Størrelsesorden for funktionerne a^x, x^a og ln(x)

(opgaveforløb v/ Bjørn Grøn og John Schächter)

Introduktion
I dette forløb vil vi dels få et redskab til at sammenligne, hvor hurtigt funktionerne vokser (eller aftager), og dels bevise, at blandt standardfunktionerne a^x, x^a og ln(x) dominerer eksponentialfunktioner uanset størrelsen af grundtallet altid over både potens- og logaritmefunktioner, mens potensfunktioner uanset størrelsen af potensen altid dominerer over logaritmefunktioner.

Forløbet er et lille stykke deduktiv matematik og er bygget op således, at (ihærdige) elever på B-niveau samt elever på A-niveau – med en vis vejledning – selv kan arbejde sig igennem øvelserne og bevise sætningerne.

Grænseværdi
Vi kender mange funktioner, der går mod uendelig, når x går mod uendelig (vi skriver $f(x) \to \infty$, når $x \to \infty$). Når vi taler om dette i gymnasiet, appelleres ofte til intuitionen. Men hvordan opstiller vi en helt præcis definition på, hvad det vil sige, at en funktion går mod uendelig, når x går mod uendelig?

<u>DEFINITION</u>

En funktion $f(x)$ siges at gå mod uendelig for x gående mod uendelig, hvis der til *ethvert* tal K *findes et* tal k, således at følgende er opfyldt:
For ethvert $x > k$ gælder, at $f(x) > K$

Dette kan umiddelbart synes som en noget uoverskuelig definition; men skal man vise, at en funktion går mod uendelig, når x går mod uendelig, kan man forestille sig at »fjenden« kommer med et K (kan være et meget stort tal). Det er så vores opgave at »forsvare« os, det vil sige, at vi skal vise, at funktionsværdierne også kan komme over dette K, blot vi går langt nok ud af tallinjen. Det gør vi ved at finde et tal k – bestemt ud fra K - således at $f(x) > K$, når $x > k$. Lidt løst sagt: funktionsværdierne kan blive lige så store, som vi ønsker!

Lad os prøve at bevise følgende sætninger ud fra denne definition:

<u>SÆTNING 1</u>

Lad $f(x) = e^x$. Da gælder, at $f(x) \to \infty$, når $x \to \infty$.

<u>BEVIS</u>

Fjenden kommer med K. Vi ønsker at bestemme et k, således at $f(x) > K$, når $x > k$.
Hvis $f(x) > K$, må følgende gælde (hvorfor? – overvej både hvorfor vi kan regne fremad, og hvorfor vi kan regne tilbage, dvs. hvorfor $\Leftrightarrow$ gælder):

$$e^x > K \Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) > \ln(K) \Leftrightarrow x > \ln(K)$$

Vi kan således forsvare os med $k = \ln(K)$, idet der jo af ovenstående udregninger (hvor vi har regnet ensbetydende, dvs. vi kan slutte begge veje) følger, at hvis $x > k$ (= ln(K)), da er $f(x) > K$.

<u>SÆTNING 2</u>

Lad $f(x) = a^x$, $a > 1$. Da gælder, at $f(x) \to \infty$, når $x \to \infty$.

<u>BEVIS</u>

(Det laver I selv.)
Hjælp: Løs uligheden $a^x > K$ med hensyn til x. Af disse udregninger følger så, hvad k kan vælges til.

<u>SÆTNING 3</u>

Lad $f(x) = \ln(x)$. Da gælder, at $f(x) \to \infty$, når $x \to \infty$.

<u>BEVIS</u>

(Det laver I selv.)

<u>SÆTNING 4</u>

Lad $f(x) = x^r$, $r > 0$. Da gælder, at $f(x) \to \infty$, når $x \to \infty$.
Bemærk: Heraf følger så, at $\sqrt{x} \to \infty$, når $x \to \infty$.

<u>BEVIS</u>

(Det laver I selv.)
Vi har nu bevist, ud fra vores definition, at funktionerne a^x, x^a og ln(x) (specielt også e^x) går mod uendelig, når x går mod uendelig, forudsat at $a > 1$, og $r > 0$.

<u>ØVELSE 1</u>

Prøv selv at opstille en definition af, hvad det vil sige, at

1. $f(x) \to 0$ når $x \to \infty$
2. $g(x) \to 0$ når $x \to 0$
3. $h(x) \to \infty$ når $x \to 0$
4. $p(x) \to -\infty$ når $x \to 0$

og prøv selv at formulere yderligere eksempler på grænseværdier.

– Tilfældet hvor $f(x) \to 0$ kan du evt. prøve først at håndtere for positive funktioner og dernæst overveje, hvilket værktøj vi har til at hjælpe os, hvis funktionen kan antage både positive og negative værdier.
– Lav i hvert tilfælde en grafisk skitse af situationen.
– Prøv i hvert af de 4 tilfælde og i de yderligere, du selv kommer på, om du kan finde en konkret funktion med regneforskrift, som opfylder betingelsen.

