Svar på opgave 396 (Januar 2023)

Opgaverne:

a. Find inden for de reelle tal samtlige løsninger (x,y) til ligningen

$$\mathrm{int}x \cdot \mathrm{int}y = x + y \ .$$

b. Bestem de hele tal b, for hvilke ligningen

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\mathrm{int}\,2x} + \frac{1}{\mathrm{int}\,5x}$$

har løsninger x.

c. Vis, at der for alle reelle tal x gælder

$$\mathrm{int}\,\frac{x+3}{6} - \mathrm{int}\,\frac{x+4}{6} + \mathrm{int}\,\frac{x+5}{6} = \mathrm{int}\,\frac{x+1}{2} - \mathrm{int}\,\frac{x+1}{3} \ .$$

Besvarelse:

a.

Da venstre side af lighedstegnet er et helt tal, gælder det samme for højre side. Vi sætter

$$x = a + r \quad , \quad y = b + s \ ,$$

hvor a og b er hele tal og r og s ligger i intervallet [0;1[. Så er

$$\mathrm{int}x \cdot \mathrm{int}y = \mathrm{int}(a + r) \cdot \mathrm{int}(b + s) = a \cdot b$$

og

$$x + y = a + r + b + s = a + b + r + s \ .$$

Da $x + y$ og $a + b$ er hele tal, er også $r + s$ hel. Vi deler op i tilfælde.

I. $r + s = 0$. Så er $r = 0$, $s = 0$, $x = a$ og $y = b$. Derfor er

$$\mathrm{int}x \cdot \mathrm{int}y = a \cdot b \quad \text{og} \quad x + y = a + b \ ,$$

hvoraf

$$ab = a + b \quad \Leftrightarrow \quad ab - a - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 1)(b - 1) = 1 \ .$$

Heraf fås $a = b = 2$ eller $a = b = 0$. Så er $x = y = 2$ eller $x = y = 0$. Løsninger er altså (x,y) = (2,2) eller (x,y) = (0,0).

II. $r + s = 1$. Så er $s = 1 - r$, og vi får

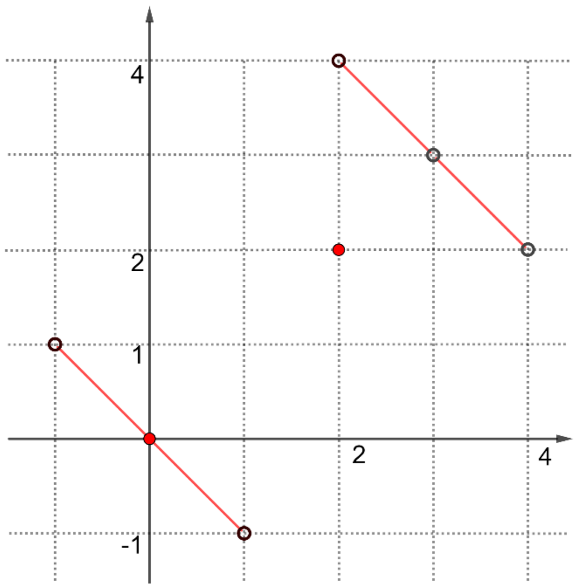
$$\mathrm{int}x \cdot \mathrm{int}y = a \cdot b \quad \text{og} \quad x + y = a + b + 1 \ ,$$

hvoraf

$$ab = a + b + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 1)(b - 1) = 2 \,.$$

Mulighederne for løsninger fremgår af følgende tabel:

$a - 1$	-1	-2	2	1
$b - 1$	-2	-1	1	2
a	0	-1	3	2
b	-1	0	2	3
$x = a + r$	r	$-1 + r$	$3 + r$	$2 + r$
$y = b + 1 - r$	$-r$	$1 - r$	$3 - r$	$4 - r$



I koordinatsystemet ligger punkterne med løsningskoordinater (x,y) således:

$(x,y) = (r \,, -r)$: Linjestykket mellem (0,0) (incl.) og (1,-1) (excl.)
$(x,y) = (-1 + r \,, 1 - r)$: Linjestykket mellem (-1,1) (excl.) og (0,0) (incl.)
$(x,y) = (3 + r \,, 3 - r)$: Linjestykket mellem (3,3) (excl.) og (4,2) (excl.)
$(x,y) = (2 + r \,, 4 - r)$: Linjestykket mellem (2,4) (excl.) og (3,3) (excl.) .

Man kan sammenfattende skrive løsningerne (x,y) sådan:

$$x + y = 6 \quad \text{hvor} \quad 0 < |x - 3| < 1$$

$$x + y = 0 \quad \text{hvor} \quad 0 < |x| < 1$$

$$(x,y) = (0,0) \text{ og } (x,y) = (2,2) \,.$$

b.

