Bjørn Grøn

Analysens grundlag

Indholdsfortegnelse

1. Kontinuerte og differentiable funktioner

I gymnasiets matematikundervisning indføres differentialkvotienter normalt over to omgange. Først gives en *grafisk definition*: Funktionen f siges at være differentiabel i et x_0, hvis grafen har en tangent i punktet $(x_0, f(x_0))$. Og er dette tilfældet, så kaldes tangentens stigningstal for differentialkvotienten i x_0, og tallet betegnes $f\,'(x_0)$.

For funktioner, vi kender, volder denne definition ikke større problemer, men det står i starten ikke klart, *hvordan* vi afgør om grafen har en tangent.

Dernæst indføres den analytiske definition. Det sker normalt via en *analyse* af problemet, hvor vi betragter sekanter, der vandrer mod en tangent. Hvis f er differentiabel, *må* der gælde, at sekanternes stigningstal nærmer sig tangentens stigningstal. Sekanternes stigningstal beregnes af differenskvotienterne: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, så der *skal* altså gælde, at disse brøker nærmer sig tallet $f\,'(x_0)$, når x nærmer sig x_0.

Nu ved vi, hvad der *må* gælde, hvis f er differentiabel. Vi har brug for en definition, der giver os et entydigt svar på, om f er differentiabel, samt giver os mulighed for en helt præcis beregning af differentialkvotienter. Definitionen indføres i forlængelse af vor analyse:

DEFINITION

f siges at være differentiabel i x_0, hvis der gælder:
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ har en *grænseværdi*, når $x \to x_0$.
Er dette tilfældet, kaldes grænseværdien for differentialkvotienten, og vi skriver:
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f\,'(x_0)$ når $x \to x_0$.

Denne definition volder normalt betydeligt større vanskeligheder end den grafiske.

Det gælder først og fremmest begrebet *grænseværdi*. Der appelleres her stærkt til vores intuitive opfattelse af, hvad det vil sige at »x nærmer sig x_0«. x kommer aldrig helt ind til x_0, men afstanden ind til x_0 bliver dog mindre end en hvilken som helst størrelse. Det er ikke så ligetil at begribe sådan en proces, der åbenbart tænkes fortsat i det *uendelige*, så forskellen bliver *uendeligt lille* – men dog ikke 0.

Definitionen siger, at f er differentiabel i x_0, når denne proces: $x \to x_0$ bevirker, at brøkerne $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ rykker stadigt tættere på et bestemt tal. Og »stadigt tættere« betyder, at vi kan komme så tæt på, det ønskes, blot x'erne vælges tæt nok ved x_0.

I denne grænseovergang vil både brøkens tæller og nævner nærme sig 0. Den næste vanskelighed vedrører netop vurderingen af brøken. Vi kan ikke springe ud til grænsen x_0, for så står der 0 i nævneren. I grænseovergangen står der noget uendelig småt, både i tæller og i nævner. En sådan brøk kan ikke umiddelbart vurderes. Dertil kræves først en række, af og til regnetekniske, omskrivninger.

ØVELSE 1
Brøken $\frac{2x}{x}$ vil nærme sig 2, når $x \to x_0$.
Find tilsvarende brøker, der for $x \to x_0$ vil nærme sig 0, ½ og ∞.

Sådanne tekniske omskrivninger husker vi fra beviserne for, hvad differentialkvotienterne af x^2, $\sqrt{x}$ og $\frac{1}{x}$ er. Eller fra beviserne for regnereglerne for differentiation.

Overgangen fra den overvejende grafiske vurdering af differentialkvotienten til den analytiske definition med grænseværdibetragtninger tager i matematikundervisningen et par timer. I matematikhistorien tog det 150-200 år, før de største matematikere nåede til bunds i dette og fik skabt et solidt grundlag for den matematiske analyse. Det er derfor ikke overraskende, at vi indenfor differential- og integralregning hele tiden må vende tilbage og repetere: Hvad var det nu, vi forstod ved differentialkvotienten, helt præcist.

Arbejdet med at trænge til bunds tog i matematikhistorien sigte mod at få *bevist* nogle af de fundamentale sætninger om kontinuerte og differentiable funktioner. Det var sætninger, der forekom intuitivt indlysende, som f.eks. (formuleret med vore dages notation):

MONOTONISÆTNINGEN

Hvis f er differentiabel i et interval I, så gælder:

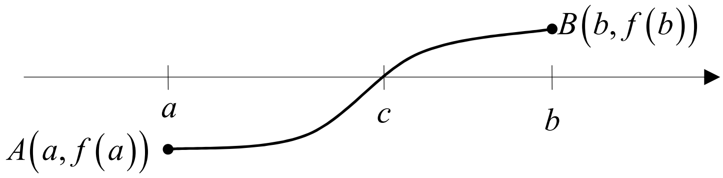
1. $f'(x) > 0$ for alle $x \in I \Rightarrow f$ er voksende i I
2. $f'(x) < 0$ for alle $x \in I \Rightarrow f$ er aftagende i I
3. $f'(x) = 0$ for alle $x \in I \Rightarrow f$ er konstant i I

Ud fra en grafisk betragtning er det klart, at hvis $f'(x)$ er 0 i et helt interval, dvs. hvis grafen har vandret tangent i *alle* punkter, så må grafen selv være en vandret linje, og funktionen må være konstant. Indlysende!

Men beviset herfor voldte store vanskeligheder. Efterhånden stod det klart for de store matematikere, at et bevis for monotonisætningen må bygge på to grundlæggende sætninger om kontinuerte funktioner, sætninger vi her kalder:

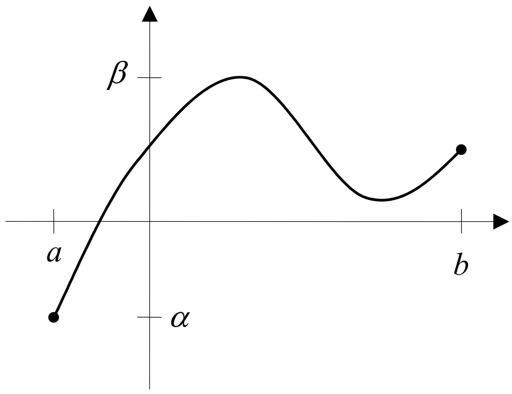
1. HOVEDSÆTNING OM KONTINUERTE FUNKTIONER

Hvis en funktion f er kontinuert i $[a;b]$, og f har modsat fortegn i de to endepunkter, så findes et tal $c \in]a;b[$, så $f(c) = 0$.



2. HOVEDSÆTNING OM KONTINUERTE FUNKTIONER

Hvis en funktion f er kontinuert på det lukkede og begrænsede interval $[a;b]$, så er værdimængden også et lukket og begrænset interval: $Vm(f) = [\alpha;\beta]$.
Specielt har f et maksimum og et minimum i intervallet.



Ved en grafisk betragtning forekommer disse sætninger indlysende. Og dog. Mens vi »tegner« et argument for 1. hovedsætning og lader en sammenhængende graf fra et punkt A til et punkt B *krydse* x-aksen, så opstår der måske en erindring om de problemer, der fik de gamle grækere til at forlade aritmetikken og gå over til geometrien: Hvorfra ved vi, at der er et tal på x-aksen, der hvor vi krydser den? Kunne det ikke tænkes, der var et hul, hvor vi lige kantede os igennem?

Det vil vi naturligvis afvise: x-aksen er sammenhængende, uden huller. Men hvad er det så for nogle tal, der ligger på x-aksen? Ved at zoome ind på et bestemt sted, bliver vi opmærksomme på, at der er andre tal end de rationale. De irrationale tal fylder tallinjen ud. Men hvad er så et irrationalt tal? Det er »uendelige ikke-periodiske decimalbrøker«. Igen støder vi på uendeligheden. Og det er dybest set ufatteligt: Her er tale om π, ikke med 10, 100 eller 1 milliard decimaler; for det er stadigvæk ikke π. Der skal være *uendeligt mange* decimaler med, før det er π.

Bestræbelsen på at få hold på kontinuitetssætningerne førte således matematikerne ned til det helt fundamentale spørgsmål: Har vi i det hele taget styr på, hvad de reelle tal er?

Først i slutningen af 1900-tallet når matematikerne frem til en så præcis beskrivelse af de reelle tal, at fundamentet for den matematiske analyse er i orden.

I 3. og 4. afsnit vil vi skridt for skridt arbejde os igennem beviserne for de omtalte sætninger og nå frem til en dybere forståelse for de reelle tals egenskaber. Men først en lille historisk udflugt.

2. Differential- og integralregningens udvikling

Matematikken udviklede sig eksplosivt, efter at Newton og Leibniz i slutningen af 1600-tallet havde åbnet portene til differential- og integralregningen. Det var et kæmpekontinent, der her var opdaget – det største indenfor hele matematikkens verden. Og i begejstring stormede matematikerne gennem det næste århundrede ind over det, mens de udviklede stadigt nye teknikker.

Hidtil var næsten al matematik bygget op over geometriske betragtninger: Matematikken var så at sige vokset frem af den klassiske græske geometri. Indenfor geometriens verden følte man sig på sikker grund, med dennes aksiomer og strenge krav til at være præcis i sine argumenter.

I aritmetikken – talbehandlingen – var man på mere usikker grund. I 1600-tallet var man stadig ikke fortrolig med negative tal! Når en andengradsligning havde en positiv og en negativ løsning kaldte man den sidste for en *falsk* eller en *umulig* løsning, og man så normalt bort fra sådanne. Dengang repræsenterede et tal altid noget virkeligt – længder, vægt, arealer, rumfang osv. Derfor var det naturligt at opløfte i tredje, svarende til rumfang, men suspekt at opløfte i fjerde, for hvad skulle det repræsentere? Irrationale tal optrådte, idet man uden betænkeligheder skrev kvadratroden eller den tredje rod af et tal. Allerede i 1500-tallet, hvor man fandt formlen for at løse en tredjegradsligning, var man imidlertid begyndt at fundere over, om man kunne tillægge kvadratroden af negative tal nogen mening. Det kunne man næppe, men ligesom med *falske* rødder opskrev man dem alligevel. Sådanne tal blev kaldt *indbildte* tal og repræsenterede de første skridt ind i de komplekse tals verden. Og dette sker som sagt, mens man stadig er usikker på, hvad et negativt tal er. I 4. afsnit vender vi tilbage til dette.

Geometriske betragtninger kom også til at præge differential- og integralregningen de første 150 år. Differentialkvotienter blev defineret som hældningskoefficienter for tangenter. En tangent er som bekendt graf for det approksimerende førstegradspolynomium, og man fandt tidligt ud af, at dette kunne generaliseres til approksimerende andengrads-, tredjegrads-, …, n'tegradspolynomium. Jo større grad, desto bedre tilnærmelse.

Hvorfor så ikke fortsætte i det uendelige? Det så ud til, at en funktion kunne skrives som *en uendelig sum af potenser* – en slags uendeligtgradspolynomium. Efterhånden lykkedes det at udtrykke flere og flere af de kendte funktioner på denne måde, f.eks.:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Ligesom en tangent ligger i et bestemt punkt, således er de approksimerende polynomier også bestemt ud fra et bestemt punkt. Det samme gælder de uendelige rækker, hvor ovenstående rækkeudviklinger af cos(x), sin(x) og e^x er foretaget i $x_0 = 0$.

Da det lykkedes at finde sådanne uendelige summer for flere og flere funktioner, når nogle af de største matematikere i 1700-tallet, som Euler og Lagrange, frem til den (fejlagtige) opfattelse, at dette gælder for *alle* funktioner. Men er dette tilfældet, kan man derved også helt slippe af med det mystiske grænseværdibegreb, ræsonnerer Lagrange, og han beslutter faktisk at *definere* differentialkvotienten som koefficienten til førstegradsleddet i den uendelige række hørende til funktionen. I ovenstående eksempler er således ifølge Lagrange: cos'(0) = 0, sin'(0) = 1, exp'(0) = 1.

De uendelige rækker konstrueres normalt ud fra den første, anden, tredje osv. afledede af funktionen, så det ser måske ud til, at Lagrange gik i ring. Men det er ikke tilfældet. For hvis den uendelige række *findes*, så kan vi jo lave definitionen som Lagrange gør. Dernæst kommer ganske vist spørgsmålet, om vi i praksis kan finde disse koefficienter, men det er et teknisk problem.

Euler er ikke helt så radikal. Han søger stadig at få hold på et grænseværdibegreb og indfører en slags uendeligt små størrelser, som han betegner med 0, og som han rask væk regner med; f.eks. lader han 0 indgå i brøker og forkorter det væk, hvor han kan. Og Euler når frem til så mange korrekte resultater, at det i sig selv var et argument for hans metode.

Omskrivning af funktioner til uendelige summer af potenser havde en række indlysende fordele. Matematikerne havde nemlig tidligt opdaget, at det er let at differentiere – hvad som helst kan vi klare – men det er svært at integrere. Potenser kan vi let finde stamfunktioner til, men komplicerede sammensatte udtryk må vi ofte give op over for. Hvis nu *alt* er summer af potenser, så kan vi vel bare finde stamfunktionen led for led, og på den måde integrere vilkårlige funktioner?

Se f.eks. på rækkerne for sin(x) og cos(x): Vi finder en stamfunktion til cos(x) led for led:

$$\int \cos(x)\ dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots\right) dx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots + k\,,$$

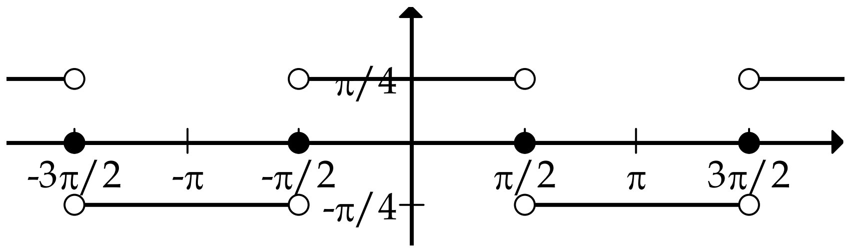
og det er netop sin(x) + k.

Metoden slog igennem og var i årtier den dominerende indenfor differential- og integralregningen. Den anvendtes også med succes til løsning af differentialligninger. Metodens gennemslagskraft skyldtes naturligvis først og fremmest, at den var effektiv. Men det talte også til dens fordel, at man undgik alle de mærkelige og løse ideer om grænseovergange – Eulers nuller f.eks.

Titlen på Lagranges værk var meget sigende: »Teorien om analytiske funktioner, indeholdende differentialregningens principper, renset for betragtninger om uendeligt små eller forsvindende størrelser, og for betragtninger om grænseværdier og fluxioner, og indskrænket til algebraisk analyse af endelige størrelser«[1].

