Bjørn Grøn

Euklids konstruktion af femkanten

Euklids konstruktion af femkanten

Et uddrag af sætninger fra Euklids *Elementer*, der fører frem til konstruktionen af den regulære femkant.

0. Forudsætninger, definitioner og notation

Elementerne består af 13 bøger, der i al korthed har følgende indhold:

Bog I:	Elementære konstruktioner	(»Trekantens geometri«)
Bog II:	Geometrisk Algebra	(»Firkantens geometri«)
Bog III:	Cirklens Geometri	
Bog IV:	Regulære Polygoner	(»Femkantens geometri«)
Bog V:	Størrelseslæren	(»Antikkens differential- og integralregning«)
Bog VI:	Ligedannethed	
Bog VII-IX:	Talteori	
Bog X:	Irrationale tal	(Bygger på Theaitetos' afhandling)
Bog XI:	Rumgeometri	
Bog XII:	Areal og Volumen	
Bog XIII:	Konstruktion af de 5 regulære polyedre	

Indholdsfortegnelsen giver et vist indtryk af, hvor omfattende et værk det er. Men det, som kom til at præge åndslivet siden, er <u>strukturen</u> i bøgerne. Euklid går frem på følgende måde:

Forrest er alle de *definitioner* (23 i alt), han får brug for i bog I. Den første definition i bogen er simpelthen: »1. Et punkt er det, som ikke kan deles.« Bang – hverken forord eller anden snak, men lige på.

Dernæst følger de *postulater* (aksiomer) (5 i alt), han mener, er nødvendige for denne geometri.

Og endelig sætter han nogle *almene aksiomer* op (5 i alt), som danner grundlag både for geometrien og for al anden matematik.

Den sidste gruppe giver en slags regler for, hvordan vi logisk argumenterer os frem.

Herefter klør han på med sætning efter sætning, hvor han skelner mellem *konstruktioner* – der afsluttes med »hvilket skulle gøres«, forkortet hsg – og *beviser* – der afsluttes med »hvilket skulle bevises«, forkortet hsb; den mere berømte latinske forkortelse qed, der står for »quod erat demonstrandum« anvendes stadig i mange matematikbøger.

<u>ØVELSE</u>

Prøv at overveje, hvor der er ligheder, og hvor der er forskelle mellem Euklids matematikbog og opbygningen af moderne matematikbøger.

EUKLIDS ELEMENTER*

BOG 1

Definitioner

1. Et punkt er det, der ikke kan deles.
2. En linie er en længde uden bredde.
3. En linies begrænsninger er punkter.
4. En ret linie er en linie, som ligger *lige* mellem punkterne på den.
5. En flade er det, der kun har en længde og en bredde.
6. En flades begrænsninger er linier.
7. En plan flade er en flade, som ligger *lige* mellem de rette linier i den.
8. En plan vinkel er hældningen mellem to linier, der ligger i samme plan, har et punkt fælles og ikke ligger på en ret linie.
9. Når de linier, der indeslutter vinkler, er rette, kaldes vinklen retliniet.
10. Når en ret linie er oprejst på en anden, så at de ved siden af hinanden liggende vinkler bliver lige store, er enhver af de lige store vinkler ret; og denne rette linie, der er oprejst på den anden, kaldes vinkelret på denne.
11. Em stump vinkel er en vinkel, som er større end en ret.
12. En spids vinkel er en vinkel, som er mindre end en ret.
13. En omkreds er begrænsningen af noget.
14. En figur er det, der indesluttes af en eller flere omkredse.
15. En cirkel er en plan figur, indesluttet af en sådan linie (som kaldes periferien), at alle de rette linier, der kan trækkes ud til den fra et inden for figuren liggende punkt, er indbyrdes lige store.
16. Dette punkt kaldes centrum i cirklen.
17. En diameter i cirklen er en ret linie, trykket gennem centrum og begrænset til begge sider af cirkelperiferien, og den halverer også cirklen.
18. En halvcirkel er en figur, som indesluttes af en diameter og den af diameteren afskårne periferi. Halvcirklens centrum er det samme som cirklens.
19. Retliniede figurer er sådanne, som indesluttes af rette linier: tresidede, som indesluttes af tre, firesidede af fire, flersidede af flere end fire rette linier.
20. Af tresidede figurer kaldes den, der har alle tre sider lige store, en ligesidet, den som kun har to sider lige store, en ligebenet, og den, som har alle tre sider ulige store, en skæv trekant.
21. Af tresidede figurer kaldes endvidere den, der har en ret vinkel, en retvinklet, den, der har en stump vinkel, en stumpvinklet, den, der har alle tre vinkler spidse, en spidsvinklet trekant.
22. Af firesidede figurer kaldes den, der både er ligesidet og retvinklet, et kvadrat, den, der er retvinklet, men ikke ligesidet, et rektangel, den, der er ligesidet, men ikke retvinklet, en rhombe, den, der både ar modstående sider og vinkler lige store, men hverken er ligesidet eller retvinklet, en rhomboide, de øvrige firesider kunne kaldes trapezer.
23. Parallelle linier er rette linier, der ligger i samme plan, og som, når de forlænges ubegrænset til begge sider, ikke mødes til nogen af siderne.

Forudsætninger

Lad det være forudsat:

1. At man kan trække en ret linie fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst andet punkt.
2. At man kan forlænge en begrænset linie i ret linie ud i eet.
3. At man kan tegne en cirkel med et hvilket som helst centrum og en hvilken som helst radius.
4. At alle rette vinkler er lige store.
5. At når en ret linie skærer to rette linier og de indvendige vinkler på samme side er mindre end to rette, så mødes de to linier, når de forlænges ubegrænset, på den side, hvor de to vinkler, der er mindre end de to rette, ligger.