Vi sætter $n = \text{int}x$. Så ligger x i præcis et af intervallerne

$$\left[n; n+\tfrac{1}{10}\right[\,,\ \left[n+\tfrac{1}{10}; n+\tfrac{2}{10}\right[\,,\ \left[n+\tfrac{2}{10}; n+\tfrac{3}{10}\right[\,, \ldots, \left[n+\tfrac{9}{10}; 1\right[\,,$$

dvs.

$$n+\tfrac{r}{10} \le x < n+\tfrac{r+1}{10} \quad , \quad 0 \le r \le 9 \ .$$

For hver værdi af r kan vi udtrykke int2x og int5x ved n:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
int2x	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n+1$	$2n+1$	$2n+1$	$2n+1$	$2n+1$
int5x	$5n$	$5n$	$5n+1$	$5n+1$	$5n+2$	$5n+2$	$5n+3$	$5n+3$	$5n+4$	$5n+4$

For eksempel får vi for $r = 4$:

$$n+\tfrac{4}{10} \le x < n+\tfrac{5}{10} \ ,$$

og multiplikation med 2 og 5 giver

$$2n+\tfrac{8}{10} \le 2x < 2n+1 \quad , \quad 5n+2 \le 5x < 5n+2\tfrac{1}{2} \ ,$$

hvoraf

$$\text{int}2x = 2n \ , \ \text{int}5x = 5n+2 \ .$$

Vi deler op i tilfælde.

I. $r = 0 \vee r = 1$. Ligningen er

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{5n} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{10n}{7} \ .$$

Da b skal være hel, må n være delelig med 7, så $n = 7k$ og dermed $b = 10k$. Altså kan b være et hvilket som helst helt multiplum af 10 (bortset fra 0). Vi får

$$\frac{1}{10k} = \frac{1}{\text{int}\,2x} + \frac{1}{\text{int}\,5x} \ , \tag{1}$$

så x ligger i et interval af typen

$$\left[7k\,;7k+\tfrac{1}{10}\right[\ \text{eller} \ \left[7k+\tfrac{1}{10};7k+\tfrac{2}{10}\right[\ ,$$

dvs. et interval af typen

$$\left[7k\,;7k+\tfrac{2}{10}\right[\ .$$

Alle sådanne værdier af x er løsninger til (1).

II. $r = 2 \vee r = 3$. Vi får

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{5n+1} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{10n^2+2n}{7n+1} \ .$$

Polynomiers division giver

$$b = \frac{10}{7}n + \frac{4n}{7(7n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad 7b - 10n = \frac{4n}{7n+1} \ .$$

Den sidste brøk ligger mellem 0 og 1 for alle hele n, så ligningen har ingen løsninger i dette tilfælde. For $n = 0$ fås $b = 0$, som ikke er brugbar.

III. $r = 4$. Vi får

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{5n+2} \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{10n^2+4n}{7n+2} .$$

Samme metode som oven for giver

$$7b - 10n - 1 = \frac{n-2}{7n+2} .$$

Den sidste brøk skal være et helt tal. Hvis n = 1, er b = $\frac{14}{9}$. Hvis n = 2 er b = 3 og hvis $n \geq 3$, ligger brøken i intervallet]0;1[og er ikke hel.

Hvis b = 3, er n = 2, så int$x$ = 2. Desuden ligger x i intervallet

$$\left[2+\tfrac{4}{10};2+\tfrac{5}{10}\right[=\left[\tfrac{12}{5};\tfrac{5}{2}\right[,$$

og alle x i dette interval er løsninger til ligningen

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{\operatorname{int}2x}+\frac{1}{\operatorname{int}5x} .$$

IV. r = 5. Her er

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{5n+2} \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{10n^2+9n+2}{7n+3} .$$

Dette giver

$$7b - 10n - 4 = \frac{5n+2}{7n+3} ,$$

og den sidste brøk er ikke hel for nogen hele værdier af $n \neq 0$, så ligningen har ingen løsninger. Værdien n = 0 giver b = $\frac{2}{3}$, som ikke er brugbar.

V. $r = 6 \;\vee\; r = 7$. Vi får

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{5n+3} \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{10n^2+11n+3}{7n+4} ,$$

hvoraf

$$7b - 10n - 5 = \frac{2n+1}{7n+4} ,$$

og her er den sidste brøk ikke et helt tal for nogen værdi af n.

VI. $r = 8 \;\vee\; r = 9$. Vi får

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{5n+4} \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{10n^2+13n+4}{7n+5} ,$$

hvoraf

$$7b - 10n - 5 = \frac{6n+3}{7n+5},$$

og den sidste brøk har værdien 1 hvis n = -2. I så fald er

$$7b + 20 - 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = -2 .$$

Da r = 8 eller r = 9 og n = 2, ligger en løsning x i et af intervallerne

$$\left[-2+\tfrac{8}{10};-2+\tfrac{9}{10}\right[\quad \text{eller} \quad \left[-2+\tfrac{9}{10};-1\right[,$$

dvs. i intervallet [-1,2 ; -1[, og alle x i dette interval er løsninger.

Sammenfattende har vi fundet, at den givne ligning har løsninger, hvis b = 3, b = -2 eller b er delelig med 10 (og $b \neq 0$).

c.

