# Svar på opgave 392 (September 2022)

## *Opgaverne:*

**a.** Lad $u$ og $v$ være hele positive tal, så

$$\frac{43}{197} < \frac{u}{v} < \frac{17}{77}\,.$$

Bestem den mindst mulige værdi af nævneren $v$.

**b.** De hele positive tal $x$ og $y$ opfylder, at

$$\frac{2020}{2021} < \frac{x}{y} < \frac{2021}{2022}\,.$$

Bestem $x$ og $y$, så $x + y$ er mindst mulig.

**c.** Find de to mindste hele positive tal $n$, så brøkerne

$$\frac{68}{n+70}\,,\ \frac{69}{n+71}\,,\ \frac{70}{n+72}\,,\ \ldots\,,\ \frac{133}{n+135}$$

alle er uforkortelige.

**d.** De hele positive tal $a$, $b$ og $c$ opfylder, at

$$a > b > c \quad \text{og} \quad 12b > 13c > 11a\,.$$

Vis, at $a + b + c \geq 56$.

**e.** Vis, at der blandt tallene af formen $2023k + 8$, hvor $k$ er et helt positivt tal, findes uendelig mange kvadrattal.

## *Besvarelse:*

**a.** *1. metode*.

Vi finder, at

$$\frac{77}{17} < \frac{v}{u} < \frac{197}{43} \quad \text{eller} \quad 4+\frac{9}{17} < \frac{v}{u} < 4+\frac{25}{43}\,,$$

så $4 < \frac{v}{u} < 5$. Da $u$ og $v$ er positive hele tal, er $v = 4u + x$, hvor $0 < x < u$. Vi får så om- skrivningen

$$4+\frac{9}{17} < 4+\frac{x}{u} < 4+\frac{25}{43} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{17} < \frac{x}{u} < \frac{25}{43}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{17x} < \frac{1}{u} < \frac{25}{43x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{43x}{25} < u < \frac{17x}{9} \; .$$

Vi vil finde den mindste værdi af $x$, for hvilken $u$ er et veldefineret helt tal. For $x = 1, 2, 3$ får vi

$$1\tfrac{18}{25} < u < 1\tfrac{8}{9} \quad , \quad 3\tfrac{11}{25} < u < 3\tfrac{7}{9} \quad , \quad 5\tfrac{4}{25} < u < 5\tfrac{2}{3} \; .$$

For $x = 4$ er

$$6\tfrac{22}{25} < u < 7\tfrac{5}{9} \; .$$

Dermed kan vi bruge $u = 7$ og $v = 4u + x = 4 \cdot 7 + 4 = 32$. Dette er den mindste værdi for $v$, thi hvis $x \geq 5$, er

$$u > \frac{43x}{25} > \frac{43}{5} > 8 \; ,$$

så $v = 4u + x > 32 + 5 = 37$. Den søgte mindste værdi af $v$ er altså 32. Vi får, at

$$\frac{43}{197} < \frac{7}{32} < \frac{17}{77} \quad \text{eller} \quad 0{,}21827 < 0{,}21875 < 0{,}22078 \; .$$

Vi kan sige, at $\frac{7}{32}$ er den brøk med mindst nævner, der ligger mellem $\frac{43}{197}$ og $\frac{17}{77}$.

*2. metode* (Jan Erik Pedersen, Aakirkeby).

Vi skriver uligheden således:

$$\frac{43}{197} < \frac{x}{x+y} < \frac{17}{77} \; ,$$

hvor $x$ og $y$ er naturlige tal. Vi kan omforme således:

$$\frac{43}{197} < \frac{x}{x+y} < \frac{17}{77} \quad \Leftrightarrow \quad 43(x+y) < 197x \;\wedge\; 77x < 17(x+y)$$

$$43x + 43y < 197x \;\wedge\; 77x < 17x + 17y \quad \Leftrightarrow \quad 154x > 43y \;\wedge\; 60x < 17y$$

$$\Leftrightarrow \quad y < \tfrac{154}{43}x \;\wedge\; y > \tfrac{60}{17}x \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{60}{17}x < y < \tfrac{154}{43}x \quad .$$

