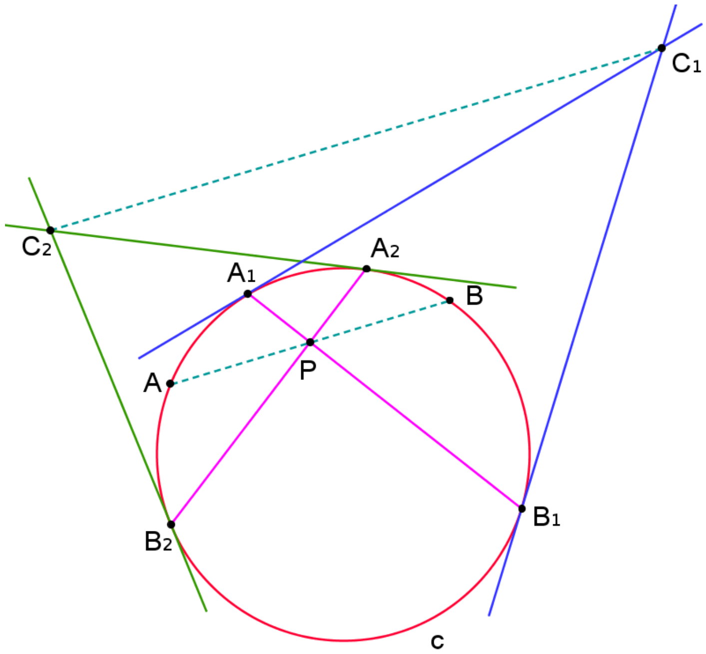
Svar på opgave 394 (November 2022)

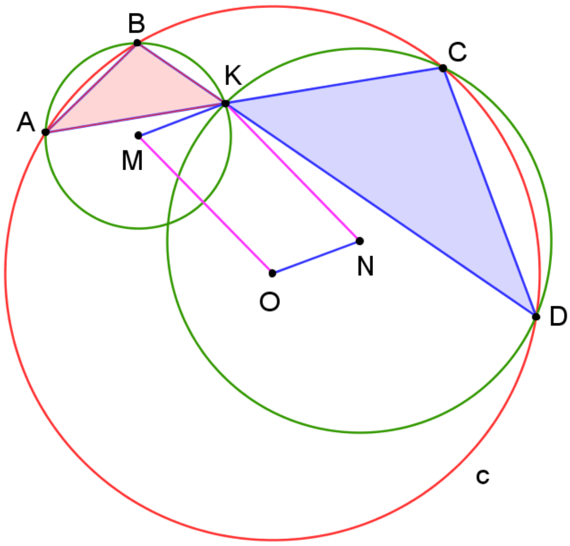
Opgaverne:

Et par smukke sætninger om cirkelkorder

a. I cirklen c er P midtpunkt af korden AB. Korderne A_1B_1 og A_2B_2 går gennem P. Tangen- terne i A_1 og B_1 skærer hinan- den i C_1 og tangenterne i A_2 og B_2 skærer hinanden i C_2. Vis, at $AB \parallel C_1C_2$.



b. Korderne AC og BD i cirklen c med centrum i O skærer hinanden i K. Punkterne M og N er centrer for de omskrevne cirkler for ΔAKB og ΔCKD. Vis, at $OM \parallel KN$ og $ON \parallel KM$.