1. metode.

Vi sætter $y = \frac{1}{6}(x+1)$. Så er

$$\frac{x+3}{6} = \frac{x+1}{6} + \frac{1}{3} = y + \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{x+4}{6} = \frac{x+1}{6} + \frac{1}{2} = y + \frac{1}{2} \ ,$$

$$\frac{x+5}{6} = \frac{x+1}{6} + \frac{2}{3} = y + \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{x+1}{2} = 3y \quad , \quad \frac{x+1}{3} = 2y \ .$$

Ligningen er derfor ensbetydende med

$$\text{int}(y+\tfrac{1}{3}) - \text{int}(y+\tfrac{1}{2}) + \text{int}(y+\tfrac{2}{3}) = \text{int}\,3y - \text{int}\,2y \ . \tag{1}$$

Nu gælder de såkaldte *Hermites identiteter*:

$$\text{int}\,y + \text{int}(y+\tfrac{1}{2}) = \text{int}\,2y \quad \text{og} \quad \text{int}\,y + \text{int}(y+\tfrac{1}{3}) + \text{int}(y+\tfrac{2}{3}) = \text{int}\,3y.$$

Derfor er (1) ensbetydende med

$$\text{int}\,3y - \text{int}\,y - \text{int}(y+\tfrac{1}{2}) = \text{int}\,3y - \text{int}\,2y$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{int}\,y + \text{int}(y+\tfrac{1}{2}) = \text{int}\,2y \ ,$$

hvilket er sandt.

Bemærkning. For en ordens skyld viser vi *Hermites indentitet.* Lad n være et naturligt tal og x et reelt tal. Vi ønsker at vise, at

$$\text{int}(nx) = \text{int}x + \text{int}\left(x+\tfrac{1}{n}\right) + \text{int}\left(x+\tfrac{2}{n}\right) + \cdots + \text{int}\left(x+\tfrac{n-1}{n}\right) .$$

Vi sætter

$$f(x) = \text{int}x + \text{int}\left(x+\tfrac{1}{n}\right) + \text{int}\left(x+\tfrac{2}{n}\right) + \cdots + \text{int}\left(x+\tfrac{n-1}{n}\right) - \text{int}(nx) \ . \tag{1}$$

Så er

$$f\left(x+\tfrac{1}{n}\right) = \text{int}\left(x+\tfrac{1}{n}\right) + \text{int}\left(x+\tfrac{2}{n}\right) + \cdots + \text{int}\left(x+\tfrac{n-1}{n}\right) + \text{int}(x+1) - \text{int}(nx+1)$$
$$= \text{int}\left(x+\tfrac{1}{n}\right) + \text{int}\left(x+\tfrac{2}{n}\right) + \cdots + \text{int}\left(x+\tfrac{n-1}{n}\right) + \text{int}\,x + 1 - \text{int}(nx) - 1 = f(x) \ .$$

Dermed er $f(x)$ periodisk med perioden $\frac{1}{n}$. Vi skal derfor blot vise, at $f(x) = 0$ for $0 \le x < \frac{1}{n}$.

For $0 \le x < \frac{1}{n}$ er

$$0 < x + \tfrac{1}{n} < \tfrac{2}{n} \quad , \quad 0 < x + \tfrac{2}{n} < \tfrac{3}{n} \quad , \quad \ldots \quad , \quad 0 < x + \tfrac{n-1}{n} < 1 \quad , \quad 0 \le nx < 1 \ .$$

Dermed er alle leddene i udtrykket (1) for $f\,(x)$ lig med 0. Altså er $f\,(x) = 0$ for alle reelle værdier af x.

2. metode.

Vi kan skrive, at $x = 6k + y$, hvor k er et helt tal og y er et reelt tal, så $0 \le y < 6$. Så får ligningen udseendet

$$\operatorname{int}\frac{6k+y+3}{6}-\operatorname{int}\frac{6k+y+4}{6}+\operatorname{int}\frac{6k+y+5}{6}=\operatorname{int}\frac{6k+y+1}{2}-\operatorname{int}\frac{6k+y+1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1+\operatorname{int}\frac{y+3}{6}-\left(1+\operatorname{int}\frac{y+4}{6}\right)+1+\operatorname{int}\frac{y+5}{6}=3+\operatorname{int}\frac{y+1}{2}-\left(2+\operatorname{int}\frac{y+1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \operatorname{int}\frac{y+3}{6}-\operatorname{int}\frac{y+4}{6}+\operatorname{int}\frac{y+5}{6}=\operatorname{int}\frac{y+1}{2}-\operatorname{int}\frac{y+1}{3}\ .$$

Denne ligning efterprøves i hvert af tilfældene

$$0 \le y < 1\ ,\ 1 \le y < 2\ ,\ 2 \le y < 3\ ,\ 3 \le y < 4\ ,\ 4 \le y < 5\ ,\ 5 \le y < 6\ ,$$

og i hvert af disse tilfælde passer ligningen.

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Walther Janous
- Hans Mortensen