Almindelige begreber

1. Størrelser, der er lige store med samme størrelse, er indbyrdes lige store.
2. Når lige store størrelser lægges til lige store størrelser, er summerne lige store.
3. Når lige store størrelser trækkes fra lige store størrelser, er resterne lige store.
4. Størrelser, der kan dække hverandre, er indbyrdes lige store.
5. Det hele er større end en del deraf.

Notation

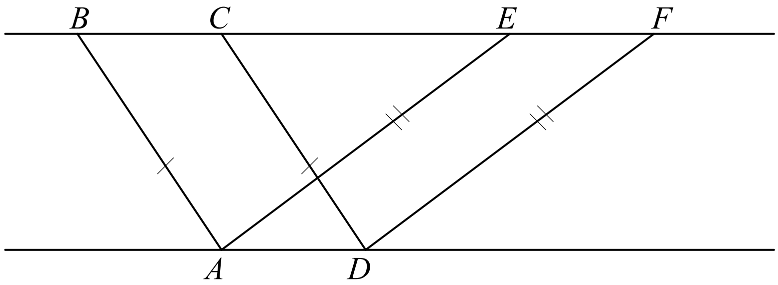
Der henvises til de 5 aksiomer (almindelige begreber) med a1 (aksiom 1), a2, a3, a4 og a5.
Der henvises til Euklids egne sætninger med f.eks. I, 35: Bog I, sætning 35.

1. Euklids bevis for Pythagoras' læresætning

SÆTNING 1 (I, 35)

Parallelogrammer på samme grundlinje mellem de samme paralleller er lige store.

FIGUR



BEVIS

Vi viser først, at trekant ABE og trekant CDF er kongruente:
$|AB| = |CD|$, da de er modstående sider i et parallelogram.

$|AE| = |DF|$, da de er modstående sider i et parallelogram.

Tilsvarende gælder, at $|BC| = |AD|$, og $|AD| = |EF|$, dvs. ifølge a1 er $|BC| = |EF|$.

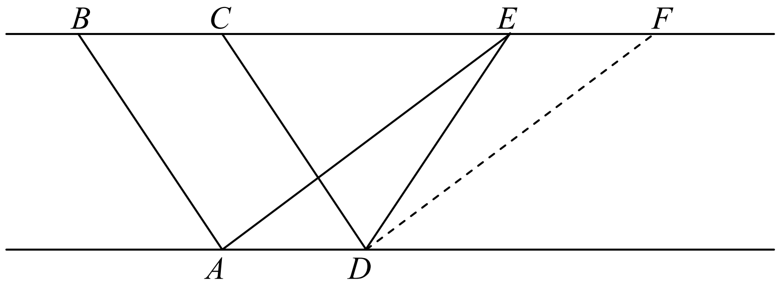
Af a2 følger så, at $|BC| + |CE| = |EF| + |CE|$, og hermed $|BE| = |CF|$ (se figur).

Da trekanterne ABE og CDF har tre sider parvis ens, er de kongruente (kan dække hinanden ved en flytning).
Vi ser på hele figuren $ABFD$. Fra denne figur fjernes først trekant ABE – herved fremkommer parallelogrammet $AEFD$. Fra $ABFD$ fjernes så trekant CDF – herved fremkommer parallelogrammet $ABCD$. Da vi har fjernet lige meget fra $ABFD$, er resterne lige store (a3), dvs. de to parallelogrammer er lige store, som vi ønskede at vise.

SÆTNING 2 (I, 41)

Når et parallelogram har samme grundlinje som en trekant og ligger mellem de samme paralleller, er parallelogrammet dobbelt så stort som trekanten.

FIGUR



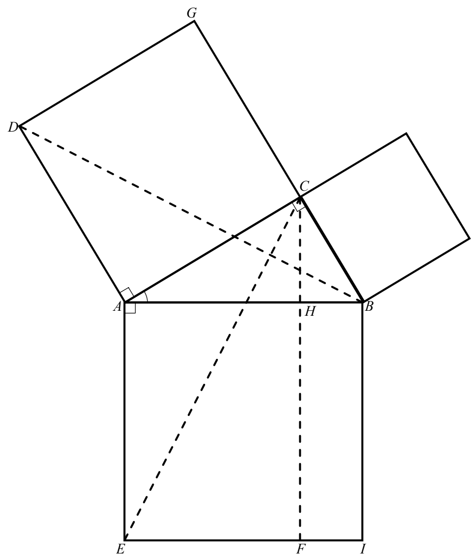
BEVIS

Vi tegner linjen gennem *D* parallel med *AE*, og punktet *F* fremkommer.
Fra sætning 1 har vi, at parallelogrammerne *ABCD* og *AEFD* er lige store, og da *AEFD* er dobbelt så stor som trekant *AED*, har vi det ønskede.

SÆTNING 3 (I, 47)

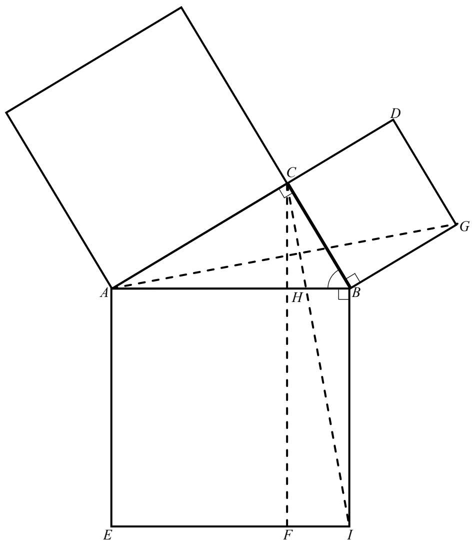
I en retvinklet trekant er kvadratet på den side, der ligger over for den rette vinkel, lig summen af kvadraterne på de sider, der indeslutter den rette vinkel.
Vi bemærker, at dette er Pythagoras' sætning!

