Svar på opgave 398 (Marts 2023) version 3

Opgaverne:

a. Bestem alle funktioner $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, som for alle x og y ($x \neq 0$) opfylder, at

$$x \cdot f(y) - y \cdot f(x) = f\left(\tfrac{y}{x}\right) .$$

b. Bestem alle funktioner $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, som for alle x ($x \neq \pm 1$) opfylder, at

$$f\left(\tfrac{x-3}{1+x}\right) + f\left(\tfrac{x+3}{1-x}\right) = x .$$

c. Bestem alle funktioner $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, som for alle x ($x \neq -1$) opfylder, at

$$f(x)^2 \cdot f\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right) = 64x \;, \;\; x \neq 0 \,, \; x \neq \pm 1 .$$

d. Bestem alle funktioner $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, som for alle x opfylder, at

$$x^2 \cdot f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4 .$$

Besvarelser:

a.

Vi sætter $x = 1$ og får

$$f(y) - y \cdot f(1) = f(y) ,$$

hvoraf $f(1) = 0$. Hvis vi sætter $y = 1$, får vi

$$x \cdot f(1) - f(x) = f\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\tfrac{1}{x}\right) = -f(x) ,$$

fordi $f(1) = 0$.

Vi sætter $y = 0$ og får

$$x \cdot f(0) - 0 \cdot f(x) = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot f(0) = f(0) ,$$

og da x er et vilkårligt tal, må $f(0) = 0$.
Derefter sætter vi i $y = \frac{1}{x}$ og får

$$x \cdot f\left(\tfrac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{x} \cdot f(x) = f\left(\tfrac{1}{x^2}\right) \;\Leftrightarrow\; x \cdot f\left(\tfrac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{x} \cdot f(x) = -f(x^2)$$

$$\Leftrightarrow\; -x \cdot f(x) - \tfrac{1}{x} \cdot f(x) = -f(x^2) \;\;\Leftrightarrow\;\; f(x^2) = \left(x + \tfrac{1}{x}\right) \cdot f(x) . \qquad (1)$$

I den oprindelige funktionalligning indsætter vi nu x^2 i stedet for x og y^2 i stedet for y:

$$x^2 \cdot f(y^2) - y^2 \cdot f(x^2) = f\left(\frac{y^2}{x^2}\right),$$

og her indsætter vi $f(x^2)$ og $f(y^2)$ og $f\left(\frac{y^2}{x^2}\right)$ fra (1):

$$x^2 \cdot \left(y + \tfrac{1}{y}\right) \cdot f(y) - y^2 \cdot \left(x + \tfrac{1}{x}\right) \cdot f(x) = \left(\tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x}\right) \cdot f\left(\tfrac{y}{x}\right) .$$

Her erstatter vi $f\left(\frac{y}{x}\right)$ med udtrykket i den oprindelige ligning og foretager følgende omskrivninger:

$$x^2 \cdot \left(y + \tfrac{1}{y}\right) \cdot f(y) - y^2 \cdot \left(x + \tfrac{1}{x}\right) \cdot f(x) = \left(\tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x}\right) \cdot (x \cdot f(y) - y \cdot f(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^2 y + \tfrac{x^2}{y}\right) \cdot f(y) - \left(y^2 x + \tfrac{y^2}{x}\right) \cdot f(x) = \tfrac{x^2}{y} \cdot f(y) - x \cdot f(x) + y \cdot f(y) - \tfrac{y^2}{x} \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \cdot \left(-y^2 x - \tfrac{y^2}{x} + x + \tfrac{y^2}{x}\right) + f(y) \cdot \left(x^2 y + \tfrac{x^2}{y} - \tfrac{x^2}{y} - y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x(1 - y^2) \cdot f(x) + y(x^2 - 1) \cdot f(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x^2 - 1) \cdot f(y) = x(y^2 - 1) \cdot f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x)}{y(x^2 - 1)} = \frac{f(y)}{x(y^2 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x \cdot f(x)}{x^2 - 1} = \frac{y \cdot f(y)}{y^2 - 1} .$$

Dette gælder for alle x og y ($x, y \neq 0$, $x, y \neq \pm 1$), så vi får, at brøken er konstant:

$$\frac{x \cdot f(x)}{x^2 - 1} = k \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{k(x^2 - 1)}{x} .$$

Dermed er den ønskede funktionsforskrift fundet:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k(x^2 - 1)}{x} & \mathit{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \mathit{for} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Ved indsættelse i funktionalligningen ses, at disse funktioner passer.

b.