Besvarelse:

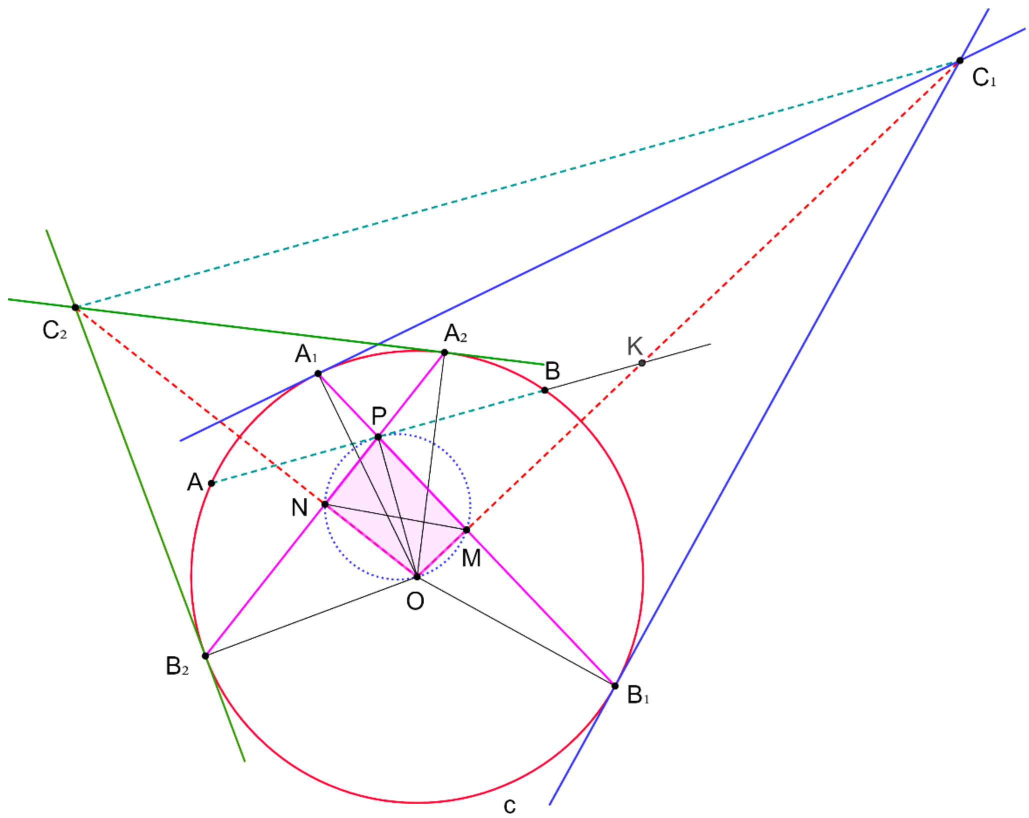
a.

1. metode.

Lad M være skæringspunkt mellem A_1B_1 og OC_1, N skæringspunkt mellem A_2B_2 og OC_2 og K skæringspunkt mellem AB og OC_1. I den ligebenede $\Delta A_1B_1C_1$ er så M midt- punkt af A_1B_1 og OC_1 midtnormal for A_1B_1. Tilsvarende er N midtpunkt af A_2B_2 og OC_2 er midtnormal for A_2B_2.

Nu er $\square MPNO$ indskrivelig, da den har to modstående rette vinkler, og lige store periferivinkler i den omskrevne cirkel giver, at