Tilnærmelsesvis får vi, at

$$3{,}529x < y < 3{,}581x \; .$$

Ved at lade $x$ gennemløbe tallene 1, 2, 3, … ser vi, at første gang uligheden er opfyldt for en hel værdi af $y$, er for $x = 7$, hvor vi får

$$24{,}706 < y < 25{,}070 \; ,$$

så $y = 25$. Altså har vi fundet løsningen

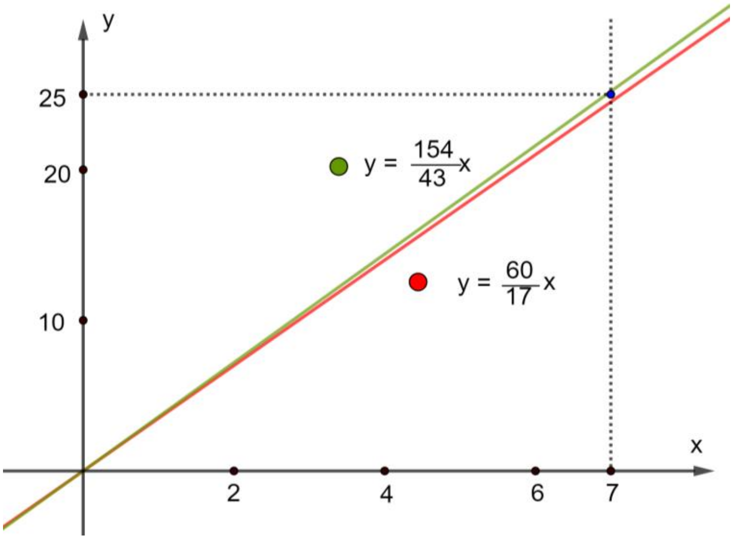
$$\tfrac{43}{197} < \tfrac{7}{32} < \tfrac{17}{77}.$$

Den næste værdi af $x$, der giver en hel værdi for $y$, er $x = 9$, hvor vi får

$$31{,}765 < y < 32{,}233 \; ,$$

så vi får $y = 32$ og

$$\tfrac{43}{197} < \tfrac{9}{41} < \tfrac{17}{77} \; .$$




På en figur angiver $x = 7$ den første lodrette linje gennem et helt tal på $x$-aksen, som indeholder et punkt med hel $y$-koordinat mellem de to linjer med ligningerne $y = \frac{154}{43}x$ og $y = \frac{60}{17}x$.

*3. metode* (Walther Janous, Innsbruck).

Vi omskriver uligheden sådan:

$$\frac{43}{197} < \frac{u}{v} < \frac{17}{77} \iff \frac{77}{17} < \frac{v}{u} < \frac{197}{43} \iff \frac{77}{17}u < v < \frac{197}{43}u$$

eller

$$4{,}529411764u < v < 4{,}581395348u\ . \tag{1}$$

Vi lader $u$ gennemløbe de naturlige tal og får ulighederne

$$\begin{aligned}
u = 1 &: \ 4{,}529411764 < v < 4{,}581395348 \\
u = 2 &: \ 9{,}058823529 < v < 9{,}162790697 \\
u = 3 &: \ 13{,}58823529 < v < 13{,}74418604 \\
u = 4 &: \ 18{,}11764705 < v < 18{,}32558139 \\
u = 5 &: \ 22{,}64705882 < v < 22{,}90697674 \\
u = 6 &: \ 27{,}17647059 < v < 27{,}48837209 \\
u = 7 &: \ 31{,}70588235 < v < 32{,}06976744\ .
\end{aligned}$$

Altså får vi for $u = 7$, at det naturlige tal $v = 32$ som det mindste passer i uligheden (1) og dermed i den oprindelige ulighed.