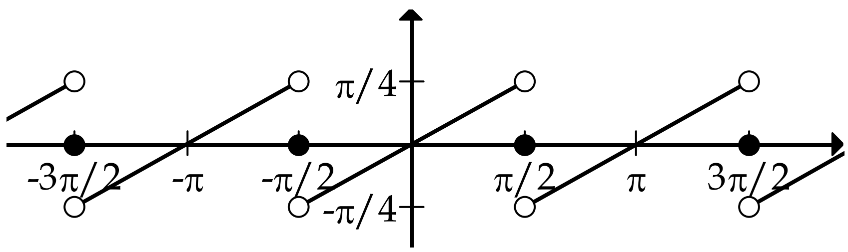
I begyndelsen af 1800-tallet opstår der imidlertid tvivl om gyldigheden af denne matematiske metode. Man opdager på den ene side funktioner, der ikke er specielt indviklede, men som ikke kan skrives som uendelige summer af potenser. Og på den anden side begynder man at betragte uendelige summer af andre størrelser end potenser, specielt uendelige summer af trigonometriske funktioner. Og her finder man besynderlige resultater: Summen:

$\cos(u)-\frac{1}{3}\cos(3u)+\frac{1}{5}\cos(5u)-\frac{1}{7}\cos(7u)+...$ giver en funktion med følgende graf:



Den kaldes *Fouriers firkantbølge*, opkaldet efter den matematiker, Joseph Fourier, der som den første undersøgte disse summer systematisk. Han fandt tilsvarende ud af, at den uendelige sum:

$\sin(u)-\frac{1}{2}\sin(u)+\frac{1}{3}\sin(u)-\frac{1}{4}\sin(u)+...$ giver den såkaldte »savtakfunktion« med følgende graf:



En sum af to kontinuerte funktioner giver naturligvis en kontinuert funktion. Tager vi flere og flere led med i summen gør det ingen forskel: Det er stadig en pæn kontinuert funktion. Og det uanset hvor mange millioner og milliarder led vi tog med. Det forekommer også indlysende, at når vi adderer grafer, der er sammenhængende, må vi som resultat få noget der igen er sammenhængende. Men hvad ser vi så her: Tager vi *alle* led med – dvs. uendeligt mange – så får vi en diskontinuert funktion. Der kommer et spring på grafen!

Dette var meget mærkelige resultater, og det tvang matematikerne til at revidere mange af deres hidtidige opfattelser. Fourier publicerede sine undersøgelser i 1822. Året før havde en af 1800-tallets største matematikere Augustin Cauchy udgivet et af sine hovedværker om den matematiske analyse – et værk, der genindfører grænseværdibetragtninger, og som er det første »moderne« værk om differential- og integralregningen. Men heri »beviser« Cauchy, at en uendelig sum af kontinuerte funktioner er kontinuert!

Det bliver dog ikke Fourier selv, der påpeger fejlen hos Cauchy. Fourier var først og fremmest interesseret i matematikkens anvendelser, og hans epokegørende værk med de mærkelig summer er slet ikke en matematikbog, men en fysikbog omhandlende varmeteori. Det er derimod den norske

[1] Fluxioner var Newtons første tilgang til uendeligt små størrelser.

matematiker Niels Henrik Abel[2], der få år senere gør opmærksom på fejlen hos Cauchy – og netop med »savtakfunktionen« som et modeksempel.

Så selv de største matematikere kan miste overblikket og begå fejl.

Cauchys store fortjeneste var genindførelsen af grænseværdibetragtninger. Hans grænseværdibegreb er stort set det, vi anvender i dag: *Hvis en række af tal* x_1, x_2, *…*, x_n *nærmer sig et fast tal* x_0, *på en sådan måde, at forskellen til sidst er så lille, som man har ønsket det, så kaldes* x_0 *for grænseværdien af de andre.* Sådan skrev Cauchy i 1821.

Ved hjælp af sit nye grænseværdibegreb definerede Cauchy kontinuitet og differentiabilitet. Cauchy er fra matematikkens hovedland Frankrig og derfor den, man lagde mærke til. Hans bøger blev anvendt over hele Europa. Men få år før definerede en tjekkisk matematiker, Bolzano, faktisk grænseværdier og kontinuitet på samme moderne måde som Cauchy. Bolzanos målsætning var at bevise den første hovedsætning om kontinuerte funktioner, og han nåede længere end andre på hans tid, men dog ikke til vejs ende. Han stødte panden mod den mur, der hedder *de reelle tals opbygning.* Hans værk fik ikke den betydning, det havde fortjent – i Tyskland og Frankrig blev Bolzano først kendt, efter han var død.

Det blev tyskeren Karl Weierstrass, der i 1860'erne fuldførte Cauchys værk og endelig fik skabt det moderne og præcise grænseværdibegreb. Den måde, hvorpå en matematiker i dag opskriver definitionen på kontinuitet, når han skal være helt præcis, er ord til andet taget fra Weierstrass[3].

Weierstrass' arbejde lagde også grunden til, at en af hans elever, Georg Cantor, sammen med Richard Dedekind i 1880'erne endelig fik hold på de reelle tals opbygning. Disse to tyske matematikere fordybede sig ikke mindst i de matematiske og filosofiske problemer omkring de reelle tal og uendelighedsbegrebet. De opdagede nemlig, at uendelighed ikke bare er uendelighed:

Allerede Galilei havde faktisk gjort opmærksom på det paradoks, at der i kraft af sammenparringen: 1–1, 2–4, 3–9, 4–16, …, n–n^2, tilsyneladende er lige mange naturlige tal og kvadrattal – selv om mængden af kvadrattal åbenlyst er en beskeden delmængde af de naturlige tal. Der er også i en vis forstand lige mange hele tal og rationale tal, idet samtlige brøker kan stilles op på række og tælles. Dette er lidt vanskeligere end Galileis sammenparring, men prøv selv, om du kan løse opgaven for de positive, rationale tal, ved at følge denne opskrift: Gruppér først alle brøkerne i halve, tredjedele, fjerdedele osv., og stil tallene i hver af disse grupper op i rækkefølge, f.eks. således: $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \ldots$ Placer alle disse (uendeligt mange) rækker under hinanden. Og find nu en snedig måde at tælle diagonalt, så du får alle med. Lykkes det, er *alle* brøkerne stillet op på række, og derved parret sammen med de naturlige tal.

Men de irrationale tal kan ikke stilles op i række: Der er langt flere irrationale end rationale tal. Der er altså forskellige grader af uendelighed. Det var en af Cantors store opdagelser.

Den moderne matematiske analyse tager sit udgangspunkt i det arbejde, som disse matematikere lavede for godt 100 år siden.

3. Hovedsætninger om differentiable funktioner

De sætninger, vi har vist, og metoder, vi har udviklet indenfor differential- og integralregningen og teorien for løsning af differentialligninger, bygger på monotonisætningen og på hovedsætningerne om kontinuerte funktioner. Og disse bygger igen på de reelle tals egenskaber.

Vores første etape vil være at få bevist monotonisætningen. Undervejs vises andre vigtige sætninger fra differentialregningen. Som forudsætning har vi således i dette afsnit:

[2] Abel er i matematikhistorien bl.a. kendt som den, der beviste, at der ikke kan findes en formel for løsning af femtegradsligninger (og heller ikke af nogen højere grad), som vi kender det fra andengradsligninger, og som der også findes for tredje- og fjerdegradsligninger.

[3] Weierstrass' teknik er gennemgået i appendiks 1.

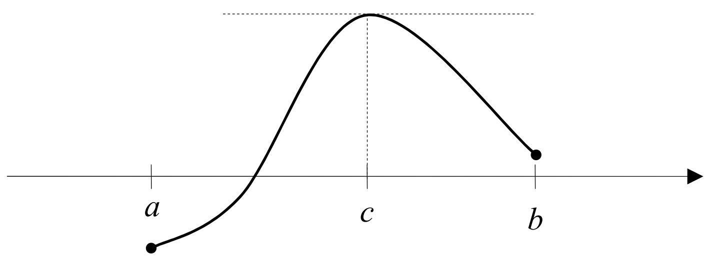
2. HOVEDSÆTNING OM KONTINUERTE FUNKTIONER

Hvis en funktion *f* er kontinuert på det lukkede og begrænsede interval $\left[a;b\right]$, så er værdimængden også et lukket og begrænset interval: $Vm\left(f\right)=\left[\alpha;\beta\right]$.
Specielt har *f* et maksimum og et minimum i intervallet.

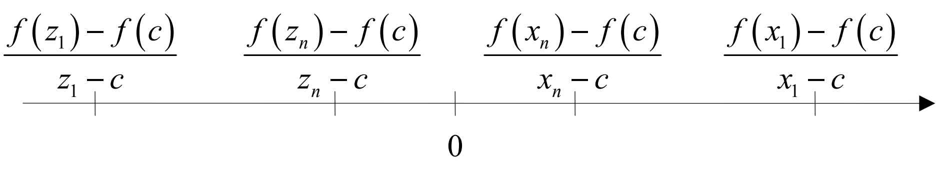
Først genopfrisker vi fra differentialregningen:

SÆTNING OM LOKALE EKSTREMA

Hvis *f* er differentiabel i et interval, og *f* har et lokalt ekstremum i et indre punkt *c*, så er $f'(c) = 0$.



Bevis: Lad os sige, at *c* er et maksimumspunkt (beviset går efter samme melodi for et minimumspunkt). At *f* har lokalt maksimum i *c* betyder, at der findes et interval om *c*, således at *f* i dette interval har størsteværdi i *c*, se tegningen.
f er differentiabel i *c*, dvs. $\dfrac{f\left(x\right)-f\left(c\right)}{x-c}\to f'\left(c\right)$ når $x\to c$.
Vælg nu en række *x*-værdier til *venstre* for *c*, så $x_1,x_2,x_3,...\to c$.
Se på fortegnet for sekanthældningerne (differenskvotienterne) $\dfrac{f\left(x_n\right)-f\left(c\right)}{x_n-c}$:
Da x_n ligger til venstre for *c*, er $x_n-c<0$.
Da $f(c)$ er størst, er $f\left(x_n\right)-f\left(c\right)\le 0$.
Dvs. for alle disse værdier er $\dfrac{f\left(x_n\right)-f\left(c\right)}{x_n-c}\ge 0$.
Vælg dernæst en række tal til *højre* for *c*, så: $z_1,z_2,z_3,...\to c$
Se på fortegnet for sekanthældningerne $\dfrac{f\left(z_n\right)-f\left(c\right)}{z_n-c}$, og argumenter for, at:
For alle disse værdier er $\dfrac{f\left(z_n\right)-f\left(c\right)}{z_n-c}\le 0$.
Betragt du tallinjen, og afsæt herpå alle disse sekanthældninger:



Når $x_n\to c$, og når $z_n\to c$, vil brøkerne nærme sig ét bestemt tal, nemlig $f'\left(c\right)$.
Det kommer fra definitionen på differentialkvotient.

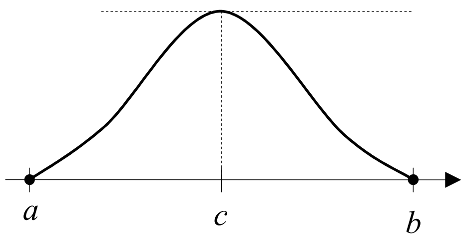
Men så kan $f'(c)$ *ikke være negativ*, for så ville brøkerne $\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}$ ikke kunne komme vilkårlig tæt på $f'(c)$. Tilsvarende kan $f'(c)$ ikke være positiv.
Konklusion: $f'(c)$ må være lig med 0.

Næste skridt frem mod monotonisætningen udgøres af to berømte sætninger fra differentialregningens historie, *Rolles sætning* og *Middelværdisætningen*. Middelværdisætningen er et stærkt redskab i teoretisk matematik, hvorimod den mere sjældent finder anvendelse til løsning af praktiske beregningsopgaver. Det skyldes, at sætningen har en anden karakter end vi er vant til: Det er en såkaldt *eksistenssætning*, der udtaler sig om, at der *findes* et tal, hvorom noget bestemt gælder; men sætningen siger ikke *hvilket* tal, eller noget som helst om, hvordan vi finder dette tal.
Rolles sætning, som vi først viser, er et specialtilfælde af Middelværdisætningen; men vi viser den først, fordi den kan anvendes til at give et grafisk set letforståeligt bevis for middelværdisætningen.

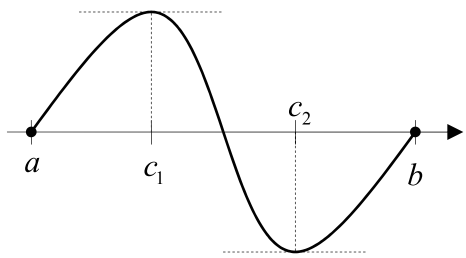
ROLLES SÆTNING[4]

Hvis f er differentiabel i intervallet $[a;b]$, og $f(a)=f(b)=0$, så findes et $c \in]a;b[$, hvor $f'(c)=0$.

Den grafiske situation kan være følgende:



eller



Bevis: Vi skelner mellem to tilfælde:

1. f er konstant lig med 0. Så er $f'(x) = 0$ for *alle* x, og sætningen er indlysende sand.

2. f er ikke konstant. Da f specielt er kontinuert, siger 2. hovedsætning om kontinuerte funktioner, at $Vm(f)$ er et lukket interval: $Vm(f)=[\alpha;\beta]$. α og β er henholdsvis minimum og maksimum, og mindst ét af dem er forskelligt fra 0; f.eks. $\beta \neq 0$.

Maksimum antages i et tal $c \in]a;b[$: $f(c)=\beta$. Tegn situationen!
Sætningen om lokale ekstrema siger da, at $f'(c) = 0$.
Men det var netop påstanden i Rolles sætning, som hermed er vist.

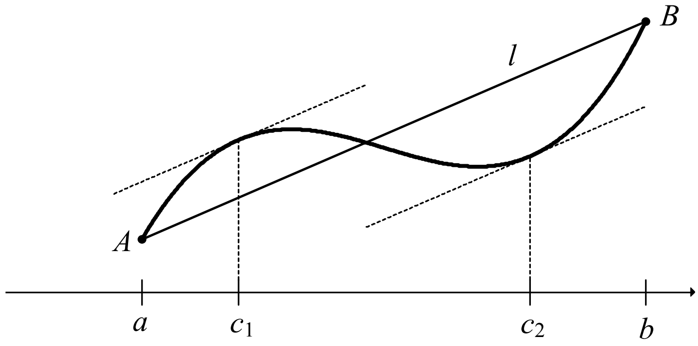
Ved hjælp af Rolles sætning vises nu:

[4] Sætningen optræder første gang i en bog, som den franske matematiker Michel Rolle udgav i 1691. Rolle beviste ikke sætningen, men formulerer den som et hjælpemiddel til at løse visse ligninger. Han er ikke kendt for andet i matematikhistorien.

MIDDELVÆRDISÆTNINGEN

Hvis f er differentiabel i $[a;b]$, så findes et tal $c \in]a;b[$, så $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Den grafiske situation kan være følgende:



Bemærk at $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ er hældningen på linjen l. Det er altså i en vis forstand den gennemsnitlige stigning, når vi går fra A til B. Deraf navnet Middelværdisætningen.

Bevis: Lad $l(x)$ være den lineære funktion, hvis graf er l.

Så er $l(a) = f(a)$ og $l(b) = f(b)$, og endvidere $l'(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ for alle x.