Antag, at f opfylder (1) og sæt

$$y = \frac{x + 3}{1 - x} .$$

Så er $y \neq \pm 1$ og vi kan udtrykke x ved y:

$$y(1 - x) = x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x(1 + y) = y - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y - 3}{y + 1} .$$

Desuden er

$$\frac{y + 3}{1 - y} = \frac{\frac{x+3}{1-x} + 3}{1 - \frac{x+3}{1-x}} = \frac{x + 3 + 3(1 - x)}{1 - x - x - 3} = \frac{x - 3}{x + 1} . \qquad (2)$$

Efter (2) og (1) er så

$$f(x)+f\left(\tfrac{x-3}{x+1}\right)=f\left(\tfrac{y-3}{y+1}\right)+f\left(\tfrac{3+y}{1-y}\right)=y\ ,$$

hvoraf

$$f(x)+f\left(\tfrac{x-3}{x+1}\right)=\tfrac{x+3}{1-x}\ . \tag{3}$$

Nu sætter vi

$$z=\frac{x-3}{x+1}\ .$$

Så er $z\neq\pm1$ og vi kan udtrykke x ved z:

$$z(x+1)=x-3 \quad\Leftrightarrow\quad x(z-1)=-z-3 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{z+3}{1-z}\ .$$

Desuden er

$$\frac{z-3}{z+1}=\frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1}=\frac{x-3-3x-3}{x-3+x+1}=\frac{x+3}{1-x}\ . \tag{4}$$

Efter (4) og (1) er

$$f\left(\tfrac{x+3}{1-x}\right)+f(x)=f\left(\tfrac{z-3}{z+1}\right)+f\left(\tfrac{z+3}{1-z}\right)=z\ ,$$

hvoraf

$$f(x)+f\left(\tfrac{x+3}{1-x}\right)=\tfrac{x-3}{x+1}\ . \tag{5}$$

Addition af (3) og (5) giver under anvendelse af (1):

$$2\cdot f(x)+f\left(\tfrac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\tfrac{x+3}{1-x}\right)=\tfrac{x+3}{1-x}+\tfrac{x-3}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cdot f(x)+x=\frac{(x+3)(1+x)+(x-3)(1-x)}{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\cdot f(x)+x=\frac{8x}{1-x^2}\quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot f(x)=\frac{x^3+7x}{1-x^2}\quad\Leftrightarrow\quad f(x)=\frac{x^3+7x}{2-2x^2}\ .$$

Vi forudsætter, at $x\neq\pm1$. Så er argumenterne $\tfrac{x-3}{1+x}$ og $\tfrac{x+3}{1-x}$ begge forskellige fra ±1. Derfor optræder f (1) og f (-1) ikke i funktionalligningen, så de kan vælges frit.
Samtlige løsninger til funktionalligningen er dermed

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+7x}{2-2x^2} & \text{for}\quad x\neq\pm1\\ a & \text{for}\quad x=1\\ b & \text{for}\quad x=-1\end{cases}\ ,$$

hvor a og b kan vælges vilkårligt. Ved indsættelse i funktionalligningen ses, at disse funktioner passer.

c.