$$\angle ONM = \angle OPM .$$



I den retvinklede ΔMKP er

$$\angle MKP = \angle OKP = 90° - \angle KPM , \tag{1}$$

og i den retvinklede ΔOKP er

$$90° - \angle KPM = \angle OPM .$$

Altså er

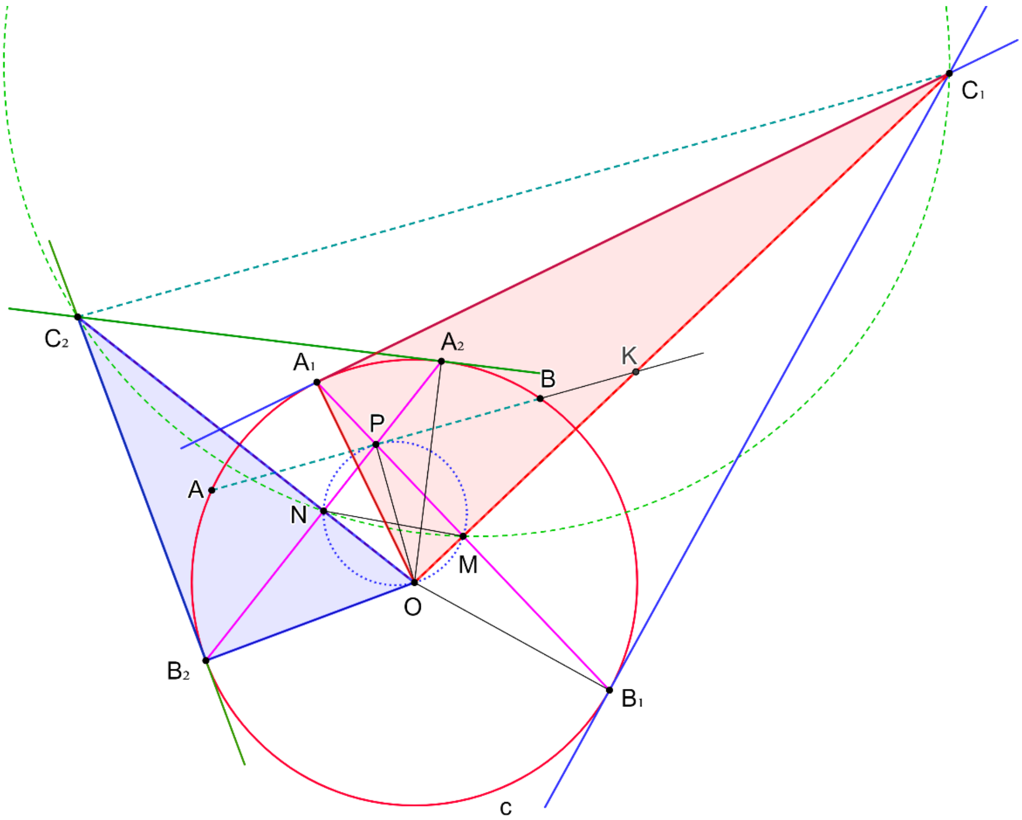
$$\angle ONM = \angle OPM = \angle MKP . \tag{2}$$

I den retvinklede ΔOA_1C_1 giver en kendt sætning om retvinklede trekanter (en katete er mellemproportional mellem sin projektion på hypotenusen og hele hypotenusen), at

$$OM \cdot OC_1 = OA_1^2 \,,$$

og i den retvinklede ΔOB_2C_2 gælder tilsvarende, at

$$ON \cdot OC_2 = OB_2^2 \,.$$



Da $OA_1 = OB_2$ medfører dette, at

$$OM \cdot OC_1 = ON \cdot OC_2 \,.$$

Sekantsætningen (punkts potens) giver, at $\square NMC_1C_2$ er indskrivelig. Her er nemlig O et ydre punkt i den omskrevne cirkel og OMC_1 og ONC_2 er sekanter. Modstående vinkler er supplementvinkler, så

$$\angle OC_1C_2 = \angle MC_1C_2 = 180° - \angle MNC_2 = \angle ONM \,, \qquad (3)$$