Vi danner nu en ny funktion g: $g(x) = f(x) - l(x)$

$g(x)$ opfylder betingelserne i Rolles sætning:

Den er differentiabel, og $g(a) = f(a) - l(a) = 0$, samt $g(b) = f(b) - l(b) = 0$.
Vi anvender Rolles sætning på g: Der findes et $c \in]a;b[$, så:

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - l'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = l'(c) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Overvej hvorfra vi fik den sidste identitet!
Denne sidste identitet var netop påstanden i Middelværdisætningen, som hermed er vist.
Bemærk at konstruktionen af g rent grafisk svarer til at vi drejer systemet med f og l ned, så A og B kommer til at ligge på x-aksen. Her anvendes Rolles sætning – der er en vandret tangent – og vi drejer så tilbage igen, og får en tangenthældning svarende til stigningstallet for l.

ØVELSE 1

a) Anvend Middelværdisætningen til at bevise *Integralregningens middelværdisætning*:

Hvis f er kontinuert i $[a;b]$, så findes et tal c, så:

$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$ eller skrevet på en anden måde: $\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\cdot(b-a)$

(Hjælp: Lad $F(x)$ være en stamfunktion til $f(x)$. Opskriv middelværdisætningen for $F(x)$ i intervallet $[a;b]$, og udnyt definitionen på det bestemte integral.)

b) Lav en tegning, hvor $f(x) > 0$ og giv en grafisk begrundelse for Integralregningens middelværdisætning.

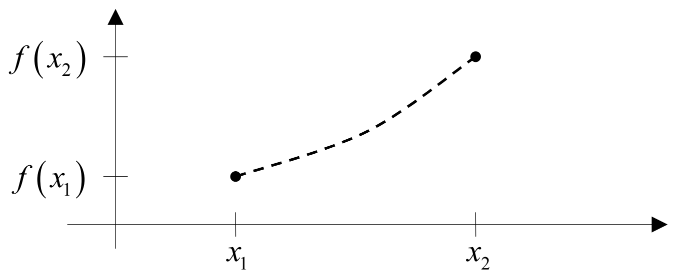
Vi har nu apparatet klar til at bevise:

MONOTONISÆTNINGEN

Hvis f er differentiabel i et interval I, så gælder:

1. $f'(x) > 0$ for alle $x \in I \Rightarrow f$ er voksende i I
2. $f'(x) < 0$ for alle $x \in I \Rightarrow f$ er aftagende i I
3. $f'(x) = 0$ for alle $x \in I \Rightarrow f$ er konstant i I

Bevis for 1: Vælg x_1 og x_2, så $x_1 < x_2$. Vi skal vise, at f er voksende, dvs. vise, at $f(x_2) > f(x_1)$:



Betragt nu f på intervallet $[x_1;x_2]$, og anvend Middelværdisætningen her:

Der findes et c mellem x_1 og x_2, så: $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Omskriv til: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2 - x_1)$

Se nu på *fortegnet* for højre side:
$f'(c) > 0$ ifølge antagelsen i 1.
$(x_2 - x_1) > 0$, idet tallene er valgt sådan.
Derfor er hele højre side positiv; men det betyder:
$f(x_2) - f(x_1) > 0$, eller med andre ord: $f(x_2)$ er større end $f(x_1)$.
Konklusion: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, eller: f er voksende.

ØVELSE 2

Gennemfør selv beviserne med de ændringer, der skal laves i punkt 2 og 3.

Opgaver til afsnit 3

1. Du er kørt i bil fra en by *A* til en by *B* 150 km borte. Turen tog i alt 2 timer. Argumemntér for, at uanset hvordan du kørte, så var farten mindst én gang under turen præcis 75 km/t.

2. To fly på ruten København – New York starter samtidig fra hver sin lufthavn. Turen for begge fly tog 7 timer. Vis, at de på et tidspunkt under flyveturen fløj med nøjagtig samme fart (bortset fra start- og sluthastigheden på 0 km/t).

3. Illustrer middelværdisætningen for $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$ i intervallet $[-2;2]$:
   a) Vis at påstanden i sætningen er følgende:
   Der findes et tal *c* i intervallet $[-2;2]$, så $f'(c) = 3$.
   b) Bestem det eller de tal c, hvor $f'(c) = 3$, og demonstrer derved, at sætningen er sand i dette tilfælde.

4. Illustrer middelværdisætningen for $f(x) = x^2$ i intervallet $[a;b]$:
   a) Vis at påstanden i sætningen er følgende:
   Der findes et tal c i intervallet $[a;b]$, så $f'(c) = \frac{b^2 - a^2}{b - a}$.
   b) Vis at dette svarer til ligningen: $f'(c) = a + b$.
   c) Bestem det tal *c*, der opfylder denne ligning, og vis at dette ligger i $[a;b]$.
   d) Illustrer resultatet grafisk.

5.
   a) Vis at såfremt *f* er differentiabel og har 4 forskellige nulpunkter i $[a;b]$, så har $f'(x)$ mindst 3 forskellige nulpunkter i samme interval.
   b) Generaliser påstanden i a) til situationen, hvor *f* har *n* forskellige nulpunkter i $[a;b]$.

6.
   a) Vis at såfremt *f* er to gange differentiabel i $[a;b]$, og *f* har tre forskellige nulpunkter, da har $f''(x)$ mindst ét nulpunkt i samme interval.
   b) Formuler selv, hvad der tilsvarende gælder om den tre gange afledede $f^{(3)}$, hvis *f* er tre gange differentiabel i $[a;b]$, og *f* har 4 nulpunkter i dette interval.
   c) Anvend ovenstående teknik til at argumentere for, at et *n*'tegradspolynomium højst har *n* forskellige rødder.

7.
   a) Vis at såfremt *f* og *g* er differentiable i $[a;b]$, $f(a) \le g(a)$, og $f'(x) \le g'(x)$ for $a < x < b$, så gælder, at $f(x) \le g(x)$ for alle $x \in [a;b]$.
   (Hjælp: Lav et indirekte bevis, dvs. antag der findes et x_0, hvor $f(x_0) > g(x_0)$, og udnyt så Middelværdisætningen).
   b) Vis tilsvarende: Hvis der yderligere gælder: $f'(x) < g'(x)$ for alle $x \in [a;b]$, så er også $f(x) < g(x)$ for alle $x \in [a;b]$.

8. Anvend resultaterne i opgave 7 til at vise følgende uligheder: $\sin(x) < x < \tan(x)$, for $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

9. Antag *f* er to gange differentiabel i intervallet $[a;b]$, og at $f''(x) > 0$ for alle *x* her.
   a) Vis at $f'(x)$ er voksende.
   b) Lad $p(x)$ være det approksimerende førstegradspolynomium i *a*.
   Vis at $p'(x) < f'(x)$ for alle $x \in]a;b]$.
   c) Udnyt resultatet i opgave 7 til at vise: I intervallet $]a;b]$ ligger grafen for *f* helt over tangenten til grafen i punktet $(a, f(a))$.
   (Hjælp: Lav en tegning, der illustrerer situationen.)
   En funktion med egenskaben $f''(x) > 0$ eller $f''(x) < 0$ kaldes for konveks i det pågældende interval. Vi skelner mellem de to typer ved at tale om, at grafen for en funktion med egenskaben $f''(x) > 0$ er opad hul, og grafen for en funktion med egenskaben $f''(x) < 0$ kaldes nedad hul.

10. Formuler og vis en tilsvarende sætning som i opgave 9c gældende for funktioner, hvis grafer er nedad hule, dvs. funktioner, der er to gange differentiable, og hvor der gælder, at $f''(x) < 0$ for alle $x \in]a;b]$.

11. Udnyt opgave 9 og 10 til at vise følgende:
    Hvis f er to gange differentiabel, og der gælder $f''(a) = 0$ samt $f''(x) > 0$ når $x > a$, og $f''(x) < 0$ når $x < a$ (dvs. fortegnslinjen for $f''(x)$ er: – 0 +), så vil grafen for *f* ligge *under* tangenten i $(a, f(a))$, når vi befinder os til venstre for *a* (når $x < a$), og *over* tangenten, når vi befinder os til højre for *a* (når $x > a$).
    En sådan tangent kaldes derfor en skrå vendetangent.

12. Vis at $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ har en skrå og en vandret vendetangent.

13. Antag at *f* er to gange differentiabel og at $f''(x) > 0$ i $]a;b[$. Lad *l* være sekanten fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$. Vis at grafen for *f* ligger *helt under l* i hele $]a;b[$.
    (Hjælp: Lav et indirekte bevis: Antag der findes et x_0 hvor $f(x_0)$ ligger på eller over *l*. Anvend Middelværdisætningen på henholdsvis $[a;x_0]$ og $[x_0;b]$ og få en modstrid med, hvad du ved om $f'(x)$.)

14. Anvend resultatet i opgave 13 til at vise følgende:
    Hvis *f* er to gange differentiable, og $f''(x) > 0$ i $]a;b[$, så er $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.
    (Dette er første udgave af Jensens ulighed – en af de få berømte sætninger i matematikhistorien opkaldt efter en dansk matematiker).

15. Vis *Den generaliserede middelværdisætning*:
    Hvis *f* og *g* er differentiable i intervallet $I = [a;b]$, og $g'(x) \neq 0$ i *I*, så findes et tal *c* i *I*, så:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(Hjælp: Argumenter først ved hjælp af middelværdisætningen for, at $g(b)-g(a)\neq 0$. Betragt dernæst funktionen $h(x)=\left(f(b)-f(a)\right)\cdot g(x)-\left(g(b)-g(a)\right)\cdot f(x)$, og vis $h(b)-h(a)=0$. Anvend så endelig middelværdisætningen på $h(x)$.)

16. Vis ved hjælp af resultatet i opgave 15, Den generaliserede middelværdisætning, følgende vigtige sætning til vurdering af grænseværdier (sætningen kaldes l'Hôpital's regel, opkaldt efter en rig fransk adelsmand, der købte sætningen af en knap så rig, men meget dygtig matematiker): Hvis *f* og *g* begge har grænseværdien 0 for $x\to a$, hvis $g(x)$ og $g'(x)\neq 0$, når $x\neq a$, og hvis $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to L$, når $x\to a$, så gælder også, at $\frac{f(x)}{g(x)}\to L$, når $x\to a$.

    Sætningen gælder også, hvis vi indskrænker os til at se på grænseværdier fra højre eller venstre. (Hjælp: Hvis *f* og *g* ikke er kontinuerte i *a*, så lav *en kontinuert udvidelse* af dem, dvs. definér funktioner *F*(*x*) og *G*(*x*), der er lig med henholdsvis *f* og *g* når $x\neq a$, og som begge er 0 i *a*. Vælg dernæst et $x\neq a$, og vis ud fra Den generaliserede middelværdisætning, at der findes et *c* mellem *a* og *x*, så:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

    Foretag nu grænseovergangen $x\to a$ og konkludér ud fra ovenstående ligning.)

17. Anvend opgave 16 til at finde følgende:

    a) grænseværdien af $\frac{\sin(t)}{t}$, for $t\to 0$

    b) grænseværdien af $\frac{x^4+3x^3-2x}{4x^2+5x}$, for $t\to 0$

    c) grænseværdien af $\frac{\ln(x)}{x^2-1}$, for $x\to 1$

    d) grænseværdien af $\frac{\sin^2(t)}{t-\pi}$, for $t\to \pi$

    e) grænseværdien af $\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}$, for $x\to 0$

    (For e: sæt på fælles brøkstreg, og udnyt reglen to gange.)

18. Den centrale sætning om stamfunktioner siger: Hvis f er kontinuert med stamfunktionen F, så kan enhver anden stamfunktion til f skrives på formen: $F(x) + k$, hvor k er en konstant. Find beviset for denne sætning, og gør rede for, hvor præcis det er, vi anvender monotonisætningen.
19. En opgave indeholder følgende delspørgsmål: Bestem monotoniforhold for $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x-6}$.

    Gør rede for, hvor præcis det er, vi anvender monotonisætningen, og hvor vi anvender den første hovedsætning om kontinuerte funktioner.

20. Anvend monotonisætningen til at bevise følgende formler:

    $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ $\qquad\qquad$ $\ln\left(x^r\right) = r \cdot \ln(x)$

    (Bemærk: Du må ikke anvende regnereglerne for logaritmefunktionerne; det er jo dem, vi er i færd med at vise. Du må derimod anvende, at $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, og at $\ln(1) = 0$.)

    (Hjælp: Betragt funktionen $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)$.)

21. Anvend monotonisætningen til at vise: $e^x > 1 + x$, for $x \neq 0$.
    (Hjælp: Opdel i to tilfælde: $x < 0$ og $x > 0$, og betragt funktionen $f(x) = e^x - (1+x)$.
    Alternativt bevis: Udnyt resultatet i opgave 7.)

22.
    a) Anvend monotonisætningen og resultatet i opgave 21 til at vise:
    $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, når $x > 0$.
    b) Anvend monotonisætningen og resultatet ovenfor til at vise:
    $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!}$, når $x > 0$.
    c) Generaliser resultatet ovenfor og vis:
    $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$, når $x > 0$.

4. De reelle tal (1. del)

Tallenes historie er næsten lige så gammel som det moderne menneskes. Vi kan spore vore direkte forfædre 30.000 år tilbage. Da Cro Magnon menneskene blev i Europa, mens isen rykkede ned over kontinentet, bosatte de sig i store huler i det nuværende Frankrig, Spanien Tjekkiet og andre steder. I en hule i Tjekkiet har man fundet en ulveknogle, hvori der tydeligt er ridset en række streger i bundter på 5 af gangen, ca. 30 i alt. Disse mennesker har haft et talsystem, der er mere avanceret end »en, to, mange«. Det har åbenbart været et 5-tals- eller et 10-talsystem (eller evt. et 20-talsystem), og de har måske haft talord op til 30 eller længere. Det sidste kan vi nu ikke konkludere ud fra tællemærkerne – man kan sagtens tælle i bundter på 5 uden at have egentlige talord.

Disse første tal, som vi bruger til at tælle med, kalder matematikerne for »de naturlige tal«. De betegnes $\mathbb{N}$*:*

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots\}$$

Tallet 0 er ikke med. Det er svært at finde en »naturlig« repræsentant for 0. I skriftsproget optræder det først som et fravær, noget der ikke var der, en *tom* plads. Først flere hundrede år e.Kr. dukker i

Indien et symbol for nul op. Og det tog lang tid, før det blev accepteret på lige fod med andre hele tal – romertallene, der blev brugt til beregninger helt op i 16-1700 tallet, indeholder som bekendt ikke et nul.

Heller ikke de negative tal kan findes i naturen. Det er meningsløst at sige, at man så –7 ænder. Negative tal fremkommer ved, at menneskene har lavet nogle beregninger – og således opstod de da også sammen med bogholderiet omkring 1200-tallet i Norditalien. Først som »røde tal«, dvs. tal skrevet med en anden farve; efter nogle hundrede år vinder minustegnet efterhånden frem[5].

Matematisk defineres 0 og de negative tal ud fra kravet om at ligningen $a + x = b$ skal have løsninger for ethvert naturligt tal a og b. De hele tal betegnes med $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Brøkerne har derimod en længere historie, og er da også lette at få øje på i naturen. Hos de gamle ægyptere var brøkregning en af de vigtigste discipliner at lære for embedsmændene. Og det var bestemt ikke let – de havde ikke vores talsystem, og kendte således heller ikke vores simple divisionsmetode til at omskrive brøker til decimaltal.

