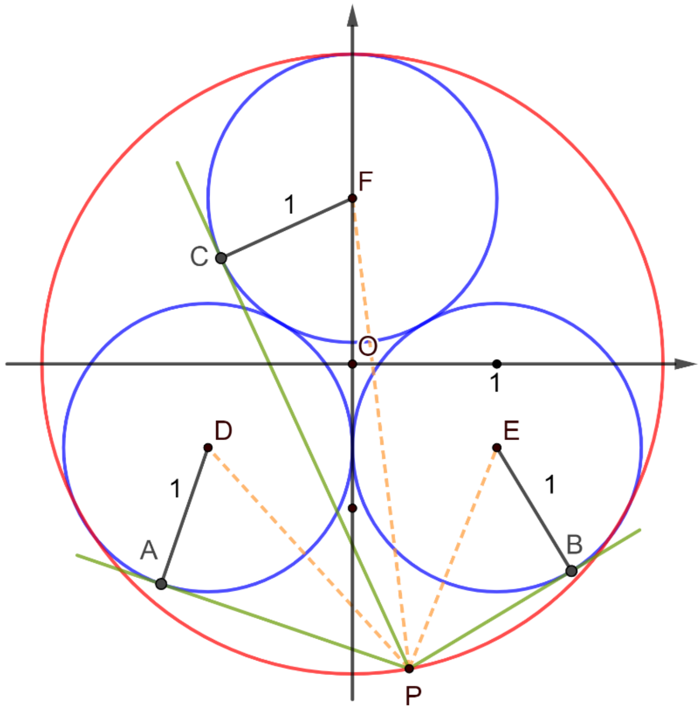
$$D\left(-1, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \; , \; E\left(1, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \; , \; F\left(0, \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \; .$$

Den store cirkel får radius $\frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$, så den har ligningen

$$x^2 + y^2 = \left(\tfrac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)^2 = \tfrac{7+4\sqrt{3}}{3} \quad .$$

Lad nu $P\,(a,b)$ være et punkt på den store cirkel. Så afstandene fra P til de små cirklers centrer

$$PD^2 = (a+1)^2 + \left(b + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad , \quad PE^2 = (a-1)^2 + \left(b + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \quad , \quad PF^2 = a^2 + \left(b - \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \; .$$



Pythagoras giver derefter tangenternes længder:

$$r = PA^2 = (a+1)^2 + \left(b + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1^2 = \tfrac{1}{3}\left(3a^2 + 6a + 3b^2 + 2\sqrt{3}\,b + 1\right),$$

$$s = PB^2 = (a-1)^2 + \left(b + \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1^2 = \tfrac{1}{3}\left(3a^2 - 6a + 3b^2 + 2\sqrt{3}\,b + 1\right),$$

$$t = PC^2 = a^2 + \left(b + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1^2 = \tfrac{1}{3}\left(3a^2 + 3b^2 - 4\sqrt{3}\,b + 1\right).$$

Nu skal vise, at

$$\sqrt{r} + \sqrt{s} = \sqrt{t} \ ,$$

hvilket vi omskriver således:

$$\sqrt{r} + \sqrt{s} = \sqrt{t} \quad \Leftrightarrow \quad r + s + 2\sqrt{rs} = t \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{rs} = t - r - s$$

$$\Leftrightarrow \quad 4rs = (t - r - s)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (t - r - s)^2 - 4rs = 0 \ .$$

Ved håndkraft eller et passende matematikprogram finder vi ved indsættelse heri, at

$$(t - r - s)^2 = \left(\tfrac{1}{3}\left(-3a^2 - 3b^2 - 8\sqrt{3}\,b - 1\right)\right)^2$$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + \frac{16}{\sqrt{3}}a^2b + \frac{2}{3}a^2 + b^4 + \frac{16}{\sqrt{3}}b^3 + 22b^2 + \frac{16}{3\sqrt{3}}b + \frac{1}{9}$$

og

$$4rs = 4a^4 + 8a^2b^2 + \frac{16}{\sqrt{3}}a^2b - \frac{40}{3}a^2 + 4b^4 + \frac{16}{\sqrt{3}}b^3 + 8b^2 + \frac{16}{3\sqrt{3}}b + \frac{4}{9} \ ,$$

hvoraf

$$(t - r - s)^2 - 4rs = -3a^4 - 3b^4 - 6a^2b^2 + 14a^2 + 14b^2 - \tfrac{1}{3}\ .$$

Vi håber, at dette udtryk bliver nul, hvis punktet $P\ (a,b)$ ligger på den store cirkel, dvs. hvis

$$a^2 + b^2 - \frac{7+4\sqrt{3}}{3} = 0\ .$$

Vi får, at

$$-3a^4 - 3b^4 - 6a^2b^2 + 14a^2 + 14b^2 - \tfrac{1}{3} = -\left(3a^2 + 3b^2 - 7 + 4\sqrt{3}\right)\left(a^2 + b^2 - \frac{7+4\sqrt{3}}{3}\right)\ .$$

Dette kan indses ved at gange parenteserne ud på højre side af lighedstegnet. Dermed har vi vist, at $(t - r - s)^2 - 4rs = 0$, hvilket er det ønskede.