FIGUR



BEVIS

Vi konstruerer først kvadrater på 3 sider (se figur). Herefter tegnes linjerne *EC*, *BD* og højden fra *C*, og punkterne *H* og *F* fremkommer. Vi indser først, at trekant *ABD* og trekant *ACE* er kongruente: $|AB| = |AE|$ og $|AD| = |AC|$ (siderne i samme kvadrat).
Vinkel *A* i de to trekanter er også ens, da de begge er en ret vinkel + vinkel *A* i trekant *ABC*.
Heraf følger så, at trekanterne er kongruente (to sider og en mellemliggende vinkel parvis ens).
Vi bemærker nu, at parallelogrammet *AHFE* og trekant *ACE* har samme grundlinje og ligger mellem de samme paralleller, altså er parallelogrammet dobbelt så stort som trekanten ifølge sætning 2. Det samme gælder om parallelogrammet *ACGD* og trekant *ABD*. Da trekant *ABD* og trekant *ACE* er kongruente, følger, at *AHFE* og *ADGC* er lige store, altså at rektanglet *AHFE* er lig kvadratet på *AC*. På samme måde kan vi vise, at rektanglet *HBIF* er lig kvadratet på *CB* (gør det selv ved at benytte nedenstående figur). Heraf følger så, at $AHFE + HBIF = |AC|^2 + |CB|^2$, og hermed er det ønskede da $AHFE + HBIF = |AB|^2$.



2. Euklids konstruktion af det gyldne snit

SÆTNING 4 (II, 6)

Når en ret linje er halveret, og en anden ret linje er afsat i forlængelse af den, så er det rektangel, der indesluttes af hele linjen og dens forlængelse, samt kvadratet på halvdelen, lig kvadratet på den rette linje, der er sammensat af halvdelen og forlængelsen.

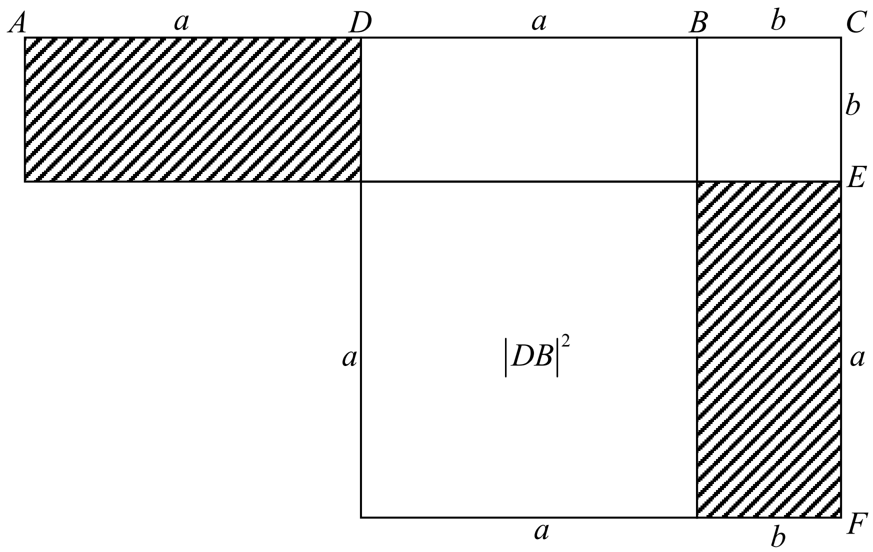
BEMÆRKNING

Dette er et eksempel på det, vi kalder geometrisk algebra, dvs. »en algebraisk sætning oversat til geometri«. Sætningen virker meget uigennemskuelig; men indholdet er det samme som det, vi kalder kvadratet på en toleddet størrelse:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Sætningen bliver brugt meget af Euklid i de næste sætninger, så det er en god idé at lære og forstå sætningens geometriske indhold.

FIGUR



BEVIS

Den givne rette linje er AB, og forlængelsen er BC, og AB halveres i D. CE er afsat lig BC, og CF er afsat lig DC. Sætningen siger nu, at rektanglet bestemt af siderne AC og CE samt kvadratet på DB er lig med kvadratet på DC. Ved at se på figuren ser vi, at dette er det samme som at indse, at de to skraverede rektangler er ens (prøv selv at vise det!).

Hvis vi sætter $|AD| = a$ og $|BC| = b$, bliver det algebraiske indhold af sætningen:

Rektanglet bestemt af AC og CE plus kvadratet på DB: $(2a+b)b + a^2 = 2ab + b^2 + a^2$.

Kvadratet på DC: $(a+b)^2$.

Altså siger sætningen: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Inden vi går videre med Euklids næste sætning (II, 11), lidt om »det gyldne snit«:

DEFINITION

Vi ser på et linjestykke AB. Linjestykket siges at være delt i det gyldne snit ved punktet H, hvis

$$\frac{|AB|}{|AH|} = \frac{|AH|}{|BH|}$$

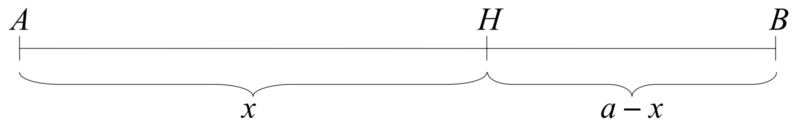
BEMÆRKNING

Vi ser, at dette er det samme som

$$|AH|^2 = |AB||AH| \qquad \text{(vi har ganget overkors),}$$

eller som Euklid ville sige: Kvadratet på AH er lig med rektanglet bestemt af AB og BH.