Matematisk indføres brøkerne (de rationale tal) ud fra kravet om, at ligningen $a \cdot x = b$ skal have en løsning for alle hele tal a og b, hvor $a \neq 0$. De rationale tal betegnes $\mathbb{Q}$.

Der var mange vanskeligheder at overvinde, før man kunne tage næste store skridt og indføre de reelle tal. Før man kan give en præcis definition, må der gå en periode, hvor man arbejder med disse tal, vænner sig til dem, og får en fornemmelse for de særlige egenskaber, der karakteriserer de reelle tal. Men hvordan vænne sig til noget, man ikke kan skrive? De irrationale tal er jo kort fortalt de uendelige ikke-periodiske decimalbrøker.

Vi er så vant til at bruge decimalbrøker, at vi har svært ved at forestille os et samfund, hvor man nok har tal, og regner med brøker, men ikke kender decimalbrøker. Det er imidlertid ikke så længe siden, de blev indført – vi kan faktisk sætte årstal på: I 1585 skriver den hollandske matematiker Simon Stevin den bog, der introducerer decimalbrøkerne i Europa, og viser, hvor enkelt det er at regne med disse. Det var en lille tynd bog, med undertitlen: »Undervisning i, hvorledes alle beregninger, man møder i forretningslivet kan udføres ved hjælp af hele tal, helt uden brug af brøker«. Stevin anvendte endnu ikke kommaet – det er en ret ny opfindelse – men angav i stedet ved små mærker, hvilken plads »efter kommaet« et ciffer stod på: 2,34 skrev han som $2\ 3^{(1)}\ 4^{(2)}$.

I løbet af få år var bogen blevet oversat til fransk, engelsk og andre europæiske sprog, og kendt i det meste af Europa. *Før* skulle man nærmest have en universitetsuddannelse for at kunne gange og dividere. Stevin lærte almindelige mennesker at *regne*, efter nogenlunde samme metode, som vi i dag bruger, når vi udregner gange- og divisionsstykker i hånden.

Med decimalbrøkerne tager Stevin selv allerede det næste skridt: Der er ingen objektive grænser for, hvor *nøjagtigt* vi kan måle, veje osv. Der kan altid føjes et nyt ciffer på. Da koordinatsystemet blev indført midt i 1600-tallet lå det ligefor at identificere tal med punkter på linjen, bestemt ud fra afstanden til begyndelsespunktet.

Decimalbrøkerne var det første stykke værktøj, matematikerne måtte have for at kunne begribe, hvad et irrationalt tal er. Men det er ikke nok, for selv om man kunne *tænke* på en uendelig ikke-periodisk decimalbrøk, så kan man jo ikke *skrive* en sådan. Det problem blev løst næsten samtidig med, at Stevin indførte decimalbrøkerne.

Den franske matematiker Viète får den enkle tanke, at når vi ikke kan skrive en uendelig decimalbrøk, som $\sqrt{2}$ eller π, så kan vi i stedet give tallet et *navn*, a, b eller netop som vi skriver i dag:

---

[5] Descartes, der indfører koordinatsystemet midt i 1600-tallet, er stadig usikker på de negative tals status. Hvor vi placerer koordinatsystemets centrum (kaldet *Origo*), dvs. punktet med koordinaterne (0,0) midt på papiret, der placerede Descartes det i nederste venstre hjørne. Og selv i vore dage findes usikkerheden – gennem folkeskoleundervisningen lærer mange elever stadig at placere centrum som Descartes gjorde.

$\sqrt{2}$ og π. Og derefter lade tallet indgå i beregninger med sit navn! Viète er den første, der begynder at indføre den moderne notation, hvor vi betegner tal med bogstaver. Viète foreslog at betegne ukendte størrelser med vokaler, kendte størrelser med konsonanter. Et halvt århundrede senere ændrer Descartes dette til vort nuværende system: Bogstaver først i alfabetet betegner fastlagte størrelser (konstanter), og bogstaver sidst i alfabetet betegner »ukendte« størrelser (variable).

Med Viètes og Stevins nye ideer havde matematikerne værktøjet, men man kom til at vente længe på den præcise definition af, hvad et irrationalt tal er.

Dette vil vi i det følgende nærme os gennem en række øvelser, hvor vi i starten tillader os at regne med uendelige decimalbrøker, uden at se noget problem i det.

EKSEMPEL 1

Omskrevet til decimalbrøk får vi følgende:

$\frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3}$, hvor stregen over 3 betyder, at 3 gentages »i det uendelige«.

I det sidste tilfælde siger vi også, at tallet er periodisk med perioden 1.

Tilsvarende: $\frac{2}{11} = 0,181818... = 0,\overline{18}$. Tallet er periodisk med perioden 2.

ØVELSE 1

Omskriv tilsvarende:

$\frac{10}{11} =$

$\frac{7}{5} =$

$\frac{5}{7} =$

Udregnes den sidste på lommeregner, får vi: 0,7142857143.
Hvorfra ved vi, at der er en periode, som fortsætter?

ØVELSE 2

Omskriv: $\frac{4}{17} =$

Lommeregneren kan ikke hjælpe dig her. Du må i gang med papir og blyant. Overvej nøje følgende: Hvornår kan vi være sikre på, at vi »starter forfra«, dvs. at vi har fundet perioden?

Argumenter herefter selv for følgende:

<u>SÆTNING 1</u>

Enhver brøk $\frac{p}{q}$, hvor $p,q \in \mathbb{Z}$, kan skrives som en *endelig* eller en uendelig og *periodisk* decimalbrøk.

<u>EKSEMPEL 2</u>

Endelige decimalbrøker omskrives let til brøker. Eksempelvis er: $0,237 = \frac{237}{1000}$.

I virkeligheden har vi lavet følgende regnestykke: $x = 0,237 \Leftrightarrow 1000x = 237 \Leftrightarrow x = \frac{237}{1000}$.

Samme tankegang kan vi anvende til omskrivning af uendelige, periodiske decimalbrøker:

$$\begin{array}{rrcl} & 1000x & = & 573{,}7373\ldots \\ - & 10x & = & 5{,}7373\ldots \\ \hline & 990x & = & 568 \end{array}$$

Dvs. $x = \frac{568}{990}$

<u>ØVELSE 3</u>

Omskriv efter samme idé tallene:

a) $x = 0{,}234234\ldots$
b) $x = 8{,}7565656\ldots$
c) $x = 52{,}321111\ldots$

Argumenter nu for følgende:

<u>SÆTNING 2</u>

Enhver endelig eller uendelig og periodisk decimalbrøk kan omskrives til en almindelig brøk, med hele tal i tæller og nævner.

Da vi nu har set, at de rationale tal (brøkerne) præcis er de *endelige* eller *uendelige og periodiske decimalbrøker*, så har vi samtidig analyseret os frem til en karakteristik af de øvrige, irrationale tal: Dette må være tal, der skrives som uendelige, *ikke-periodiske* decimalbrøker.

Tænker vi lidt dybere over dette, rejser der sig en række spørgsmål. Findes der overhovedet irrationale tal? Hvis der gør, findes der så metoder til at afgøre om et tal er irrationalt? Hvad skal vi forstå ved en *uendelig* decimalbrøk? Og specielt: Er et tal som π irrationalt?

<u>ØVELSE 4</u> (Der findes irrationale tal!)

Selv om vi endnu ikke har forklaret, hvad en *uendelig* decimalbrøk er, vil vi fortsat appellere til intuitionen og regne videre. Et irrationalt tal er en uendelig decimalbrøk:

$0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots,$

hvor der ikke findes nogen periode efter hvilken a'erne gentages. Kan vi da angive et *system*, efter hvilket det er indlysende, hvorledes a'erne fortsætter, og samtidig klart at, der ikke kommer nogen periode? Det kan vi sagtens, for systematik behøver jo ikke være gentagelse: Det mest systematiske er vel næsten de naturlige tal: $1,2,3,4,\ldots$ De fortsætter og fortsætter – men skriv så denne række uden komma imellem:

0,1234567891011121314...

Det må være et irrationalt tal.

Prøv nu selv at finde andre irrationale tal, konstrueret efter samme idé om et system, der ikke rummer gentagelser.

<u>ØVELSE 5</u>

Vis at $\sqrt{2}$ er irrational.

(Hjælp: Lav et indirekte bevis, hvor vi antager $\sqrt{2}$ *er* rational og får en modstrid. Dvs. vi antager $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, hvor p og q er hele tal. Lad os samtidig sige, $\frac{p}{q}$ er forkortet så meget som muligt, så p og q ingen fælles faktorer har. Opløft nu i anden og betragt ligningen: $2=\frac{p^2}{q^2}$. Omskriv ligningen og prøv at vise, at 2 går op i både p og q – det vil jo være en modstrid med, at brøken var uforkortelig.)

<u>ØVELSE 6</u>

Bevis efter samme idé, at $\sqrt{3}$ er irrational.

Der findes *ikke* en generel og fælles metode til at afgøre, om et tal er irrationalt. Det må afgøres i hvert enkelt tilfælde. Derfor har vi den barokke situation, at der i virkeligheden findes uendeligt mange *flere* irrationale tal end rationale, men vi »kender« relativt få irrationale tal.

Tallet π vides i dag at være irrationalt. Beviset herfor er meget vanskeligt. Tilsvarende ved vi, at tallet e er irrationalt (hvilket i øvrigt ikke er slet så svært at vise). Men vi ved f.eks. ikke, om tallet e^{π} er irrationalt.

På lommeregneren er alt rationalt. F.eks. er π = 3,141592654. Dette er naturligvis ikke π Men dette rationale tal, der er en tilnærmelse til π, kan give os en idé om, hvorledes vi kan »fange«, eller »udpege« det irrationale tal π ved hjælp af lutter rationale tal.

π ligger i hvert af intervallerne:

$$I_1=[3;4]$$
$$I_2=[3{,}1;3{,}2]$$
$$I_3=[3{,}14;3{,}15]$$
$$I_4=[3{,}141;3{,}142]$$
$$I_5=[3{,}1415;3{,}1416]$$
$$\ldots$$

Denne kæde af intervaller kan tilsyneladende fortsættes i det uendelige:

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset I_4\supset I_5\supset I_6\supset\ldots\supset I_n,$$

og intervalbredden nærmer sig 0, når n går mod uendelig. Da π ligger i alle, må π »ligge på bunden« af hele kæden. *Et sådant system kaldes en intervalruse.*

ØVELSE 7

Find $\sqrt{2}$ på lommeregneren og lav tilsvarende en start på en intervalruse, der fanger $\sqrt{2}$.

ØVELSE 8

De foregående øvelser var snyd i den forstand, at vi *kendte*, eller bildte os ind at kende $\sqrt{2}$ og π som uendelige decimalbrøker. Ellers ville det jo ikke blive en uendelig intervalruse. Men vi *kender* netop *ikke* disse tal som uendelige decimalbrøker, vi *ved* blot de ikke er rationale. Vi kan imidlertid lave en intervalruse, der fanger $\sqrt{2}$ ved at bygge på definitionen på dette tal:

> $\sqrt{2}$ er den positive løsning til $x^2 = 2$
> Da $1^2 = 1$ og $2^2 = 4$, må tallet x, vi leder, efter ligge imellem 1 og 2: $x \in [1;2] = I_1$
> Da $1{,}5^2 = 2{,}25$, må tallet x ligge mellem 1 og 1,5: $x \in [1;1{,}5] = I_2$
> Da $1{,}25^2 = 1{,}5625$ må tallet x ligge mellem 1,25 og 1,5: $x \in [1{,}25;1{,}5] = I_3$

Fortsæt denne proces to skridt endnu. Herved fremkommer en intervalruse:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset I_5 \supset I_6 \supset \ldots \supset I_n ,$$

hvor intervallængden for hvert trin halveres, dvs. den går mod 0. $\sqrt{2}$ ligger ifølge konstruktionen i alle intervallerne. Derfor vil tallet »ligge på bunden«, og blive fanget af denne ruse, der igen kun var lavet ud fra rationale tal.

Vi giver nu ovenstående en mere præcis behandling.

DEFINITION på grænseværdi 1

En følge af tal $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ siges at gå mod 0, når $n \to \infty$, hvis det gælder, at uanset hvor lille et positivt tal a, vi vælger, så findes et N, hvorfra alle x'erne er mindre end a: $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$ er alle numerisk mindre end a, dvs. de befinder sig alle i intervallet $]-a;a[$.

Tegn selv situationen på en tallinje!

DEFINITION på grænseværdi 2

En følge af tal $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ siges at gå mod x_0, når $n \to \infty$, hvis det gælder, at forskellen $x_n - x_0 \to 0$, når $n \to \infty$.

DEFINITION på intervalruser

En intervalruse er en følge af intervaller:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset I_5 \supset I_6 \supset \ldots \supset I_n ,$$

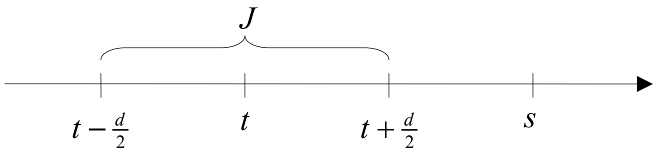
hvor intervallængden går mod 0, når $n \to \infty$.

SÆTNING 3

En intervalruse bestemmer højst ét tal.

Bevis: Antag at tallet t er med i alle intervallerne, I_n. Betragt et vilkårligt andet tal s. Kald afstanden mellem t og s for d, og se på følgende interval J omkring t:

$\left]t - \frac{d}{2}; t + \frac{d}{2}\right[$



Da intervallængden går mod 0, kan vi ifølge definitionen finde et N hvorfra alle intervallængder er mindre end $\frac{d}{2}$. Da t ligger i alle intervallerne, og specielt i alle $I_N, I_{N+1}, I_{N+2}, \ldots$, må disse intervaller ligge indenfor intervallet J, se tegningen. Men så kan tallet s jo ikke ligge i intervallerne fra og med I_N. Konklusion: Ingen andre tal end t kan ligge i *alle* intervallerne, dvs. intervalrusen bestemmer højst ét tal.

Spørgsmålet er så, om der faktisk altid findes et sådant tal »på bunden« af intervalrusen. I øvelse 8 konstruerede vi en ruse, hvor $\sqrt{2}$ var med i alle intervallerne. Sætning 1 siger da, at ingen andre tal er med. Specielt er ingen rationale tal med. Indenfor mængden af rationale tal findes således intervalruser, der *ikke* bestemmer noget rationalt tal. Derfor er det ikke en selvfølgelighed, at der findes noget på bunden. Ud fra disse overvejelser indføres nu de reelle tal ved følgende *aksiom*:

AKSIOM OM DE REELLE TAL.

Enhver intervalruse bestemmer præcis ét tal. Hvis tallet ikke er rationalt, kaldes det irrationalt. Mængden af rationale og irrationale tal kaldes *de reelle tal* og betegnes $\mathbb{R}$.

Bemærkning

Ved aksiomer har man historisk forstået: Selvindlysende påstande, vi tager for givet og ikke skal bevise. Ikke alt kan bevises – vi må jo starte et sted. Og det er netop ved aksiomerne. I geometrien startes bl.a. med det aksiom, der siger: Gennem to punkter kan der tegnes præcis én ret linje.