**b.** *1. metode.*

Vi ser, at $x < y$, så $x = y - d$, hvor $d$ er et positivt helt tal. Vi har så

$$1 - \frac{1}{2021} < 1 - \frac{d}{y} < 1 - \frac{1}{2022} \iff \frac{1}{2021} > \frac{d}{y} > \frac{1}{2022}$$

$$\frac{d}{2021d} > \frac{d}{y} > \frac{d}{2022d} \iff 2021d < y < 2022d\ . \tag{1}$$

Dette er ikke opfyldt for $d = 1$. For $d = 2$ fås

$$4042 < y < 4044 ,$$

så $y = 4043$. Så er $x = y - d = 4041$ og $x + y = 8084$.
Da $x = y - d$ er $x + y = 2y - d$, og da vi efter (1) har, at $y > 2021d$, er

$$x + y = 2y - d > 4042d - d = 4041d .$$

Hvis $d \geq 3$ er dermed

$$x + y \geq 4041\mathrm{d} \geq 12123 .$$

Altså antages den mindste værdi af $x + y$ for $d = 2$, hvor $(x,y) = (4041,4043)$.

*2. metode* (Jan Erik Pedersen, Aakirkeby).

Den mindste sum fås, hvis $y = x + 1$. Så er

$$\frac{2020}{2021} < \frac{x}{x+1} < \frac{2021}{2022} \quad \Leftrightarrow \quad 2020(x+1) < 2021x \ \wedge \ 2022x < 2021(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x > 2020 \quad \wedge \quad x < 2021 ,$$

hvilket er umuligt.
Så har vi muligheden $y = x + 2$, som giver

$$\frac{2020}{2021} < \frac{x}{x+2} < \frac{2021}{2022} \quad \Leftrightarrow \quad 2020(x+2) < 2021x \ \wedge \ 2022x < 2021(x+2) \ ,$$

hvilket efter lidt regning giver

$$x > 4040 \quad \wedge \quad x < 4042 ,$$

så vi kan bruge $x = 4041$ og dermed $y = 4043$.

**Bemærkning.**
Roger Bengtsson, Lund, nævner, at opgave a og b kan løses ved at gå ud fra det såkaldte binære *Stern-Brocott-træ*, som konstrueres ved at man trin for trin dan- ner de såkaldte *medianter* til allerede konstruere rationale tal. Her defineres medianten af brøkerne $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ som brøken $\frac{a+c}{b+d}$ .
Brøkerne i dette træ kan spores ved hjælp af brøkerners kædebrøksfremstilling. Mere om dette kan ses på Wikipedia *Stern-Brocot tree*.

**c.**

Brøkerne har formen

$$\frac{k}{k+n+2} \ \text{ for } \ 68 \leq k \leq 133 .$$

Nu gælder for den største fælles divisor, at

$$\mathrm{sfd}(k , k + n + 2) = \mathrm{sfd}(k , n + 2) \ .$$

Brøkerne er altså uforkortelige, når $n + 2$ er primisk med tallene 68, 69, . . . , 133. Derfor må $n + 2$ ikke være delelig med noget primtal, der går op i mindst et af tallene 68, 69, . . ., 133. Da 133 - 68 = 65, bortfalder derfor alle primtal $p \leq 65$ som divisorer i $n + 2$, da disse er divisorer i mindst et af tallene 68, 69, . . ., 133.

Desuden er naturligvis også primtallene i intervallet $68 \leq p \leq 133$ udelukket. De to mindste muligheder for $n + 2$ er dermed $n + 2 = 67$ og $n + 2 = 137$, dvs. $n = 65$ og $n = 135$. I det første tilfælde er de søgte brøker

$$\frac{68}{135}, \frac{69}{136}, \frac{70}{137}, \ldots, \frac{133}{200},$$

og i det andet tilfælde

$$\frac{68}{205}, \frac{69}{206}, \frac{70}{207}, \ldots, \frac{133}{270}.$$

**d.** *1. metode.*

Da $a > b > c$, gælder, at

$$a \geq b + 1 \geq c + 2,$$

hvoraf $a - c \geq 2$. Vi deler op i tilfælde.