FIGUR



BEMÆRKNING

Hvis vi vil bestemme, hvor H skal ligge på linjestykket AB, kan vi gøre følgende:
Vi sætter $|AB| = a$ (kendt tal) og sætter det søgte linjestykke $|AH| = x$.
Hermed er $|BH| = a - x$. Vi får nu ved at indsætte disse størrelser i $|AH|^2 = |AB||AH|$:

$$x^2 = a(a - x) \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

Ved at løse denne andengradsligning, fås

$$x = \frac{-a + \sqrt{5a^2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

x kan således bestemmes, når vi kender a.

Vi skal nu se, hvordan Euklid konstruerer punktet H, altså det punkt, der deler AB i det gyldne snit.
Vi bemærker, at Euklid hermed faktisk har løst en andengradsligning geometrisk.
(Hverken Euklid eller andre græske matematikere anvendte begrebet »det gyldne snit«, selv om de med stor sandsynlighed kendte og værdsatte dets egenskaber. Begrebet dukker først op i renæssancen (nogle steder: »det guddommelige forhold«, andre steder: »den gyldne brøk«) for endelig at vinde fodfæste som et anerkendt begreb i det 19. århundrede).

SÆTNING 5 (II, 11)

At dele en given ret linje, således at det rektangel, der indesluttes af hele linjen, og det ene af stykkerne, er lig kvadratet på det andet stykke.

BEVIS

Vi betegner det givne linjestykke med *AB*. Vi skal så bestemme et punkt *H*, således at

$$|AH|^2 = |AB||AH|$$

Euklid går nu frem i følgende skridt (prøv selv at tegne figuren efterhånden):

1. Kvadratet *ABCD* konstrueres.
2. Siden *AD* halveres i punktet *E*.
3. *AD* forlænges ud over *A*.
4. Cirklen med centrum i *E* og radius *EB* tegnes. Denne cirkel skærer *AD*’s forlængelse i *F*.
5. Cirklen med centrum i *A* og radius *AF* tegnes. Denne cirkel skærer *AB* i det søgte punkt *H*.
6. Kvadratet *AFGH* tegnes.
7. Linjen gennem *G* og *H* skærer *DC* i *K*.

Euklid argumenterer nu på følgende måde (se også figur):
Vi ser, at *DA* er halveret i *E*, og *AF* er forlængelsen, dvs. ifølge sætning 4 gælder der, at

$|DF||AF| + |AE|^2 = |EF|^2$ da $|EF| = |EB|$, fås

$|DF||AF| + |AE|^2 = |EB|^2$ da trekant ABC er retvinklet, fås $|EB|^2 = |AB|^2 + |AE|^2$, som indsættes, og vi får

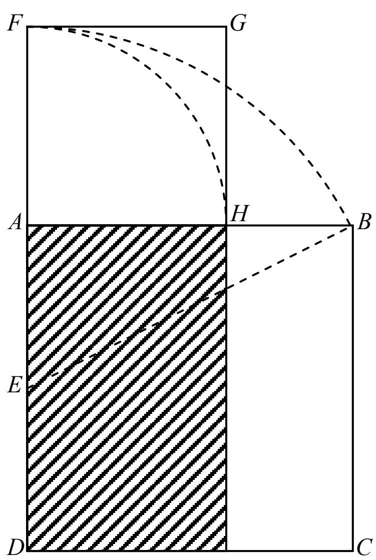
$|DF||AF| + |AE|^2 = |AB|^2 + |AE|^2$ Vi fjerner $|AE|^2$ fra begge sider og får

$|DF||AF| = |AB|^2$ da $|AF| = |FG|$, fås

$|DF||FG| = |AB|^2$

Vi får således, at rektanglet bestemt af siderne *DF* og *FG* er lig med kvadratet på *AB*. Euklid fjerner nu fra disse lige store figurer rektanglet bestemt af siderne *AD* og *AH* (se figur). Resterne bliver da henholdsvis kvadratet på *AH* og rektanglet bestemt af siderne *BC* og *BH*, altså gælder:

$|AH|^2 = |BC||HB|$, og da $|BC| = |AB|$, fås det ønskede: $|AH|^2 = |AB||HB|$.



3. Euklids sætninger om et punkts potens mht. en cirkel

SÆTNING 6 (III, 36)

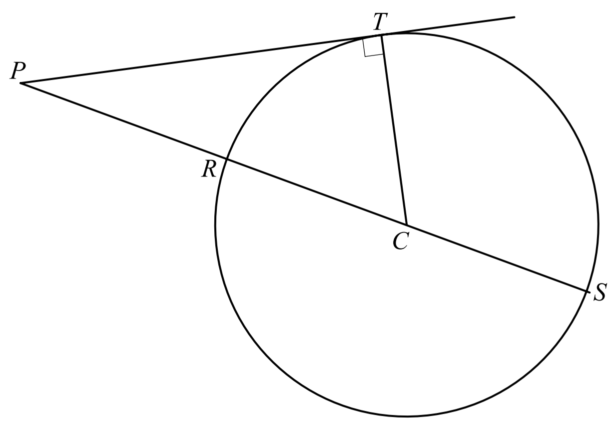
Hvis der fra et punkt uden for en cirkel tegnes en linje, der rører cirklen i et punkt *T* (dvs. linjen er tangent til cirklen i *T*), og en vilkårlig linje, der skærer cirklen i *R* og *S*, så gælder det altid, at

$$|PR||PS| = |PT|^2 .$$

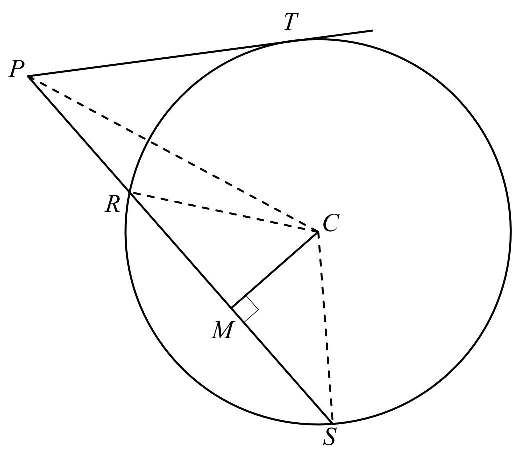
BEVIS

Euklid viser først sætningen, når linjen, der skærer cirklen i *R* og *S*, også går gennem cirklens centrum *C*. Herefter benytter Euklid dette bevis til at vise, at det også gælder for en vilkårlig linje.