Gennem matematikhistorien har aksiomerne udviklet sig til blot at være *udgangspunktet*, idet det er svært at give en præcis forklaring på, hvad det vil sige, at noget er selvindlysende. Vores aksiom om de reelle tal kræver egentlig at blive fulgt op af overvejelser om regneregler for reelle tal; men alt det vil vi springe over.

5. Kontinuerte funktioner (1. del)

Vi erindrer os definitionen på, hvad det vil sige, at en funktion er kontinuert:

DEFINITION

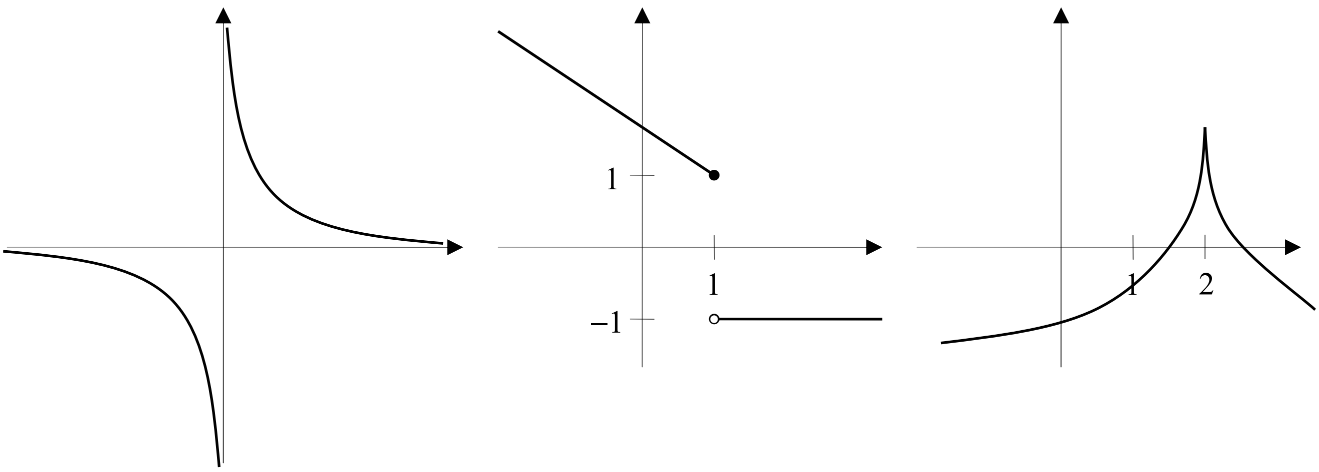
f er kontinuert i x_0, hvis der gælder: *For enhver talfølge* $x_n \to x_0$ *vil* $f(x_n) \to f(x_0)$.

Definitionen rejser umiddelbart et problem: Vi har en betingelse, der skal være opfyldt for *enhver* talfølge, med grænseværdi x_0. Men det kan vi jo aldrig undersøge. Derfor vælger vi altid »en vilkårlig talfølge«, der så at sige er »typisk«. Men kunne vi ikke risikere at overse en meget speciel og underlig talfølge? Betingelsen er som nævnt, at det skal gælde for enhver, dermed også for en sådan meget speciel sag. Dette problem bliver først løst med indførelse af den præcise og formelle definition på kontinuitet, sådan som Weierstrass gjorde det i 1860'erne. Weierstrass' metode er præsenteret i appendiks 1.

Populært sagt »trækker« x_n'erne $f(x_n)$'erne med sig på en jævn måde, så der ikke sker pludselige spring eller lignende.

Det grafiske billede af en kontinuert funktion er intuitivt: en sammenhængende kurve, der principielt kan tegnes i en streg, uden vi behøver at løfte blyanten fra papiret:

<u>EKSEMPEL 1</u>



f er ikke defineret i $x_0 = 0$, og derfor heller ikke kontinuert. Der findes slet ikke noget $f(0)$.

g er ikke kontinuert i $x_0 = 1$, da $g(1) = 1$, og en følge af tal x_1, x_2, …, der fra højre nærmer sig 1 *ikke* vil give en følge $g(x_n)$, der nærmer sig $g(1)$.

h er kontinuert i $x_0 = 2$.

<u>EKSEMPEL 2</u>

Er funktionen: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1{,}5 & \text{for} \quad x \le 3 \\ \frac{1}{2}x + 3{,}5 & \text{for} \quad x > 3 \end{cases}$ kontinuert i $x_0 = 3$?

For at besvare dette udregnes først $f(3) = 2 \cdot 3 - 1{,}5 = 4{,}5$

Vælg dernæst en følge af tal x_n, der nærmer sig 3 fra højre:

$$f(x_n) = \tfrac{1}{2}x_n + 3{,}5$$

Når $x_n \to 3$, vil $f(x_n) \to \frac{1}{2} \cdot 3 + 3{,}5 = 5$.

Altså gælder der *ikke*, at $f(x_n) \to f(3)$. Derfor er *f* ikke kontinuert i $x_0 = 3$.

Gennem de følgende øvelser skal du dels gøre dig mere fortrolig med det grafiske billede af kontinuerte funktioner. Og dels via de sidste sværere øvelser få hold på problemstillingen: Vil den afledede af en *differentiabel* funktion altid være *kontinuert*?

<u>ØVELSE 1</u>

Bestem tallet *a*, så *f* bliver kontinuert i 1:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{for} \quad x\le 1 \\ \frac{1}{2}x+a & \text{for} \quad x>1 \end{cases}$$

ØVELSE 2

Bestem tallet c, så f bliver kontinuert i 0:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+c & \text{for} \quad x<0 \\ x^2-3x+2 & \text{for} \quad x\ge 0 \end{cases}$$

ØVELSE 3

Skitser grafen for kontinuerte funktioner, der hver for sig opfylder følgende:

a) $Dm(f)=\mathbb{R}$ $\quad Vm(f)=]0;5[$
b) $Dm(f)=\mathbb{R}$ $\quad Vm(f)=]0;1]$
c) $Dm(f)=[0;5]$ $\quad Vm(f)=[0;5]$
d) $Dm(f)=]0;5[$ $\quad Vm(f)=[0;5]$

ØVELSE 4

Skitser grafen for kontinuerte funktioner, der hver for sig opfylder følgende:

a) $Dm(f)=]0;5[$ $\quad Vm(f)=[0;\infty[$
b) $Dm(f)=]0;5[$ $\quad Vm(f)=\mathbb{R}$
c) $Dm(f)=]0;5[$ $\quad Vm(f)=]-5;5[$
d) $Dm(f)=]0;5[$ $\quad Vm(f)=[0;5[$

ØVELSE 5

Skitser grafen for kontinuerte funktioner, der hver for sig opfylder følgende:

a) $Dm(f)=[0;5[$ $\quad Vm(f)=[0;2[$
b) $Dm(f)=[0;5[$ $\quad Vm(f)=]0;2]$
c) $Dm(f)=[0;5[$ $\quad Vm(f)=\mathbb{R}$
d) $Dm(f)=[0;5[$ $\quad Vm(f)=[0;2]$
e) $Dm(f)=[0;5[$ $\quad Vm(f)=]0;2[$

ØVELSE 6

Er følgende funktioner kontinuerte i 0?

a) $$f(x)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for} \quad x\ne 0 \\ 0 & \text{for} \quad x=0 \end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for} \quad x\ne 0 \\ 0 & \text{for} \quad x=0 \end{cases}$$

c) $$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x=0 \end{cases}$$

d) $$f(x)=\begin{cases} x^3\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{for} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x=0 \end{cases}$$

ØVELSE 7

Er funktionerne i opgave 6 differentiable i 0?
(Hjælp: Se på tangenthældningerne til venstre og til højre for 0; her må vi jo differentiere, og kan derfor regne os frem til det. Overvej dernæst, om der kan lægges en tangent i $x_0 = 0$: Hvad skulle tangenthældningen i givet fald være?)

ØVELSE 8

Se på de funktioner fra 6, der er differentiable. Er deres afledede kontinuert?

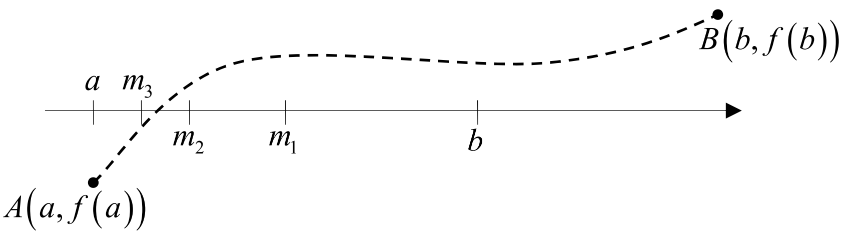
Vi har nu værktøjet til at bevise:

1. HOVEDSÆTNING OM KONTINUERTE FUNKTIONER[6]

(Af og til: Sætningen om mellemliggende værdier)
Hvis en funktion *f* er kontinuert i $[a;b]$, og *f* har modsat fortegn i de to endepunkter, så findes et tal $c\in\,]a;b[$, så $f(c)=0$.

Bevis:

Lad os sige, at $f(a)<0$, og $f(b)>0$:

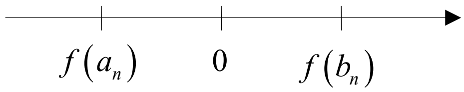


Tallet *c* vil vi finde ved en intervalruse: $I_n=[a_n;b_n]$, hvor $f(a_n)<0$, og $f(b_n)>0$:
1. trin: $I=[a;b]$
2. trin: Lad m_1 være midtpunktet mellem *a* og *b*.
Hvis $f(m_1)=0$, er vi færdige.
Hvis $f(m_1)<0$, sættes $I_2=[m_1;b]$.
Hvis $f(m_1)>0$, sættes $I_2=[a;m_1]$.
3. trin: Lad m_2 være midtpunktet i det nye interval I_2.

Gentag processen fra 2. trin og konstruér herved et nyt interval I_3.
Herved får vi konstrueret en følge:
$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset I_4\supset I_5\supset I_6\supset\ldots\supset I_n$$

[6] Af og til kaldes denne for Bolzanos sætning, idet Bolzano var den første, der eksplicit formulerede den og forstod, at der måtte gives et bevis for den. Hans eget bevis var ikke i orden og kunne ikke være det, idet man på dette tidspunkt, omkring 1820, ikke havde fået styr på de reelle tal.

Konstruktionen indebar, at vi bestandigt halverede intervallængden.
Derfor vil intervallængden gå mod 0. Men så vil denne intervalruse bestemme et tal *c*.
Da $a_n \to c$, vil $f(a_n) \to f(c)$, og da $b_n \to c$, vil $f(b_n) \to f(c)$.
Men funktionsværdierne i endepunkterne var jo bestandigt henholdsvis negative og positive:



Derfor må der gælde: $f(c) = 0$.

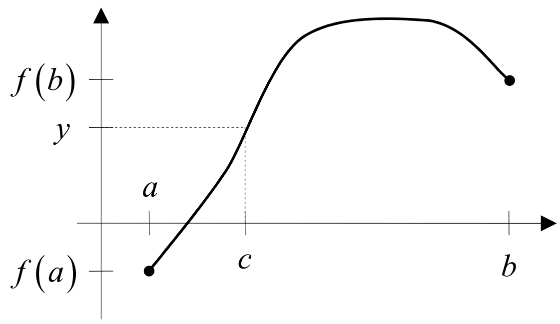
ØVELSE 8

Gør det sidste argument i beviset helt præcist.

SÆTNING 2

(Dette er rettelig: Sætningen om mellemliggende værdier)
Hvis *f* er kontinuert i intervallet $[a;b]$, og *y* er et tal mellem $f(a)$ og $f(b)$, så findes et tal *c* mellem *a* og *b*, så $f(c) = y$.

Den grafiske situation kunne være således:



Bevis:

Hvis $y = f(a)$ eller $y = f(b)$, er påstanden triviel.
Antag derfor at $f(a)$ og $f(b)$ er forskellige, og at eksempelvis $f(a)$ er mindre end $f(b)$. *y* ligger mellem de to tal:

$$f(a) < y < f(b)$$

Vi danner en ny funktion: $g(x) = y - f(x)$
Om $g(x)$ gælder:

g er kontinuert

$$g(a) = y - f(a) > 0$$

$$g(b) = y - f(b) < 0$$

Den 1. hovedsætning giver nu, at der findes et *c* mellem *a* og *b*, så:

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow y - f(c) = 0 \Leftrightarrow y = f(c)$$

Men det var jo præcis påstanden i sætning 2.

<u>Bemærk</u>

Sætning 2 kan formuleres på en lidt anden måde: Hvis f er kontinuert, og tallene c og d begge er med i $Vm(f)$, så er hele intervallet $[c;d]$ med i $Vm(f)$. Overvej dette!

Opgaver til afsnit 5

I teksten og i de følgende opgaver går vi ud fra de intuitivt indlysende regneregler for grænseværdi (som vi ikke vil bruge plads på at bevise, men som alle forholdsvis let bevises ud fra Weierstrass definition på grænseværdi, der præsenteres i appendiks 1): Hvis de funktioner, der indgår i et større regneudtryk, hver for sig har en grænseværdi, og vi ikke risikerer at dividere med 0, så udregnes grænseværdien af sum, differens, produkt og kvotient faktor for faktor, og led for led således:

Grænseværdien af $\frac{x^2 + x \cdot \cos(x)}{3x - \sin(x)}$, for $x \to \pi$ er lig med:

$$\frac{\pi^2 + \pi \cdot \cos(\pi)}{3\pi - \sin(\pi)} = \frac{\pi^2 - \pi}{3\pi - 0} = \frac{\pi(\pi - 1)}{3\pi} = \frac{\pi - 1}{3}$$

1. Bestem grænseværdien af:

   a) $3(1-x)(2-x)$ for $x \to 2$

   b) $\frac{t^2}{4-t}$ for $t \to -4$

   c) $\frac{x^2-1}{x+1}$ for $x \to 1$ og for $x \to -1$

   d) $\frac{t^2+3t-10}{t+5}$ for $t \to -5$

   e) $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$ for $x \to -2$

   f) $\frac{x^3+1}{x+1}$ for $x \to -1$

   g) $\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$ for $h \to 0$ (forlæng med $\sqrt{4+h}+2$)

   h) $\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$ for $x \to 1$ (forlæng med $\sqrt{x+3}+2$)

   i) $\frac{3x^3-1}{8+5x^3}$ for $x \to \infty$

j) $\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2}{x-1}$ for $x \to \infty$ (sæt på fælles brøkstreg)

2. Udnyt din grafiske lommeregner til at undersøge grænseværdien af:

   $\sqrt{x^2+x}-x$ for $x \to \infty$

   Vælg et vindue med $0 \le y \le 1$ og med $0 \le x \le 10^n$, hvor du prøver med n = 6, 8, 10, 12, 14. Hvad sker der? Kan du forklare det?
   Prøv om du kan finde grænseværdien ved at omskrive på udtrykket:
   Forlæng med $\sqrt{x^2+x}+x$.

3. Vis at $f(x)=x^3+x-1$ har et nulpunkt mellem x = 0 og x = 1.
   (Du behøver ikke at finde værdien af nulpunktet.)

4. Løs ved anvendelse af fortegnslinje uligheden: $\frac{x^2-1}{x^2-4}<0$
   og begrund din anvendelse af fortegnslinjen.