ØVELSE 2

Udnyt de nye definitioner til at, bevise, at

1. $\ln(x) \to -\infty$ når $x \to 0^+$
2. $e^x \to 0$ når $x \to -\infty$
3. $a^x \to 0$ når $x \to \infty$ og $0 < a < 1$

Størrelsesorden
Betragtes graferne for e^x og for ln(x), springer det i øjnene, at e^x vokser langt hurtigere. Logaritmefunktionerne er faktisk den langsomst voksende klasse af funktioner, vi møder i gymnasiet. F.eks. ved vi, at for titalslogaritmen log gælder, at log(10^6) = 6 og log(10^8) = 8, dvs. mens vi bevæger os på x-aksen fra 1 million ud til 100 millioner, så bevæger grafen sig op fra 6 til 8. Derfor forekommer det indlysende, at ikke alle funktioner, der går mod uendelig, gør det lige hurtigt.

DEFINITION

Givet to funktioner f og g, der begge går mod uendelig, når x går mod uendelig.
Vi siger, at funktionen f går hurtigere mod uendelig end funktionen g, hvis der gælder, at

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \text{ når } x \to \infty$$

Vi bemærker, at hvis $\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty$ når $x \to \infty$, da vil $\frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{g(x)}{f(x)} \to 0$, når $x \to \infty$.

ØVELSE 3

Vis dette.

Vi skal i det følgende vise:

1. $\frac{x^r}{\ln(x)} \to \infty$ når $x \to \infty$, og $r > 0$.
   Vi siger, at potensfunktionen vinder over den naturlige logaritmefunktion, når $r > 0$.
   Vi bemærker ligesom tidligere, at hermed gælder også, at $\frac{\ln(x)}{x^r} \to 0$, når $x \to \infty$.

2. $\frac{a^x}{x^r} \to \infty$ når $x \to \infty$ og, $a > 1$.
   Vi siger, at eksponentialfunktionen vinder over potensfunktionen, når $a > 1$.

3. $x^r \cdot \ln(x) \to 0$ når $x \to 0^+$, og $r > 0$.

4. $x^r \cdot a^x \to 0$ når $x \to \infty$, og $0 < a < 1$.

Disse 4 sætninger om funktionernes størrelsesforhold bevises ved at følge trinene i de efterfølgende øvelser.

ØVELSE 4

Vi ser på funktionen $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, $x\in\,]0;\infty[$.

Bestem monotoniforhold og lokale ekstrema, og benyt dette til at vise, at $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}<1$ for alle $x>0$.

ØVELSE 5

Vi benytter resultatet fra øvelse 4 til at lave følgende omskrivning:

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}<1 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

a) Forklar denne udregning.

b) Gør rede for, at $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to 0$, når $x\to\infty$ (brug sætning 4),

og benyt dette til at gøre rede for, at $\dfrac{\ln(x)}{x}\to 0$, når $x\to\infty$.

c) Gør herefter rede for, at $\dfrac{\ln(x^r)}{x^r}\to 0$, når $x\to\infty$, hvis $r>0$.

ØVELSE 6

a) Benyt logaritmereglerne til at vise, at $\dfrac{\ln(x)}{x^r}=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\ln(x^r)}{x^r}$.

b) Gør herefter rede for, at $\dfrac{\ln(x)}{x^r}\to 0$, når $x\to\infty$, hvis $r>0$, og hermed, at

c) $\dfrac{x^r}{\ln(x)}\to\infty$, når $x\to\infty$.

Hermed er den første påstand bevist.

ØVELSE 7

Vi skal her se på funktionen $f(x)=\dfrac{a^x}{x^r}$, hvor $a>1$, og $r>0$.

a) Vis at $\ln(f(x))=x\cdot\left(\ln(a)-r\cdot\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

b) Gør rede for, at $\ln(f(x))\to\infty$, når $x\to\infty$, og benyt dette, samt kendskabet til ln(x), til at vise, at $f(x)\to\infty$, når $x\to\infty$.

Vi har således vist den anden påstand: $f(x)=\dfrac{a^x}{x^r}\to\infty$, når $x\to\infty$.

ØVELSE 8

a) Gør rede for følgende omskrivninger i detaljer:

$$x^r \cdot \ln(x) = \frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^r}} = \frac{-r \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{r \cdot \frac{1}{x^r}} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^r\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^r}$$

b) Benyt dette samt øvelse 5 og vores viden om, at $\frac{1}{x} \to \infty$, når $x \to 0^+$, til at vise, at $x^r \cdot \ln(x) \to 0$, når $x \to 0^+$, hvis $r > 0$.

ØVELSE 9

Vi ser på funktionen $f(x) = x^r \cdot a^x$.

a) Vis at $\ln(f(x)) = x \cdot \left(r \cdot \dfrac{\ln(x)}{x} + \ln(a)\right)$.

b) Vis at $\ln(f(x)) \to -\infty$, når $x \to \infty$, hvis $0 < a < 1$, og slut heraf, at $f(x) \to 0$, når $x \to \infty$.

Vi har således bevist, at $x^r \cdot a^x \to 0$, når $x \to \infty$, hvis $0 < a < 1$.

Hermed er de fire påstand vist!