Vi skal finde samtlige funktioner $f(x)$, så

$$f(x)^2\cdot f\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right)=64x\ ,\ \ x\neq0\ ,\ x\neq\pm1\ . \tag{6}$$

Vi sætter $x = \frac{1-y}{1+y}$. Så er

$$x(1+y) = 1-y \quad \Leftrightarrow \quad x + xy = 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad xy + y = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1-x}{1+x} \ .$$

Altså er efter (6)

$$f\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2 \cdot f(y) = 64 \cdot \frac{1-y}{1+y} \ ,$$

eller idet vi omdøber y til x:

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \cdot f(x) = 64 \cdot \frac{1-x}{1+x} \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 = \frac{64}{f(x)} \cdot \frac{1-x}{1+x} \ . \qquad (7)$$

Af (6) fås

$$f(x)^4 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 = 64^2 \cdot x^2 \ ,$$

og ved indsættelse af (7) heri fås

$$f(x)^4 \cdot \frac{64}{f(x)} \cdot \frac{1-x}{1+x} = 64^2 \cdot x^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)^3 \cdot \frac{1-x}{1+x} = 64x^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)^3 = \frac{64x^2(1+x)}{1-x} \ ,$$

Da vi forudsætter, at $x \neq 0, \pm 1$, antager argumentet $\frac{1-x}{1+x}$ ikke værdierne 0 og ± 1. Derfor optræder f(-1), f(0) og f(1) ikke i funktionalligningen, så de kan vælges frit. Altså får vi

$$f(x) = 4\sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{1-x}} \quad \text{for} \quad x \neq 0, \ \pm 1 \quad , \qquad f(x) = \begin{cases} k_1 & for \ \ x = -1 \\ k_2 & for \ \ x = 0 \\ k_3 & for \ \ x = 1 \end{cases} \ ,$$

hvor k_1, k_2 og k_3 er vilkårlige reelle tal.

d.

Vi erstatter x med 1 - x og får

$$(1-x)^2 \cdot f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \ .$$

For nemheds skyld sætter vi

$$a = f(x) \quad , \quad b = f(1-x) \ ,$$

så vi får følgende ligningssystem i a og b:

$$\begin{gathered} x^2 \cdot a + b = 2x - x^4 \\ (1-x)^2 \cdot b + a = 2(1-x) - (1-x)^4 \ . \end{gathered}$$

Af den første ligning fås

$$b = 2x - x^4 - x^2 \cdot a \ ,$$

som indsat i den anden giver

$$\begin{aligned} & (1-x)^2(2x - x^4 - x^2 a) + a = 2(1-x) - (1-x)^4 \\ \Leftrightarrow \quad & a(-x^2(1-x)^2 + 1) + (1-x)^2(2x - x^4) = 2(1-x) - (1-x)^4 \\ \Leftrightarrow \quad & a(1 - (x - x^2)^2) = 2(1-x) - (1-x)^4 - (1-x)^2(2x - x^4) \\ \Leftrightarrow \quad & a(1 - x^2 - x^4 + 2x^3) = (1-x)(-x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x + 1) \\ \Leftrightarrow \quad & a(x^4 - 2x^3 + x^2 - 1) = (1-x)(x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad a(x^4 - 2x^3 + x^2 - 1) = (1 - x)(x + 1)(x^4 - 2x^3 + x^2 - 1) \tag{8}$$
$$\Leftrightarrow \quad a = f(x) = 1 - x^2 \; .$$

Vi bemærker, at da
$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 1 = x^2(x^2 - 2x + 1) - 1 = x^2(x - 1)^2 - 1$$
kan vi i ovenstående regninger kun forkorte med denne størrelse, hvis den ikke er 0, dvs. vi må forudsætte, at
$$x^2(x - 1)^2 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(x - 1) \neq \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x \pm 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \; .$$

Hvis $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, er $1 - x = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ og
$$2x - x^4 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$$

Vi sætter
$$f\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = k_1 \; ,$$

hvor k_1 er et vilkårligt valgt reelt tal.

Vi får af funktionalligningen, at
$$\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot k_1 + f\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \tfrac{-5-\sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \tfrac{-5-\sqrt{5}}{2} - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot k_1 \; .$$

Altså er
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{for } \; x \neq \tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ k_1 & \text{for } \; x = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \tfrac{-5-\sqrt{5}}{2} - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2} k_1 & \text{for } \; x = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \; .$$

Besvarelser modtaget fra:

- Jens-Søren Andersen
- Roger Bengtsson
- Walther Janous
- Hans Mortensen
- Jan Erik Pedersen
- Palle Bak Petersen.