så (3), (2) og (1) giver

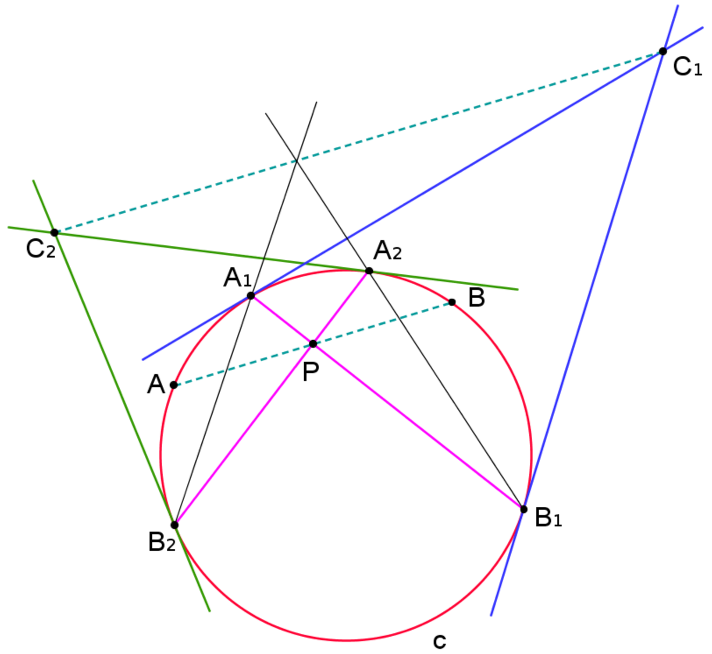
$$\angle OC_1C_2 = \angle ONM$$

$$= \angle MKP = \angle OKP \ .$$

Dette medfører, at $C_1C_2 \parallel KP$ eller $C_1C_2 \parallel AB$.

Bemærkning.

Linjerne B_2A_1 og B_1A_2 skærer i øvrigt hinanden på linjen C_1C_2.



2. metode (Jens-Søren Andersen, Esbjerg).

Centrum og radius i c er O og r. Midtnormalen OP til AB skærer tangenten i A i C. Den vinkelrette OD fra O på korden A_1B_1 skærer tangenten i A_1 i C_1. Vi sætter

$$a = OP \quad , \quad d = OC \quad , \quad a_1 = OD \quad , \quad d_1 = OC_1 \ .$$

I den retvinklede ΔOAC er OP projektionen af kateten OA på hypotenusen OC. Da en katete er mellemproportional mellem sin projektion på hypotenusen og hele hypotenusen, er

$$r^2 = a \cdot d \ .$$

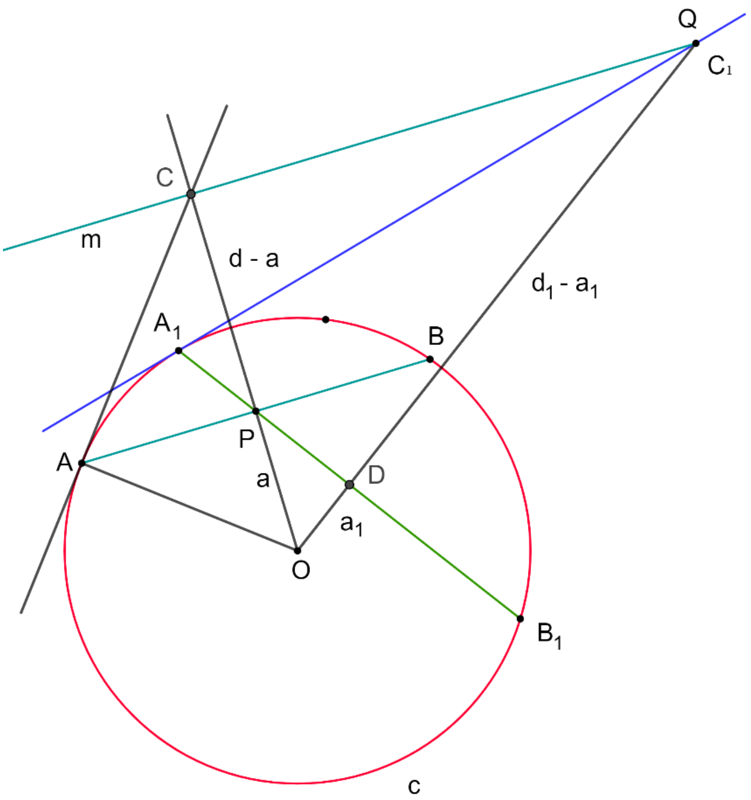
Dette er en relation mellem radius, afstanden fra centrum til en korde og afstanden fra centrum til midtnormalens skæringspunkt med tangenten. Derfor er også

$$r^2 = a_1 \cdot d_1 \ .$$

Så er

$$\frac{a}{a_1} = \frac{d_1}{d} \ .$$

Lad nu m være linjen gennem C vinkelret på OC, dvs. parallel med AB, og lad m skære OC_1 i Q.