FIGUR 1



FIGUR 2



Linjen fra *C* til *T* tegnes (står vinkelret på tangenten i *T*). Vi ser nu, at *RS* er halveret af *C*, og *PR* er forlængelsen. Af sætning 4 følger da, at

$\boxed{|PS||PR| + |RC|^2 = |PC|^2}$ da $|RC| = |TC|$ (radier i cirklen), fås

$|PS||PR| + |TC|^2 = |PC|^2$ og hermed

$|PS||PR| = |PC|^2 - |TC|^2$ og da trekant PTC er retvinklet, fås af Pythagoras $|PT|^2 + |TC|^2 = |PC|^2$ og hermed $|PT|^2 = |PC|^2 - |TC|^2$.

$|PS||PR| = |PT|^2$

Vi tegner linjerne *PC*, *RC*, *SC* og *CM*, hvor *M* er bestemt som midtpunkt af *RS*. Vi bemærker nu, at trekant *RCS* er ligebenet, dvs. medianen *CM* bliver også højde i trekanten, altså er trekanterne *RCM* og *PCM* retvinklede. Ved at benytte sætning 4 igen, fås

$|PS||PR| + |RM|^2 = |PM|^2$ ved at lægge $|CM|^2$ til på begge sider, fås

$|PS||PR| + |RM|^2 + |CM|^2 = |PM|^2 + |CM|^2$ ved at anvende Pythagoras på trekant RCM og PCM.

$|PS||PR| + |RC|^2 = |PC|^2$

Hermed er vi tilbage i tilfælde 1.

SÆTNING 7 (III, 37)

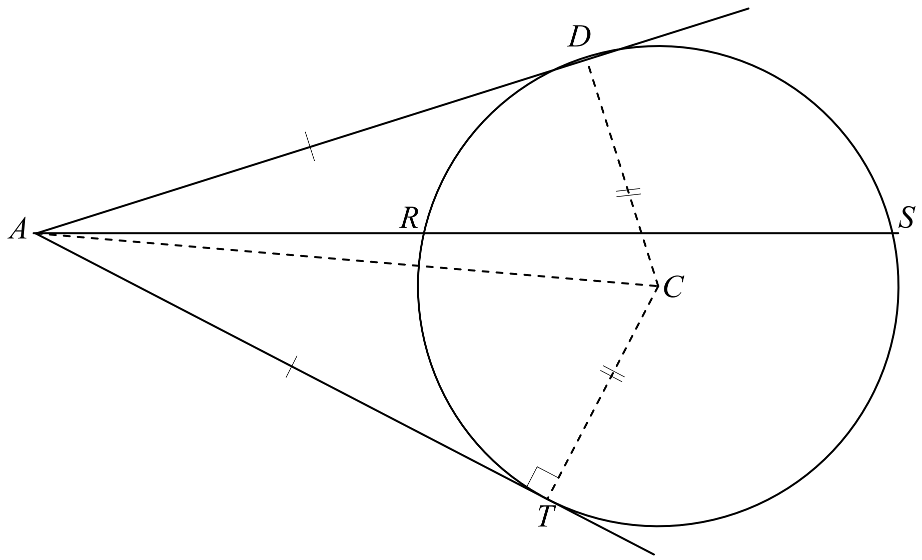
Hvis der fra et punkt *A* uden for en cirkel trækkes to linjer, hvor den ene skærer cirklen i punkterne *R* og *S*, og den anden har fællespunktet *D* med cirklen, og der yderligere gælder, at

$$|AR||AS| = |AD|^2,$$

da er linjen *AD* tangent til cirklen.

Vi bemærker, at dette er den »omvendte« sætning til sætning 6.

FIGUR



Vi tegner tangenten fra *A* til *T* (se figur) og får således, at

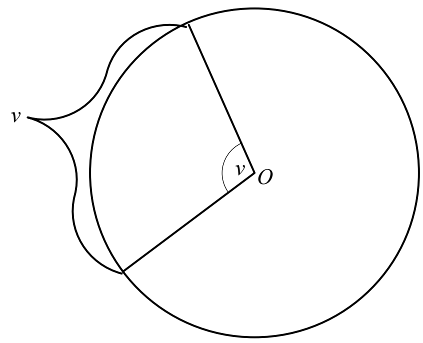
$$|AR||AS| = |AD|^2 \quad \text{(forudsætning)}$$
$$|AR||AS| = |AT|^2 \quad \text{(fra sætning 6).}$$

Af dette fås, at $|AD|^2 = |AT|^2$, og hermed at $|AD| = |AT|$.
Vi tegner nu linjerne *CD*, *CT* og *AC*. Trekanterne *ADC* og *ACT* er kongruente (tre sider parvis ens). Heraf følger, at vinkel *D* er ret, og linjen *AD* er således tangent til cirklen.

4. Centervinkel, periferivinkel og kordetangentvinkel

Vi tegner en cirkel med centrum i punktet O. En vinkel med toppunkt i O kaldes en centervinkel.

En centervinkel er lige så stor som den bue, den spænder over.