5. Find fortegn for: $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^3}$

6. Vis at ligningen: $x^3-15x+1=0$ har tre løsninger i intervallet $[-4;4]$.
   (Du behøver ikke at finde værdien af løsningerne.)

7. Vis at funktionen: $f(x)=(x-a)^2\cdot(x-b)^2+x$
   antager værdien $\frac{a+b}{2}$ for et eller andet $x\in[a;b]$.

8. Vis at såfremt *f* er kontinuert i $[0;1]$, og der gælder, at: $0 \le f(x) \le 1$ for alle $x\in[0;1]$,
   så findes der et tal $c\in[0;1]$, hvor $f(c)=c$.
   c kaldes et fikspunkt, og sætningen kaldes en fikspunktsætning.
   (Hjælp: Betragt funktionen $g(x)=f(x)-x$, og anvend den første hovedsætning om kontinuerte funktioner.)

9. Antag *f* er kontinuert i $[0;1]$, og at $f(0)=f(1)$.
   Vis at der findes et $a\in[0;\frac{1}{2}]$, så $f(a)=f(a+\frac{1}{2})$.
   (Hjælp: Betragt funktionen $g(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$ med definitionsmængde $[0;\frac{1}{2}]$.)

10. (Svær) Antag *f* er kontinuert i $[0;1]$, og at $f(0)=f(1)$.
    Vis at der for ethvert helt tal $n\ge 2$ findes et $a\in[0;1-\frac{1}{n}]$, så $f(a)=f(a+\frac{1}{n})$.
    (Hjælp: Begynd med at betragte funktionen $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$ med definitionsmængde $[0;1-\frac{1}{n}]$, og del dernæst op i flere tilfælde afhængig af, hvordan $f(1-\frac{1}{n})$ og $f(1)$ ligger i forhold til hinanden.)

11. (Vigtig) Anvend intervalruseteknikken til at vise *Bolzano-Weierstrass sætning*:
Hvis $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ er en følge af reelle tal, der er begrænset, dvs. der findes et interval [a;b], så alle x_i'erne ligger i dette, så har følgen et *fortætningspunkt* i $[a;b]$, hvorved forstås et tal x_0, hvorom der gælder, at der kan udtages en delfølge $z_1, z_2, z_3, ...$ af x_i'erne, som går mod x_0: $z_k \to x_0$ når $k \to \infty$.
(Hjælp: Halvér intervallet $[a;b]$: I mindst én af halvdelene ligger der uendeligt mange af x_i'erne. Vælg dette interval, og udtag et af x_i'erne som z_1. Gentag denne proces med halvering af intervallerne. Overvej nøje, hvor det er, vi anvender, at $[a;b]$ er et *lukket* interval).

6. De reelle tal (2. del)

Mens den 1. hovedsætning om kontinuerte funktioner kom forholdsvis smertefrit ud af intervalruse-betragtninger, så er 2. hovedsætning betydeligt vanskeligere at bevise. Vi er nødt til at gå en lille omvej om de reelle tal for at skaffe os det nødvendige værktøj.

Begreberne og argumentationen i det følgende er ret abstrakte, og det kræver en del arbejde at tilegne sig dette. Men det er umagen værd. Dels får vi her et af de stærkeste redskaber overhovedet indenfor den matematiske analyse, og dels rummer argumentationen stor matematisk skønhed.

I dette afsnit vil M betegne en mængde af reelle tal. M er ikke nødvendigvis et interval, det eneste vi forudsætter, er, at M ikke er tom!

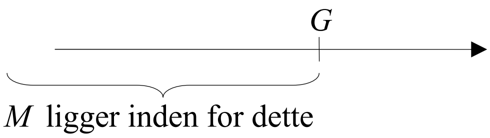
<u>DEFINITION</u>

Et tal K kaldes et *overtal* for M, hvis K er større end eller lig med alle tal i M.
Et tal k kaldes et *undertal* for M, hvis k er mindre end eller lig med alle tal i M.

<u>HOVEDSÆTNING OM DE REELLE TAL</u>

1. Hvis M er opadtil begrænset, så har M et *mindste overtal.*
2. Hvis M er nedadtil begrænset, så har M et *største undertal*.

Situationen vedrørende punkt 1 kunne være:



M kunne f.eks. være alle reelle tal, der opfylder $x^2 < 2$. Her bliver $G = \sqrt{2}$.
Men hvad hvis M er alle *rationale* tal, der opfylder $x^2 < 2$? Der findes ikke et rationalt tal, »lige til højre for $\sqrt{2}$« – derimod kan vi finde en følge r_n af rationale tal, der nærmer sig $\sqrt{2}$. Alle disse er overtal for M. Derfor ser vi straks, at der ikke kan være et mindste rationalt overtal. Sætningen gælder altså ikke indenfor de rationale tal.

<u>Bevis:</u>

Lad M være opadtil begrænset. Vi vil først konstruere en intervalruse, der giver os tallet G, og dernæst vise, at dette tal G er det mindste overtal.
1. trin: Vælg et *overtal* K_1, og et tal k_1, der *ikke er et overtal*

Sæt $I_1 = [k_1; K_1]$.

2. trin: Kald midtpunktet af intervallet I_1 for m_1.
Hvis m_1 er et overtal, sætter vi: $I_2 = [k_1; m_1]$.
Hvis m_1 ikke er et overtal, sætter vi: $I_2 = [m_1; K_1]$
Under alle omstændigheder er I_2 af formen $[k_2; K_2]$, hvor K_2 er et overtal, og k_2 ikke er et overtal.

3. trin: Kald midtpunktet af I_2 for m_2 osv.
Proceduren fra 2. trin gentages, og vi får i:

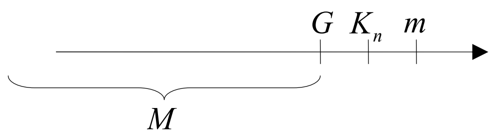
n. trin: $I_n = [k_n; K_n]$, hvor K_n er et overtal, og k_n ikke er et overtal.
På denne måde får vi konstrueret en intervalruse:
$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset I_5 \supset I_6 \supset ... \supset I_n$, idet længden af intervallerne ifølge konstruktionen vil gå mod 0.

Aksiomet giver os da: $\{I_n\}$ bestemmer et reelt tal *G*.

Påstand: G er et mindste overtal for M.

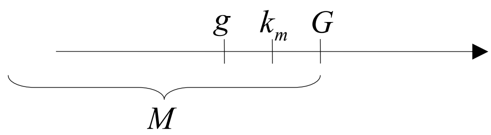
Påstanden indeholder to ting:

1. *G er et overtal:* Antag nemlig, at der findes et $m \in M$, således at $G < m$:



Af konstruktionen følger: $K_n \to G$ når $n \to \infty$. Overvej dette!
Fra et vist trin vil K_n derfor ligge til venstre for *m*.
Men det er jo i modstrid med, at K_n er et overtal for *M*. Altså: *G* er et overtal.

2. *G er det mindste overtal.* Antag nemlig at der findes et $g < G$, så *g* er et overtal:



Af konstruktionen følger: $k_n \to G$ når $n \to \infty$. Overvej dette!
Fra et vist trin, f.eks. *m*, vil k_m derfor ligge til højre for *g*: $g < k_m$. Men da k_m *ikke* er et overtal, findes der tal fra *M* til højre for k_m – og disse må da også ligge til højre for *g*. Altså kan *g* ikke være et overtal. Altså: *G* er det mindste overtal.

BETEGNELSE

Et mindste overtal for *M* kaldes et *supremum* for *M*. Vi skriver: $G = \sup M$
Tilsvarende kaldes et største undertal *g* for et *infimum* for *M*. Vi skriver: $g = \inf M$.

ØVELSE

Bevis punkt 2 i hovedsætningen.
(Bemærk: Du kan enten gennemføre en argumentation efter samme idé som i ovenstående bevis, eller være mere elegant og udnytte, at sætningen, vi har vist, gælder for alle mængder, der er opadtil begrænset. Hvis vi nu starter med en mængde *N*, der er nedadtil begrænset, betragt da mæng-

den $M = \{x \mid -x \in \mathbb{N}\}$. Udnyt sætningen for mængden *M* og overbevis dig om, at det fundne supremum for *M* er et infimum for *N*).

7. Kontinuerte funktioner (2. del)

Vi har nu værktøjet til at kunne bevise:

2. HOVEDSÆTNING OM KONTINUERTE FUNKTIONER

(Sætningen om maksimum og minimum)
Hvis en funktion *f* er kontinuert på det lukkede og begrænsede interval $[a;b]$, så er værdimængden også et lukket og begrænset interval: $Vm(f) = [\alpha;\beta]$.

Beviset er stort og opdeles for overskuelighedens skyld i tre dele. De tre punkter er hver for sig en lille sætning, hvorfor vi omformulerer hovedsætningen til følgende version:

2. HOVEDSÆTNING OM KONTINUERTE FUNKTIONER (2. version)

1. Hvis *f* er kontinuert i et interval *I*, så er $Vm(f)$ også et *interval*.
2. Hvis *f* er kontinuert i $[a;b]$, så er $Vm(f)$ *begrænset.*
3. Hvis *f* er kontinuert i $[a;b]$, så er $Vm(f)$ et *lukket* interval.

I det følgende er kun givet en disposition til de tre beviser. Du skal selv gennemarbejde beviserne og udfylde alle detaljer. Sine steder er det ikke helt let; men arbejdet med de enkelte punkter vil give god indsigt i moderne matematisk teori og argumentation.

Punkt 1: *f* er en kontinuert funktion, og vi vil vise, at $Vm(f)$ er et interval.
Vi kan slippe nemt om ved dette punkt, for hvad er egentlig definitionen på et interval? Det må være følgende: En delmængde *I* af de reelle tal kaldes et interval, såfremt der gælder: når $a,b \in I$, og $a < c < b$, så vil der gælde, at også $c \in I$.
Men af denne definition ser vi, at sætningen om mellemliggende værdier (første hovedsætning) giver os, at $f(I)$ er et interval. Overvej dette!
Imidlertid ønsker vi at henføre $f(I)$ til et interval på en af de kendte former. Derfor gør vi følgende:

a) Opdel i fire tilfælde, afhængig af om $Vm(f)$ er begrænset eller ej:
   1. $Vm(f)$ er begrænset både opad og nedad.
   2. $Vm(f)$ er begrænset opad, men ikke nedad.
   3. $Vm(f)$ er begrænset nedad, men ikke opad.
   4. $Vm(f)$ er hverken begrænset opad eller nedad.

   Se på et af tilfældene, f.eks. nr. 3: $Vm(f)$ er begrænset nedad, ikke opad.
b) Der findes et *største undertal g*. Marker på tallinje.
   Så er $Vm(f) \subseteq [g;\infty[$.
c) Påstand: Enten er $Vm(f) = [g;\infty[$ eller $Vm(f) =]g;\infty[$.

d) Argument: Vælg et $y > g$. Argumenter for, der findes y_1 og y_2 fra $Vm(f)$, så: $y_1 < y < y_2$. Marker på tallinjen.
e) Benyt sætningen om mellemliggende værdier, der siger, at hvis y_1 og y_2 er med i $Vm(f)$, så er også y med.
f) Konkludér.

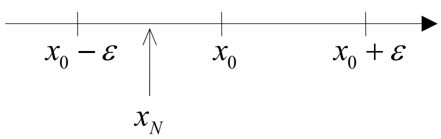
Før vi viser punkt 2, vises følgende:

<u>Hjælpesætning</u>

Hvis $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ er en *voksende* følge af reelle tal, der er opad begrænset (eller en aftagende følge, der er ned begrænset), så findes et x_0, så $x_n \to x_0$ når $n \to \infty$.

<u>Bevis:</u>

Såfremt du har lavet opgave 11 i kapitel 6, kan du anvende den. I modsat fald gør vi følgende:
Sæt $M = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. M er opad begrænset, og har derfor et supremum (mindste overtal), x_0.
Påstand: $x_n \to x_0$ når $n \to \infty$. Læg et lille interval om x_0: $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$:



Da x_0 er et overtal for M, vil $x_n \le x_0$ for alle n.
Da x_0 er mindste overtal, findes et x_N i dette lille interval.
Men følgen er voksende, så alle $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, ...$ er med i intervallet.

Intervallet om x_0 kan imidlertid vælges vilkårligt lille. Det betyder, at følgen nærmer sig vilkårligt tæt til x_0. Altså den ønskede konklusion: $x_n \to x_0$ når $n \to \infty$.

Nu kan vi så vise:

<u>Punkt 2:</u> Vi skal vise, at f er begrænset, dvs. *f vokser ikke* mod ∞.
Vi gennemfører dette som et indirekte bevis: Antag f ikke er begrænset.
a) Definer mængderne $M_k = \{x \in [a;b] \mid f(x) \ge k\}$, for $k = 1,2,3...$
   Sæt $x_k = \inf M_k$. Overvej at dette er muligt, dvs. x_k findes.
b) Argumenter for at: $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ... \supset M_n$
c) Argumenter for at så er $x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n$
d) Anvend nu hjælpesætningen på denne monotone følge:
   Der findes et x_0 så $x_n \to x_0$ når $n \to \infty$.
e) Udnyt kontinuiteten af f samt punkt d) til at drage en konklusion om grænseværdien af $f(x_n)$ når $n \to \infty$.
f) Udnyt konstruktionen af x_k'erne til at drage en anden konklusion om grænseværdien af $f(x_n)$ når $n \to \infty$.
g) Konkludér ud fra modstriden mellem e) og f).

Punkt 3: Vi skal endelig vise, at $Vm(f)$ er *lukket*:

a) Vi ved, $Vm(f)$ er et begrænset interval, dvs, af typen:
$[c;d]$, $[c;d[$, $]c;d]$, eller $]c;d[$. Vi skal udelukke de sidste tre.
b) Se på det ene af dem: Antag $Vm(f)=[c;d[$.
dvs. $f(x)<d$ for alle *x*, eller $d-f(x)>0$ for alle *x*.
c) Se nu på funktionen:
$$g(x)=\frac{1}{d-f(x)}$$
Argumenter for at *g* er kontinuert. Og derfor: *g* er begrænset.
Altså findes et tal *K*, så: $g(x)<K$ for alle *x*.
d) Omskriv og vis at så gælder:
$f(x)<d-\frac{1}{K}$, for alle *x*.
e) Men så kan $Vm(f)$ ikke være $[c;d[$, dvs. vi har en modstrid.
f) Konkludér.

Hermed er vi nået til vejs ende: Ud fra den dybere forståelse af, hvad de reelle tal er, har vi vist de to hovedsætninger om kontinuerte funktioner. Og med disse som grundlag beviste vi endvidere monotonisætningen og begrundede den teknik, vi altid anvender ved undersøgelser af fortegn og monotoniforhold.

8. Appendiks 1:

Fast grund under grænseværdi- og kontinuitetsbegrebet

To skikkelser i matematikhistorien rager op i bestræbelserne på at få styr på grænseværdibegrebet og dermed også på kontinuitetsbegrebet: Franskmanden Augustin Cauchy (1789-1857) og tyskeren Karl Weierstrass (1815-1897).