Bemærkning. I ovenstående regning skal man være lidt forsigtig med de ensbetydende omskrivninger. Vi må kræve, at

$$t - r - s \geq 0 \quad \text{eller} \quad -3a^2 - 3b^2 - 8\sqrt{3}\,b - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b \leq -\tfrac{\sqrt{3}}{3} - \tfrac{1}{2}\ ,$$

hvor

$$a^2 + b^2 = \tfrac{7+4\sqrt{3}}{3}\ .$$

Ræsonnementet går ud fra, at P placeres på de nederste cirkelbue. Koordinaterne til røringspunktet mellem cirklen med centrum i E og den store cirkel er

$$\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{3} - \tfrac{1}{2}\right)\ ,$$

og vi ser, at uligheden for b er opfyldt.

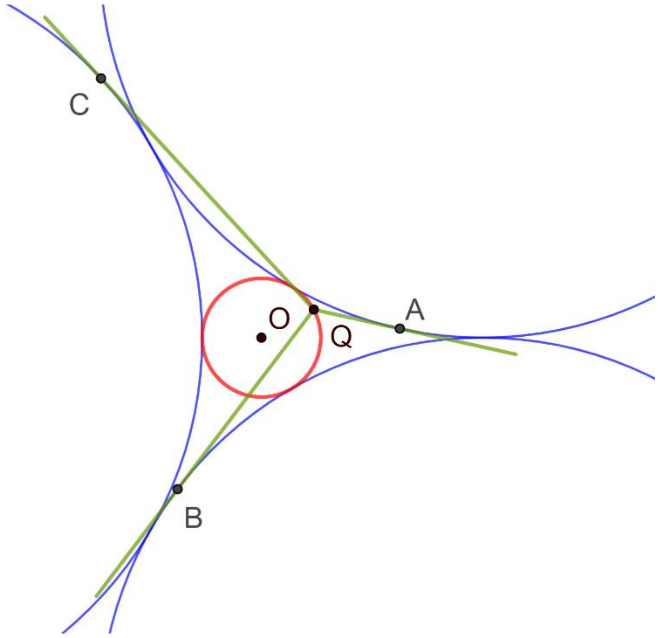
Bemærkning. Faktoren oven for

$$3a^2 + 3b^2 - 7 + 4\sqrt{3}$$

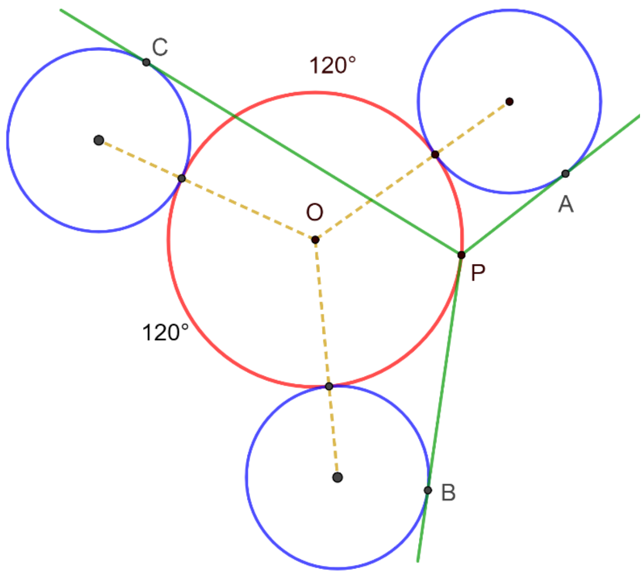
svarer til ligningen for den lille cirkel, der er indskrevet mellem de tre cirkler og som tangerer dem udvendigt:

$$x^2 + y^2 = \tfrac{7-4\sqrt{3}}{3}\ .$$

Der gælder for denne sætning tilsvarende for at punkt Q på cirklen, at længden af en af tangenterne fra Q til de tre cirkler er lig med summen af længderne for de to andre. På figuren er $QC = QA + QB$.

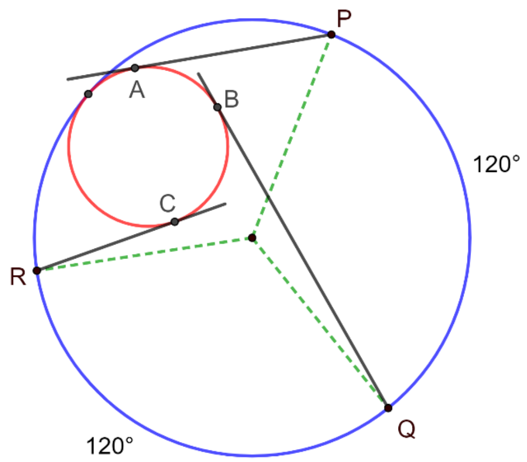


Bemærkning. Jens-Søren Andersen bemærker, at sætningen oven for også gælder, hvis de tre cirkler tangerer midtercirklen udvendigt og røringspunkterne ligger med 120° ind- byrdes bueafstand. På figuren er altså $PA + PB = PC$.



Bemærkning. Der gælder en sætning, der er en slags dual til opgavens sætning: En lille cirkel tangerer en større indvendigt. Tre punkter P, Q og R ligger på den store cirkel med en indbyrdes bueafstand på 120°. Fra P, Q og R trækkes tangenter PA, QB, RC til den lille cirkel. Da er længden af det længste tangentstykke lig med summen af længderne af de to korteste, dvs. på figuren er $QB = PA + RC$.

I sommeropgaven var givet tre 120°-forskudte tangerende cirkler og tangenter fra ét punkt på cirklen til disse. Her er givet tre 120°-forskudte punkter og tangenter fra disse til én tangerende cirkel.
Et bevis for sætningen kan findes i *MatematikMagasinet* s. 1998 (Oktober 2011).



Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Hans Mortensen
- Jan Erik Pedersen.