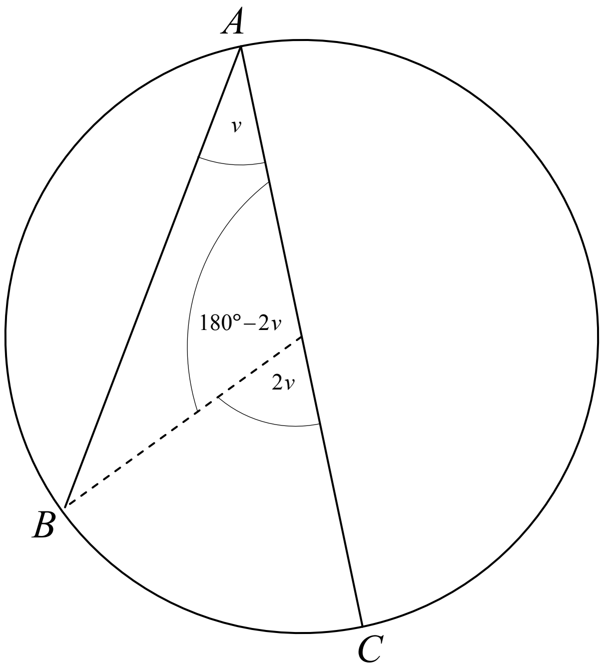
DEFINITION

En vinkel, der har toppunkt på cirkel periferien og begge ben som korder til cirklen, kaldes en periferivinkel.

SÆTNING 8

En periferivinkel er halvt så stor som den bue, den spænder over.

FIGUR



BEVIS

Beviset opdeles i tre dele:

1. Periferivinklen har et ben som diameter.
2. Periferivinklen har et ben på hver side af diameteren tegnet fra vinklens toppunkt.
3. Periferivinklen har begge ben på samme side af diameteren.

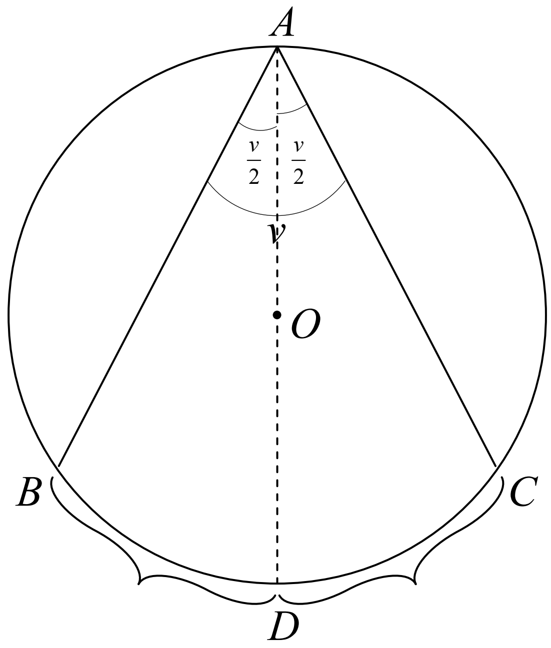
Det viser sig nu, at når 1 er vist, kan dette bruges til bevis for 2 og 3.

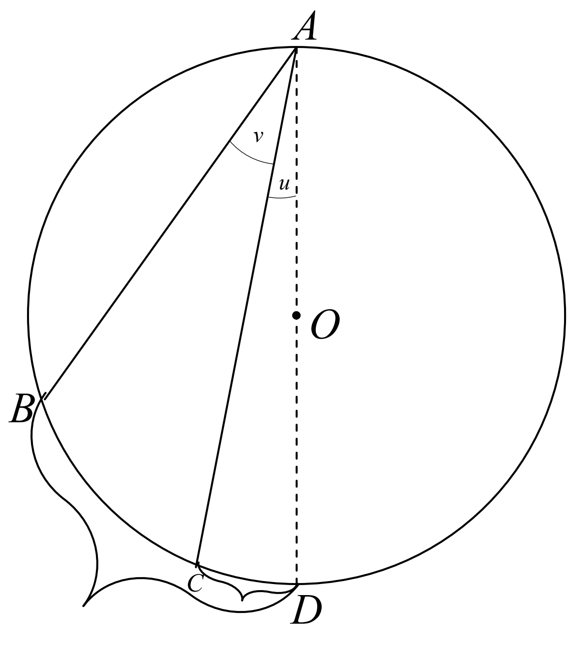
Bevis for 1:

Vi skal således vise, at buen *BC* er 2*v* (se figur).

a) Vi ser først, at trekant *OAB* er ligebenet, dvs. vinklerne ved grundlinjen er lige store (*v*).
b) Vinkel *O* er derfor 180° – 2*v*.
c) Altså er vinkel *O* i trekant *OBC* lig med 2*v*.
d) Hermed er buen *BC* = 2*v*, som vi skulle vise.

Bevis for 2 og 3: Benyt selv figurerne fra resultatet fra 1.





DEFINITION

Ved en kordetangentvinkel forstås en vinkel med toppunkt på cirkelperiferien, og hvis ene ben er en korde, mens det andet ben er en tangent til cirklen.