Cauchy publicerede meget, og i det mest berømte af hans skrifter, Cours d'Analyse fra 1821 findes den definition på grænseværdibegrebet, som vi i praksis anvender i gymnasiet i dag:

Når en følge af tal nærmer sig en fast størrelse på en sådan måde, at talfølgens elementer slutteligt adskiller sig fra den faste størrelse med så lidt som vi kunne ønske os, så siger vi, at den faste størrelse er grænseværdi for de øvrige.

Hans definition på kontinuitet lyder:

f er kontinuert i et interval, hvis det gælder, at en uendelig lille tilvækst h af variablen x, giver en uendelig lille tilvækst f(x + h) - f(x) af funktionsværdien.

Også den sidste definition virker ganske moderne; men vi bemærker dog, at Cauchy kun definerede kontinuitet i et helt interval, ikke i et enkelt punkt.[7]

Når vi forsøger at oversætte Cauchy's formuleringer: »så tæt på vi ønsker«, »en uendelig lille tilvækst« osv. til et præcist matematisk sprog, der giver mulighed for beregninger og præcise svar, opstår der imidlertid åbenlyse problemer.

[7] Ud fra den intuitive opfattelse af kontinuitet som svarende til, at grafen er sammenhængende, er forestillingen om kontinuitet i et enkelt punkt også en svært begribelig egenskab. Kontinuitet forstået som sammenhæng vil man umiddelbart knytte til et interval.

Vanskelighederne heri illustreres af, at Cauchy selv »beviste« nogle forkerte sætninger. Der var kort sagt brug for en så præcis matematisk formulering, at den kunne anvendes til at gennemføre præcise beviser. Og det var netop hvad Weierstrass gjorde.

Weierstrass var oprindelig slet ikke professionel matematiker. Hans far ønskede, han studerede økonomi og administration; men da sønnen ikke fandt interesse i disse fag, men derimod var en stor ynder af tyske ølstuer, gik årene, uden Weierstrass nogensinde fik en eksamen. Han forlod universitetet og tog forskelligt forefaldende arbejde inden for undervisning, samtidig med at han i fritiden dyrkede sin store lidenskab, matematikken. Og han demonstrerede sin store begavelse gennem en række opsigtsvækkende matematiske artikler, der resulterede i at han »blev kaldet« til en stilling på Berlins Universitet.

Weierstrass publicerede ikke selv ret meget; men gennem sine berømte forelæsninger præsenterede han en række nye tanker og metoder fra sin forskning, ideer, som han generøst overlod til sin store skare af højt kvalificerede studenter at færdiggøre. Stort set alle Europas unge lovende matematikere drog i de år – fra først i 1860'erne – til Berlin for at følge hans forelæsninger, og med Weierstrass forskydes tyngdepunktet i matematikhistorien fra Frankrig til Tyskland.

Weierstrass blev tidligt så syg, at han ikke kunne stå op og skrive under en forelæsning; han sad derfor ned, dikterede til en student, der på hans bud malede tavlen fuld. Denne anstrengende arbejdsform var givetvis medvirkende til, at Weierstrass gennemarbejdede sine forelæsninger ned til den mindste detalje, hvorved de notater, studenterne tog, faktisk var som lærebøger. Og netop gennem kopier af sådanne notater og gennem de artikler, hvori Weierstrass' elever bearbejdede hans resultater, lærte matematikverdenen hurtigt om disse nye »Weierstrasske krav til stringens (præcision)« – og hans metoder blev overtaget ord til andet.

Men det var som nævnt altid andre, der præsenterede ideerne – således var det Eduard Heine og Sofia Kovalevskaya (der begge siden indskrev sig i matematikhistorien), der publicerede Weierstrass' nye tilgang til kontinuitetsbegrebet.

Det centrale spørgsmål var at få styr på *grænseværdibegrebet*: Hvad skal vi forstå ved følgende formulering: $f(x) \to \mathrm{L}$, når $x \to a$?

Vi er vant til at gribe sagen således an: Vi begynder med en følge af x-værdier, og dernæst ser vi på, hvad der sker med $f(x)$'erne. Men dette giver de føromtalte problemer: Hvordan kan vi vide, at den følge, vi begyndte med, er *typisk* – ville vi få samme resultat med en hvilken som helst anden følge af x'er?

Weierstrass løser knuden ved at vende problemstillingen 180°: Hvad er det, vi vil frem til, spørger han. Ifølge Cauchy vil vi frem til en konklusion om, at forskellen på $f(x)$ og L kan gøres så lille, som det ønskes (ved at vælge x på den og den måde). Men så er det her, vi begynder, siger Weierstrass.

Lad os forestille os det som »et spil«: Over for os står en »modstander«, der udfordrer os ved at fastlægge et meget snævert interval om L, måske med en afstand på 1/1000 eller 1/1.000.000 fra L. Eller endnu tættere på: Vi indfører en ny størrelse ε (græsk bogstav: »epsilon«), der skal angive, *hvor* tæt vi ønsker at være på L. ε har vi ingen indflydelse på – det stikkes os ud af vores »modstander«. Nu er det så *vor* opgave at fastlægge et interval om a, på en sådan måde, at når x er i dette interval, er vi *sikre* på, at $f(x)$ er i det ønskede interval om L.

Det interval, *vi* fastlægger omkring a, bestemmes mest enkelt ved at angive et tal δ (græsk bogstav: »delta«), der måler afstanden fra x til a.

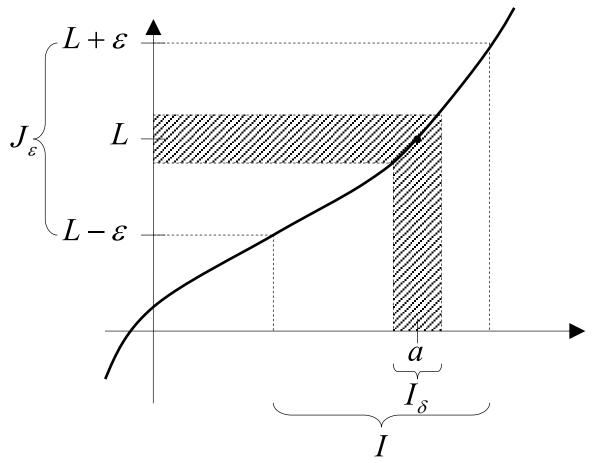
Lad os navngive de omtalte intervaller: $J_\varepsilon =]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$, og $I_\delta =]a-\delta; a+\delta[$.

Weierstrass' definition på grænseværdi lyder så:

<u>DEFINITION 1 (1. version)</u>

$f(x)$ har grænseværdien L, når x går mod a, på kort form: $f(x) \to L$ når $x \to a$, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at der for $x \neq a$ gælder: $x \in I_\delta \Rightarrow f(x) \in J_\varepsilon$.

Bemærk: Definitionen er sammensat således, at x ikke kan blive lig med a; dette er vigtigt, for $f(x)$ kan sagtens have en grænseværdi uden at være defineret i a.
Grafisk kan situationen være således:



1) Først vælges intervallet J_ε.
2) J_ε fastlægger nu via grafen de ydre grænser for intervallet I.
3) I_δ kan vælges på utallige måder, men f.eks. som på tegningen.
4) Vi kontrollerer nu, at: $x \in I_\delta \Rightarrow f(x) \in J_\varepsilon$: f kører x op ad den skraverede vej.

Når vi skal til at udnytte definitionen til at regne, er det ofte en fordel at have den skrevet med uligheder i stedet for intervaller:

DEFINITION 1 (2. version)

Vi siger at $f(x) \to L$ når $x \to a$, hvis der til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

ØVELSE 1

Lav en skitse af $f(x) = x^2$ i intervallet $[-3;3]$, og illustrer på din tegning, at der gælder:

$$f(x) \to 4 \text{ når } x \to 2$$

Definitionen på grænseværdi fører straks over i definitionen på kontinuitet:

DEFINITION 2

Vi siger, at f er kontinuert i x_0, hvis der gælder, at $f(x) \to f(x_0)$ når $x \to x_0$, dvs. hvis der gælder:
Til ethvert $\varepsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$, således at:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Bemærk at vi her har erstattet $0 < |x-a| < \delta$ med: $|x-a| < \delta$, idet situationen for $x \to x_0$ er helt triviel: f er jo defineret i x_0.

Det var ikke denne definition på kontinuitet, Weierstrass i første omgang gav. Som tidligere omtalt opfattede de stadig kontinuitet som en egenskab i et interval; og bestræbelserne hos Weierstrass og samtidige var at få styr det lidt mere komplicerede begreb »uniform kontinuitet« (på dansk: »ligelig kontinuitet«), som vi omtaler i appendiks 2. Det blev således en af Weierstrass' elever Eduard Heine, der som den første definerede begrebet *kontinuitet i et punkt*.

Anvendelse af definitionen på grænseværdi eller kontinuitet volder altid besvær i starten. Det skyldes sikkert, at vi har svært ved at slippe fokus fra x'erne og i stedet sætte fokus på $f(x)$. Men det er her, hele ideen ligger:

Vi begynder med den *ønskede* konklusion: $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Ud fra en analyse af dette, når vi gennem forskellige omskrivninger frem til *hvilket krav*, der så må stilles til x'erne, dvs. til fastlæggelse af δ.
Før vi illustrerer dette med et par eksempler, så prøv at løse følgende opgaver på din grafiske lommeregner:

ØVELSE 2

Indtast i de følgende opgaver regneforskriften i din lommeregner. Indret vinduet således at x-værdierne ligger tæt ved tallet a, og y-værdierne tæt ved tallet L. Få endelig en grafisk fremstilling af, hvilket krav det givne ε stiller til det interval, vi ønsker at lægge om a, ved at indtaste de to konstante funktioner $y_2 = L + \varepsilon$ og $y_3 = L - \varepsilon$.

Ved hjælp af *trace* eller *zoom* eller på anden vis skulle du så på lommeregneren kunne finde en værdi af δ, der »matcher« ε.

1. $f(x)=\sqrt{2x+3}$; undersøg påstanden: $f(x)\to 3$ når $x\to 3$ ved at finde et δ, der matcher $\varepsilon=0{,}01$, dvs. opgaven er at finde et δ, således at:
   $|x-3|<\delta \Rightarrow |f(x)-3|<0{,}01$ eller: $x\in\,]3-\varepsilon;3+\varepsilon[\,\Rightarrow f(x)\in\,]3-0{,}01;3+0{,}01[$.

2. $f(x)=x^3$; undersøg påstanden: $f(x)\to 8$ når $x\to 2$ ved at finde et δ, der matcher $\varepsilon=0{,}2$.

3. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; undersøg påstanden: $f(x)\to 1$ når $x\to 0$ ved at finde et δ, der matcher $\varepsilon=0{,}05$.

4. Undersøg påstanden: $\dfrac{x-2}{1+x^2}\to 0$ når $x\to 2$ ved at finde et δ, der matcher $\varepsilon=0{,}01$.

5. Undersøg påstanden: $\dfrac{x+1}{x^2-1}\to -\tfrac{1}{2}$ når $x\to -1$ ved at finde et δ, der matcher $\varepsilon=0{,}001$.

Anvendelse af definitionen til præcise beviser for grænseværdier

EKSEMPEL 1

Vis: $3x+1\to 7$ når $x\to 2$:
Lad ε være givet. Den ønskede konklusion er: $|(3x+1)-7|<\varepsilon$.
Vi omskriver: $|(3x+1)-7|=|3x-6|=3|x-2|$.

Den ønskede konklusion fås, hvis $3|x-2|<\varepsilon$, dvs. hvis $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Derfor vælges $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$. Så får vi:

$$|x-2|<\delta \Rightarrow |(3x+1)-7|<\varepsilon$$

EKSEMPEL 2

Vis: $\dfrac{1-4x^2}{1-2x} \to 2$ når $x \to \frac{1}{2}$:

Lad ε være givet. Den ønskede konklusion er: $\left|\dfrac{1-4x^2}{1-2x} - 2\right| < \varepsilon$.

Vi omskriver: $\left|\dfrac{1-4x^2}{1-2x} - 2\right| = \left|\dfrac{(1+2x)(1-2x)}{1-2x} - 2\right| = |1+2x-2| = |2x-1| = 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$.

Den ønskede konklusion fås, hvis $2\left|x-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, dvs. hvis $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Derfor vælges $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Så får vi:

$$\left|x-\tfrac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1-4x^2}{1-2x} - 2\right| < \varepsilon$$

EKSEMPEL 3

Vis: $\sqrt{x} \to 2$ når $x \to 4$:

Lad ε være givet. Den ønskede konklusion er: $\left|\sqrt{x} - 2\right| < \varepsilon$.

Vi omskriver: $\left|\sqrt{x}-2\right| = \left|\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x+2}}\right| = \left|\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right| \cdot |x-4|$.

Da vi skal undersøge $x \to 4$, kan vi uden indskrænkning nøjes med at se på $x \geq 1$, dvs. $\sqrt{x} \geq 1$.
Dermed er $\sqrt{x} + 2 \geq 1 + 2 = 3$, og $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right| < \frac{1}{3}$.

Indsæt dette: $\left|\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right| \cdot |x-4| \leq \frac{1}{3}|x-4|$.

Den ønskede konklusion opnås, hvis: $\frac{1}{3}|x-4| < \varepsilon$, eller: $|x-4| < 3\varepsilon$.

Derfor vælges $\delta = 3\varepsilon$. Så får vi:

$$|x-4| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x}-2\right| < \varepsilon$$

Vi kan opsummere således:
En påstand vedrørende kontinuitet i et bestemt punkt eller vedrørende en bestemt grænseværdi: $f(x) \to L$, når $x \to a$, undersøges på følgende måde:

Vi *begynder* med at opskrive den ønskede konklusion: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Dernæst foretages omskrivninger af typen: $\left|f\left(x\right)-L\right|=\ldots\leq\ldots\leq K\left|x-a\right|$, hvor K er en eller anden konstant. Ud fra dette ser vi, at vi kan sikre $\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$, hvis blot vi vælger $\left|x-a\right|<\dfrac{\varepsilon}{K}$.

Altså løser vi problemet ved at vælge $\delta<\dfrac{\varepsilon}{K}$.

OPGAVER

1. Vis: $5-2x\to 1$, når $x\to 2$.

2. Vis: $\dfrac{x^2+2x}{x+2}\to -2$, når $x\to -2$
   (Hjælp: Forkort brøken.)

3. Vis: $\sqrt{2x+3}\to 3$, når $x\to 3$.
   (Hjælp: Forlæng $\sqrt{2x+3}-3$ med $\sqrt{2x+3}+3$. I din vurdering kan du indskrænke dig til at se på f.eks. $x\geq\frac{1}{2}$.)

4. Vis: $\sqrt{x}\to 1$, når $x\to 1$.

5. Vis: $x^3\to 8$, når $x\to 2$.
   (Hjælp: Foretag polynomiers division med $\left(x-2\right)$.)

6. Vis at grænseværdier er entydige, dvs. Hvis $f\left(x\right)\to L$, når $x\to a$, og $f\left(x\right)\to M$, når $x\to a$, så er $L=M$.

Vi vil nu bevise, at følgende fundamentale sætning gælder:

HOVEDSÆTNING OM GRÆNSEVÆRDIER

Weierstrass' definition er ensbetydende med vores traditionelle definition.