Da ΔOPD og ΔOQC er ensvinklede, er

$$\frac{OQ}{OP}=\frac{OC}{OD}\ ,$$

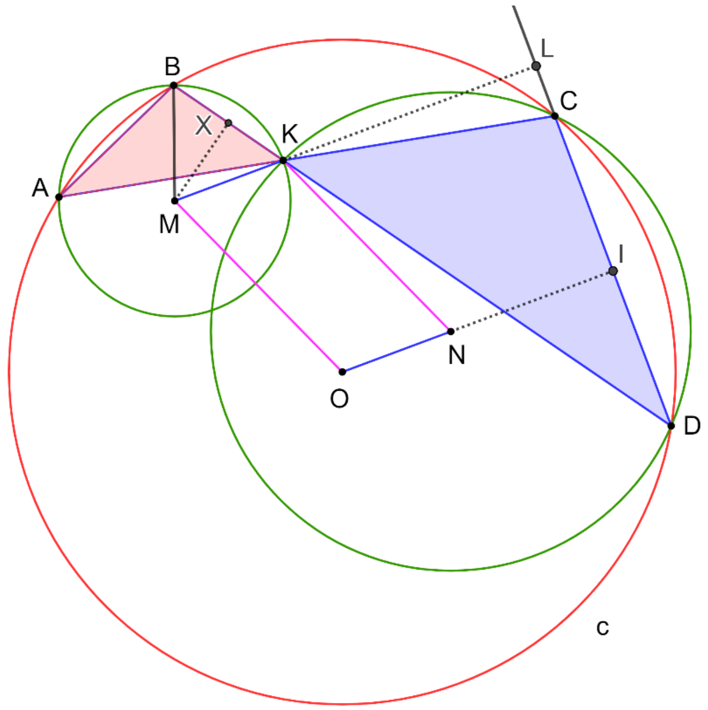
hvoraf

$$OQ=OC\cdot\frac{OP}{OD}=d\cdot\frac{a}{a_1}=d\cdot\frac{d_1}{d}=d_1=OC_1\ .$$

Dette medfører, at Q falder sammen med C_1. Punktet C_1 ligger altså på m. Det samme gælder C_2, så C_1C_2 og m falder sammen.

Bemærkning.

Jens-Søren Andersen, Esbjerg, nævner, at $AB \parallel C_1C_2$ netop hvis P er midtpunkt af AB.



b.

Lad X være midtpunktet af KB. Så er ΔKMB ligebenet og $MX \perp BK$ og dermed

$$\angle KMB = 2 \cdot \angle KMX \;,$$

og da $\angle KMB$ og $\angle KAB$ er centervinkel og periferivinkel over samme bue, er

$$\angle KMB = 2 \cdot \angle KAB \;.$$

I cirklen c får vi nu, at

$$\angle CAB = \angle KAB = \angle BDC = \angle KDC \,.$$

Dermed har vi

$$\angle KMX = \tfrac{1}{2} \cdot \angle KMB = \angle KAB = \angle KDC \,.$$

Lad MK skære CD i L. Da

$$\angle MKX = \angle LKD \quad \text{og} \quad \angle KMX = \angle KDC \;,$$

er ΔKXM og ΔKLD ensvinklede, og dermed er $\angle KLD$ ret, så $KM \perp CD$.
Da CD er fælles korde for cirklen c og den omskrevne cirkel for ΔCKD og O og N er centrer for cirklerne, gælder for centerlinjen ON, at $ON \perp CD$. Da også $KM \perp CD$, er $ON \parallel KM$. Analogt er $OM \parallel KN$.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Walther Janous