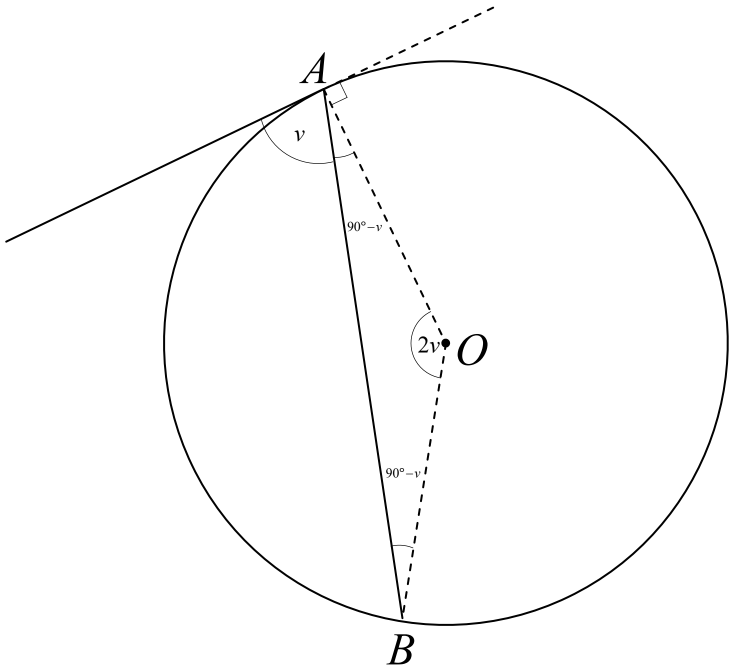
SÆTNING 9

En kordetangentvinkel er halvt så stor som den bue, benene spænder over.

BEVIS

Vi ser på figuren nedenfor og tegner linjen fra centrum O til vinklens toppunkt A. Da denne linje står vinkelret på tangenten i A, får vi, at vinkel A i trekant OAB bliver $90° - v$. Da trekant OAB også er ligebenet, bliver vinkel $O = 2v$, og hermed er sætningen bevist.

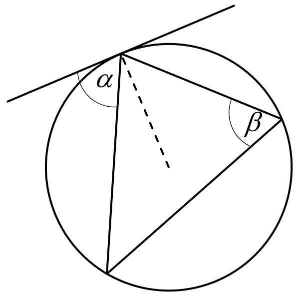
FIGUR



SÆTNING 10 (III, 32)

Kordetangentvinklen α er lig periferivinkel β, der indesluttes af den bue, der bestemmes af korden, og ligger til modsat side af α.

FIGUR



BEVIS

Da både periferivinklen og kordetangentvinklen er halvt så store, som den bue, de spænder over (som jo er den samme), er $\alpha = \beta$.

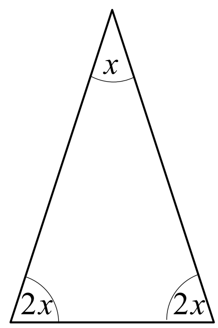
5. Euklids konstruktion af den regulære femkant

<u>SÆTNING 11 (IV, 10)</u>

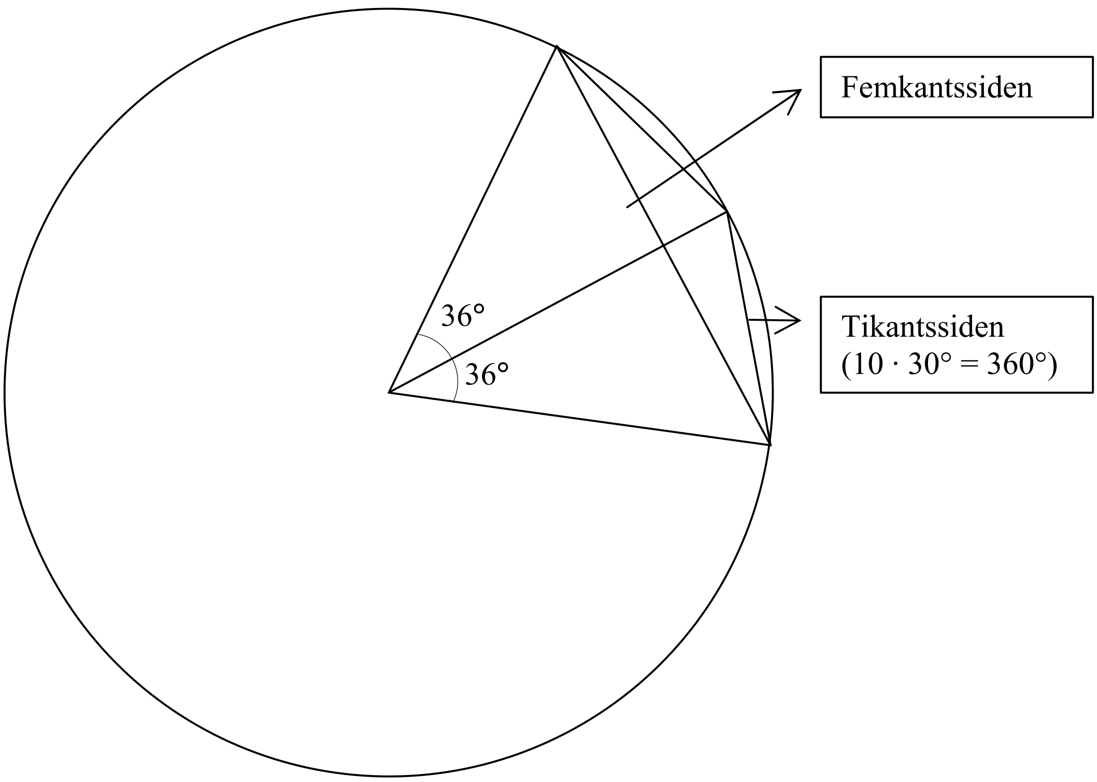
At konstruere en ligebenet trekant, hvori hver af vinklerne ved grundlinjen er dobbelt så store som topvinklen.

<u>BEMÆRKNING</u>

I en sådan trekant er vinklerne hhv. 36°, 72° og 72°, idet $x + 2x + 2x = 180°$, og hermed er $x = 36°$.



Vi bemærker også, at Euklid hermed kan konstruere den regulere tikant og hermed også den regulære femkant (se figur nedenfor).