Bevis:

1. Antag: $f\left(x\right)\to L$, når $x\to a$, ifølge Weierstrass' definition.
   Lad $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ være en følge af tal, så $x_n\to a$.
   Vi ønsker at vise: $f\left(x\right)\to L$, dvs. $f\left(x_n\right)$ nærmer sig *vilkårligt tæt* til tallet *L*.
   Læg derfor et lille interval J_ε om *L*, bestemt ved *ε*: $J_\varepsilon=\left]L-\varepsilon;L+\varepsilon\right[$.
   Vælg nu ifølge Weierstrass et interval I_δ om *a*, der afbildes ind i J_ε: $I_\delta=\left]a-\delta;a+\delta\right[$.
   Da nu $x_n\to a$, vil x_n'erne fra et vist trin, f.eks. nr. *N*, være helt med i I_δ.
   Weierstrass' definition på grænseværdi giver os: $x\in I_\delta\Rightarrow f\left(x\right)\in J_\varepsilon$.
   Men så kan vi sammenfatte: $x_N,x_{N+1},x_{N+2},\ldots\in I_\delta\Rightarrow f\left(x_N\right),f\left(x_{N+1}\right),f\left(x_{N+2}\right),\ldots\in J_\varepsilon$.
   Altså netop den ønskede konklusion.

2. Antag: $f(x) \to L$, når $x \to a$, ifølge den traditionelle definition med talfølger, dvs. vi antager:
   For *enhver* talfølge: $x_n \to a$ vil $f(x_n) \to L$.
   Lad ε være givet og betragt $J_\varepsilon =]L-\varepsilon; L+\varepsilon[$.
   Læg nu for ethvert helt tal n i et interval I_n om a, bestemt ved: $I_n =]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}[$.
   Antag at *ingen* af disse intervaller bliver afbilledet helt ind i J_ε, dvs. *ingen* af dem opfylder Weierstrass' krav: $x \in I_n \Rightarrow f(x) \in J_\varepsilon$.
   Vi får nu en modstrid på følgende måde: Vælg et x_k fra hvert I_k, således at: $f(x_k) \notin J_\varepsilon$.
   Ifølge valget af x'erne vil der gælde: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \to a$. (Overvej dette!)
   Men ifølge beliggenheden af $f(x_k)$'erne holder disse sig alle uden for intervallet J_ε, så derfor kan der ikke gælde: $f(x_k) \to L$.
   Dette er i modstrid med, at påstanden skal gælde for *enhver* talfølge.
   Altså kan vi konkludere, at ét af intervallerne I_n vil blive afbildet ind i J_ε.
   Og dermed er Weierstrass' definition opfyldt.

9. Appendiks 2: Uniform kontinuitet:

Værktøjet, der giver integralregningen fast grund under fødderne

Det eneste udestående problem i vort arbejde på at give differential- og integralregningen fast grund under fødderne er et af de oftest oversete.

I begyndelsen af ethvert forløb om integralregningen »bevises« at enhver kontinuert funktion har en stamfunktion. Beviset deles op i flere skridt, og undervejs foretages forskellige antagelser om funktionerne, men det er faktisk ikke her, problemet ligger:

Først antages $f(x) \geq 0$ i hele intervallet $[a;b]$.

Men kan vi bevise påstanden i dette tilfælde, så gælder den generelt. For en kontinuert funktion $g(x)$ har et minimum $m \in [a;b]$: $g(x) \geq m$, eller $g(x) - m \geq 0$. Dette giver os, at den kontinuerte funktion $g(x) - m$ har en stamfunktion $G_1(x)$. Men så er $G_1(x) + mx$ en stamfunktion til $g(x)$. Altså gælder påstanden generelt.

Den næste antagelse er ofte, at f er monoton. Men dette er udelukkende en bevis*teknisk* lettelse.

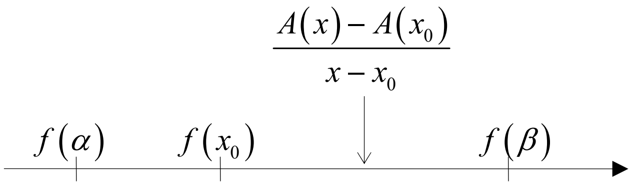
<u>ØVELSE</u>

Find dine notater frem og sammenlign disse med det følgende:

I beviset indføres arealfunktionen $A(x)$, og vi gennemfører en vurdering på størrelsen $A(x) - A(x_0)$. Denne størrelse er arealet af en lille strimmel under grafen for f. Men da f er kontinuert har den et maksimum, β og et minimum, α i $[x_0; x]$. Derfor gælder:

$$f(\alpha) \cdot (x - x_0) < A(x) - A(x_0) < f(b) \cdot (x - x_0) \text{ eller } f(\alpha) < \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} < f(b)$$

Vi afsætter størrelserne på en tallinje for at få et bedre overblik:



Når nu $x \to x_0$, vil både α og β gå mod x_0, og dermed vil $f(\alpha)$ og $f(\beta)$ gå mod $f(x_0)$. (Overvej hvorfor!).

Se på tallinjen og konkludér: $\dfrac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} \to f(x_0)$,

hvilket betyder, at $A(x)$ er differentiabel i x_0 med differentialkvotient: $A'(x_0) = f(x_0)$.
Med andre ord: $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$.

Vi ser således, at beviset kan gennemføres efter samme opskrift som i det tilfælde, hvor f er monoton.

Problemet i beviset for sætningen om, at en kontinuert funktion har en stamfunktion, ligger på et mere grundlæggende plan: *Eksistensen af A(x)*.

Vi postulerer, at arealet under grafen, og dermed $A(x)$ eksisterer. For de grafer vi normalt støder på, forekommer dette indlysende. Men i redegørelsen for, at det har god mening at tale om et areal af et område afgrænset af en krum kurve, støder vi ind i et problem. Metoden kender vi:

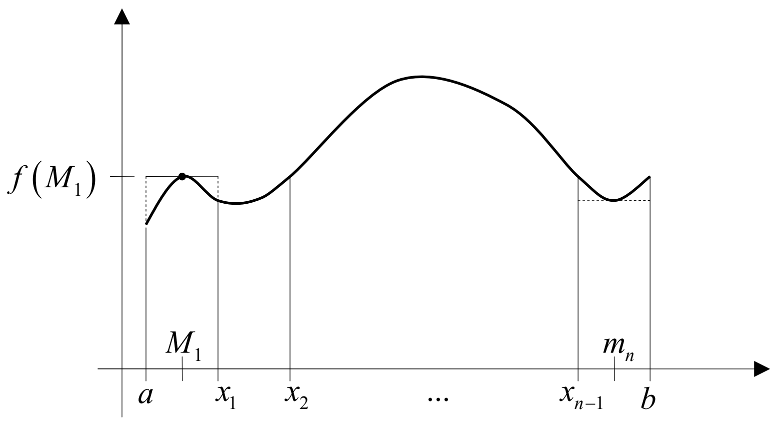
<u>DEFINITION</u>

Et område har et areal, hvis der findes en følge af indre og ydre polygoner, henholdsvis P_n og Q_n, således at: $\text{areal}(Q_n) - \text{areal}(P_n) \to 0$, når $n \to \infty$.

Betragt punktmængden afgrænset af linjerne med ligninger $x = a$ og $x = b$, samt af x-aksen og grafen for den positive funktion f.

Lad: $a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ være en inddeling af $[a;b]$ i n lige store dele.

Intervallængden er så $l_n = \dfrac{b-a}{n}$.



I hvert delinterval har f et maksimum i et punkt M_i og et minimum i et punkt m_i. Den ydre polygon fastlægges nu af værdierne $f(M_i)$, og den indre af værdierne $f(m_i)$.

Areal af indre polygon: $\text{areal}(P_n) = f(m_1)\cdot l_n + \ldots + f(m_n)\cdot l_n$
Areal af ydre polygon: $\text{areal}(Q_n) = f(M_1)\cdot l_n + \ldots + f(M_n)\cdot l_n$
Forskellen: $\text{areal}(Q_n) - \text{areal}(P_n) = \big(f(M_1) - f(m_1)\big)\cdot l_n + \ldots + \big(f(M_n) - f(m_n)\big)\cdot l_n$ (*)
Herefter vil vi lade $n \to \infty$. Så vil $l_n \to 0$. Hvad kan vi da konkludere om (*)?
Umiddelbart ikke noget, for *antallet* af led vokser også mod uendeligt.

Sammenlign med: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, …, $\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+...+\frac{1}{1000}=1$ (1000 led).

Betragter vi situationen grafisk, ser det ud til, at tallene $\left(f\left(M_1\right)-f\left(m_1\right)\right)$ kan gøres så små, vi ønsker det, blot intervalinddelingen bliver tilstrækkelig fin. Men vi har ikke værktøjet til at afgøre dette. Vort problem er nemlig, at vi skal styre, hvad der sker på *hele* intervallet $[a;b]$, og ikke bare i et enkelt punkt. Kontinuitetsbegrebet, som vi har indført det, taler kun om, hvad der sker i et enkelt punkt.

Den mere generelle problemstilling, der her er skitseret dækkes af begrebet *Uniform kontinuitet*. Det var faktisk dette kontinuitetsbegreb, Weierstrass først søgte at få styr på. Som tidligere omtalt blev kontinuitet dengang altid opfattet som en egenskab knyttet til et helt interval: En graf kan være sammenhængende i et interval, mens det umiddelbart forekom mere suspekt at tale om kontinuitet i et punkt.

Weierstrass' definition af det, vi i dag kalder Uniform kontinuitet (for at skelne det fra begrebet kontinuitet i et punkt) lyder:

DEFINITION

f kaldes uniform kontinuert i *I*, hvis der gælder, at for ethvert $\varepsilon>0$ findes et $\delta>0$, således at:

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Definitionen siger altså, at uanset hvor i intervallet *I*, vi befinder os, så gælder det, at blot forskellen $|x-y|$ er mindre end δ, så har vi styr på udsvinget i funktionsværdierne: Forskellen mellem disse er mindre end det ε, vi fik stukket ud.

Dette krav forekommer langt stærkere end den almindelige kontinuitetsdefinition. Tænker vi tilbage på øvelserne i afsnittet om kontinuitet, husker vi, at det δ, vi vælger, normalt afhænger *både* af ε *og* af det x_0, vi har som udgangspunkt. Sådan er det også i almindelighed. Men ser vi på *lukkede* intervaller gælder faktisk følgende:

3. HOVEDSÆTNING OM KONTINUERTE FUNKTIONER

Hvis *f* er kontinuert på $[a;b]$, så er *f* også uniformt kontinuert.

Bevis:

Lad ε være givet. Vi skal vise, der findes et δ, så der for alle $x,y\in[a;b]$ gælder:

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon \qquad (**)$$

Vi giver et indirekte bevis.
Antag nemlig at der ikke findes et sådant δ. Det betyder, at vi kan vælge en følge af tal δ_n, f.eks. følgende: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n}$, således at $\delta_n\to 0$, når $n\to\infty$, og hvor der for ethvert δ_n findes to tal x_n og y_n, der *ikke* opfylder (**), dvs.:

$|x-y|<\delta$, men samtidig: $|f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon$

Overvej nøje dette!
Nu anvendes *Bolzmann-Weierstrass' sætning*, der er vist i opgave 9, s. 28. Sætningen siger, at enhver uendelig følge af tal i et begrænset interval har et fortætningspunkt. (Har du ikke vist den, så gør det nu – i opgaven er givet en hjælp.)
Følgen $\{x_n\}$ har således et fortætningspunkt x_0.
Dette betyder, at der findes en delfølge: $x_{k_1},x_{k_2},x_{k_3},...,x_{k_i}\to x_0$

Overvej nu, at x_0 må ligge i intervallet $[a;b]$, når dette er lukket.

Vi ved, at $\left|x_{k_i} - y_{k_i}\right| \to 0$, og derfor vil også $y_{k_1}, y_{k_2}, y_{k_3}, ..., y_{k_i} \to x_0$.

f er kontinuert, så derfor har vi nu *både*: $f\left(x_{k_i}\right) \to f\left(x_0\right)$ *og*: $f\left(y_{k_i}\right) \to f\left(x_0\right)$

Anvend så Weierstrass' definition på kontinuitet:

Læg et interval J med bredde ε om $f\left(x_0\right)$: $J = \left]f\left(x_0\right) - \frac{\varepsilon}{2}; f\left(x_0\right) + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ og vælg hertil et δ,

så intervallet $I = \left]x_0 - \delta; x_0 + \delta\right[$ afbildes helt ind i J.

I er et interval om x_0, så fra et vist trin er både x_{k_i} og y_{k_i} med i I.

Men så er både $f\left(x_{k_i}\right)$ og $f\left(y_{k_i}\right)$ med i J, dvs. $\left|f\left(x_{k_i}\right) - f\left(y_{k_i}\right)\right| < \varepsilon$,

hvilket er i modstrid med valget af x'erne og y'erne, som beskrevet i (***).
Derfor er antagelsen i (***) forkert: Vi kan ikke blive ved med at vælge disse x_n og y_n.
Altså findes der et δ, så (**) er opfyldt:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Dette afslutter beviset for hovedsætning 3.

Med sætningen om uniform kontinuitet i bagagen kan vi afslutte beviset for, at områder under grafen for en positiv kontinuert funktion har et areal. Og dette vil afslutte beviset for, at enhver kontinuert funktion har en stamfunktion.

Vi vender tilbage til problemstillingen på side 40, hvor vi var nået frem til at foretage en vurdering på:

$$\text{areal}\left(Q_n\right) - \text{areal}\left(P_n\right) = \left(f\left(M_1\right) - f\left(m_1\right)\right) \cdot l_n - \left(f\left(M_n\right) - f\left(m_n\right)\right) \cdot l_n$$

Vi ønsker at vise:

$$\text{areal}\left(Q_n\right) - \text{areal}\left(P_n\right) \to 0 \text{ når } n \to \infty$$

Lad dertil et ε være givet. Vælg nu til tallet $\frac{\varepsilon}{b-a}$ et δ *ifølge definitionen på uniform kontinuitet*.

Så gælder: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Lad så δ bestemme inddelingen af intervallet $[a;b]$, dvs. intervallængden l_n vælges så denne er *mindre* end δ. Så gælder åbenbart:

$$\left|M_i - m_i\right| < \delta \text{ for alle } i\text{, og derfor er } \left|f\left(M_i\right) - f\left(m_i\right)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ for alle } i.$$

Indsæt nu dette i (*):

$$\text{areal}\left(Q_n\right) - \text{areal}\left(P_n\right) = \left(f\left(M_1\right) - f\left(m_1\right)\right) \cdot l_n - \left(f\left(M_n\right) - f\left(m_n\right)\right) \cdot l_n \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot l_n + ... + \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot l_n =$$

$$\frac{\varepsilon}{b-a} \cdot n \cdot l_n = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot n \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{(\text{indsæt } l_n)} = \varepsilon$$

Altså netop den ønskede konklusion: $\text{areal}\left(Q_n\right) - \text{areal}\left(P_n\right) \to 0$ når $n \to \infty$,

dvs. området under grafen har et areal!

På grundlag af en dybere indsigt i de reelle tal, og ved hjælp af de tre kontinuitetssætninger, har vi hermed fået etableret et solidt grundlag under den matematiske analyse.