**I.** $a - c \geq 4$. Så er $a \geq c + 4$, så

$$13c > 11a \geq 11(c + 4) = 11c + 44,$$

så $c > 22$. Dermed er

$$a + b + c > c + c + c > 66 > 56.$$

**II.** $a - c = 2$. Da

$$a \geq b + 1 \geq c + 2,$$

må gælde, at $a = b + 1 = c + 2$, så vi får

$$12b > 13c > 11a \quad \Leftrightarrow \quad 12(c + 1) > 13c > 11(c + 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 12c + 12 > 13c > 11c + 22 \quad \Leftrightarrow \quad c < 12 \ \wedge \ c > 11,$$

hvilket er umuligt.

**III.** $a - c = 3$. Derfor er $b = c + 1$ eller $b = c + 2$.

Hvis $b = c + 1$, er

$$12b > 13c > 11a \quad \Leftrightarrow \quad 12(c + 1) > 13c > 11(c + 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad 12c + 12 > 13c > 11c + 33 \quad \Leftrightarrow \quad c < 12 \ \wedge \ c > 16\tfrac{1}{2},$$

hvilket er umuligt.

Hvis $b = c + 2$, er

$$12b > 13c > 11a \quad \Leftrightarrow \quad 12(c + 2) > 13c > 11(c + 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad 12c + 24 > 13c > 11c + 33 \quad \Leftrightarrow \quad c < 24 \ \wedge \ c > 16\tfrac{1}{2}.$$

Altså er $c \geq 17$ og dermed $b = c + 2 \geq 19$ og $a = c + 3 \geq 20$. Dermed er

$$a + b + c \geq 20 + 19 + 17 = 56.$$

*2. metode* (Jan Erik Pedersen, Aakirkeby).

Vi vil undersøge, hvilken minimumsværdi
$a + b + c$ har under de stillede krav til $a$, $b$ og $c$.
Vi prøver med $a = x$, $b = x - 1$ og $c = x - 2$, som kunne være et af de talsæt med mindst mulig sum.
Så er

$$12b > 13c \quad \Leftrightarrow \quad 12x - 12 > 13x - 26 \quad \Leftrightarrow \quad x < 14\,,$$

$$13c > 11a \quad \Leftrightarrow \quad 13x - 26 > 11x \quad \Leftrightarrow \quad x < 13\,.$$

Dette er umuligt. Vi prøver så med $a = x$, $b = x - 1$ og $c = x - 3$ og får

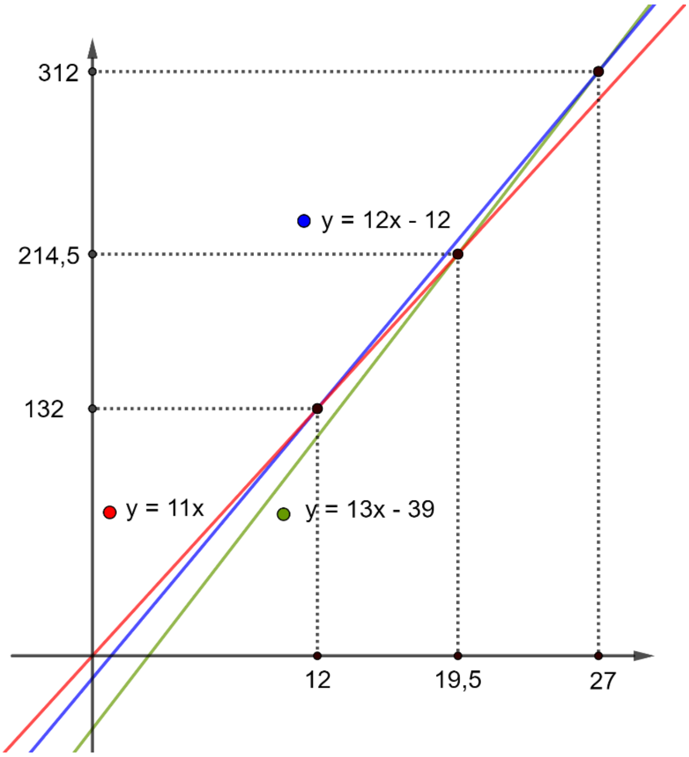
$$12b > 13c \quad \Leftrightarrow \quad 12x - 12 > 13x - 39 \quad \Leftrightarrow \quad x < 27\,,$$

$$13c > 11a \quad \Leftrightarrow \quad 13x - 39 > 11x \quad \Leftrightarrow \quad x < 19{,}5\,.$$