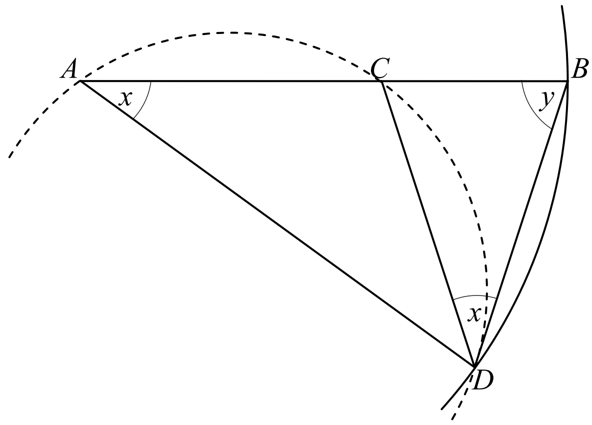
BEVIS

Euklid får frem i følgende skridt:

1. På det givne linjestykke AB konstrueres punktet C, så $|AB||CB| = |AC|^2$ (sætning 5).
2. Cirklen med centrum i A og diameter AB tegnes.
3. Korden BD konstrueres, så $|BD| = |AC|$.
4. Linjerne AD og AC tegnes.

Euklid viser nu, at trekant ABD har den ønskede egenskab. Trekanten er klart ligebenet, så vi skal blot vise, at $y = 2x$ (se figur nedenfor).

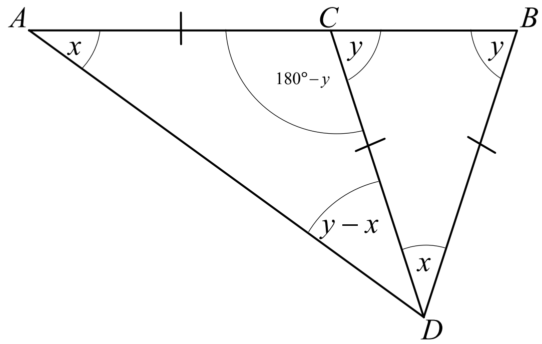
FIGUR



Euklid tegner nu trekant ACD's omskrevne cirkel og argumenterer på følgende måde:

Vi har, at $|AB||CB| = |AC|^2$ (sætning 5), og da $|AC| = |BD|$, fås, at $|AB||CB| = |BD|^2$.
Vi bemærker nu, at B er et punkt uden for trekant ACD's omskrevne cirkel, samt at vi har to linjer gennem B, som skærer cirklen (i C og A) og rører cirklen (i D). Af sætning 7 følger så, at BD er tangent til cirklen. Hermed er CDB en kordetangentvinkel, som spænder over samme bue som periferivinklen A. Af sætning 10 følger så, at $\measuredangle A = \measuredangle CDB = x$ (se figur).

For at indse, at $y = 2x$, laves en ny figur:



$\measuredangle ABD = y$, dvs. $\measuredangle ADC = y - x$

I trekant ACD har vå så. at

$x + y - x + \measuredangle C = 180° \Leftrightarrow$

$\measuredangle C = 180° - y$

Af denne figur fremgår, at i trekant BCD er vinklerne ved grundlinjen lige store, altså er $|CD| = |BD|$, og da $|AC| = |BD|$, er $|AC| = |CD|$, og trekant ACD er ligebenet. Altså er vinkel $D = x$ i trekant ACD, og trekant ABD har den ønskede egenskab.

6. Bilag om tangenter til cirkler

Man har ikke kunnet finde Euklids definition på, hvad han forstår ved en tangent til en cirkel; men af hans arbejde fremgår, at den må ligge tæt på følgende definition:

<u>DEFINITION</u>

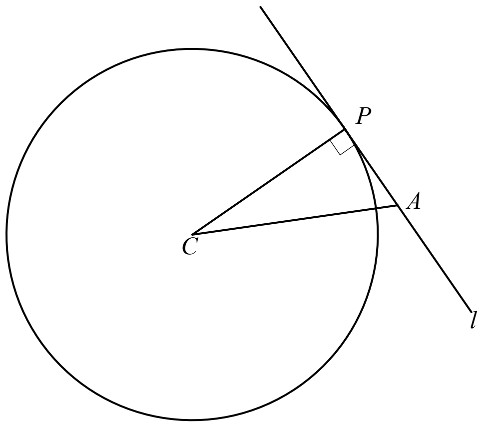
Lad *P* være et punkt på en cirkel. En ret linje *l* siges da at være tangent til cirklen i punktet *P*, hvis
1. Cirklen og *l* kun har punktet *P* til fælles.
2. Der ikke findes nogen ret linje gennem *P* mellem *l* og cirklen.

<u>SÆTNING 12</u>

Lad *P* være et punkt på cirklen med centrum i *C*. Den rette linje *l*, der går gennem *P*, og som står vinkelret på *CP*, er tangent til cirklen i *P*.

<u>BEVIS</u>

Vi gør først rede for, at *l* kun kan have punktet *P* fælles med cirklen. Lad *A* være et vilkårligt punkt på *l*. Vi ser så på trekant *CPA*, hvor vinkel *P* = 90°. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er vinkel *A* mindre end vinkel *P*. Euklid har i sætning I, 19 vist, at i enhver trekant ligger der over for en større vinkel en større side, dvs. at *CA* er større end *CP*. Da nu *CP* er cirklens radius, må *A* ligge uden for cirklen, og hermed har vi gjort rede for punkt 1.



For at vise punkt 2 antager vi, at der findes en linje *m* gennem *P* mellem *l* og cirklen (indirekte bevis). Vi tegner den vinkelrette fra centrum *C* ned på *m* (kaldes *A*). Vi ser på trekant *ACP*, og ved igen sætning I, 19, kan vi slutte, at *CA* er mindre end *CP* (radius), og hermed at *A* ligger inde i cirklen. Hermed har vi modstriden, altså kan der ikke ligge nogen linje mellem *l* og cirklen.