De brugbare værdier af $x$ er 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26. For $a = 20$ er $b = 19$ og $c = 17$ de mindst mulige værdier, og $a + b + c = 56$. Vi ser, at

$$12b > 13c > 11a \quad \Leftrightarrow \quad 12\cdot 19 > 13\cdot 17 > 11\cdot 20 \quad \Leftrightarrow \quad 228 > 221 > 220\,.$$

På figuren er tegnet linjerne med ligningerne $y = 11x$, $y = 12x - 12$ og $y = 13x - 39$ og deres indbyrdes skæringspunkter.




*3. metode* (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Efter det givne er

$$0 < 12b - 11a = 11(b - a) + b\,,$$

hvoraf

$$b > 11(a - b) > 11\cdot 1 = 11\,.$$

Altså er $b \geq 12$, og da $a > b$, er $a \geq 13$.
Idet

$$13c > 11a \geq 11\cdot 13\,,$$

er $c > 11$, dvs. $c \geq 12$.
Videre får vi

$$12b > 13c \quad \Leftrightarrow \quad 12(b - c) > c \geq 12 \ ,$$

så $b - c > 1$. Altså er $b - c \geq 2$, så at

$$a - c = (a - b) + (b - c) \geq 1 + 2 = 3 \ .$$

Så er

$$13c > 11a \quad \Leftrightarrow \quad 2c > 11(a - c) \geq 11 \cdot 3 \ ,$$

hvoraf $c \geq \frac{33}{2}$. Altså er $c \geq 17$, og

$$b = (b - c) + c \geq 2 + 17 = 19$$

og

$$a \geq b + 1 \geq 20$$

og dermed

$$a + b + c \geq 20 + 19 + 17 = 56 \ .$$

Kontrol viser, at $a = 20$, $b = 19$ og $c = 17$ opfylder $a > b > c$ og at $12b > 13c > 11a$, idet

$$12b = 228 \ , \ 13c = 221 \ , \ 11a = 220 \ .$$

**e.** *1. metode.*

For $k = 4$ er

$$2023k + 8 = 2023 \cdot 4 + 8 = 8100 = 90^2 \ .$$

Nu får vi for et vilkårligt helt positivt tal $m$, at

$$(2023m + 90)^2 = (2023m)^2 + 2 \cdot 90 \cdot 2023m + 90^2$$

$$= 2023^2m^2 + 2023 \cdot 180m + 2023 \cdot 4 + 8 = 8 + 2023(4 + 180m + 2023m^2) \ .$$

For $k = 4 + 180m + 2023m^2$ er altså $2023k + 8$ et kvadrattal.

*2. metode* (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Vi viser, at hvis $a$ er et naturligt tal og $b$ et helt tal, så indeholder differensrækken

$$an + b \ , \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

uendelig mange kvadrattal, hvis den blot indeholder et enkelt.
Antag, at $k$ og $m$ er naturlige tal, så $ak + b = m^2$. Så er

$$(an + m)^2 = a(an^2 + 2mn) + m^2 = a(an^2 + 2mn) + ak + b = a(an^2 + 2mn + k) + b \ .$$

Her er $an^2 + 2mn + k$ er et naturligt tal $q$, så $aq + b$ er et kvadrattal. Disse er der uendelig mange af, idet $an^2 + 2mn + k$ er en voksende funktion af $n$.
Den foreliggende opgave er indeholdt i dette for $a = 2023$, $b = 8$, $m = 90$ og $k = 4$, idet

$$2023 \cdot 4 + 8 = 4(2023 + 2) = 4 \cdot 2025 = 4 \cdot 45^2 = 90^2 \ .$$

**Besvarelser modtaget fra:**

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Jan Erik Pedersen
- Con Amore Problemgruppe.