Bjørn Grøn

Fra græsk geometri til moderne algebra

Indholdsfortegnelse

1. Oprindelsen

Grækerne er et indoeuropæisk folk, der kom nordfra i flere bølger, og som omkring år 1000 f.Kr. havde gjort sig til herrer over det græske fastland, de omliggende øer, og Lilleasiens vestkyst.

De organiserede sig i små uafhængige bystater, både hjemme i »moderlandet«, og hvor de slog sig ned. De udgjorde således en kulturel, men kun sjældent en politisk enhed, i modsætning til de meget centralistiske flodriger i Ægypten og Mesopotamien.

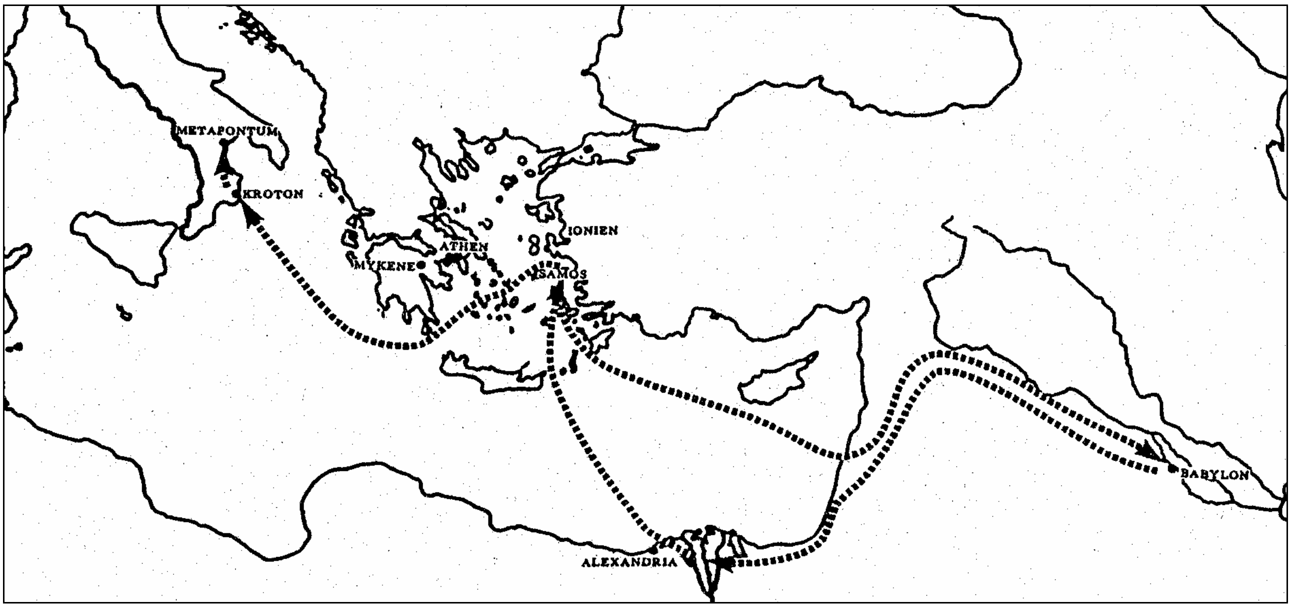
Vi kender ikke meget til den tidligste historie før og omkring 1000-tallet, den der danner baggrund for de store fortællinger *Iliaden* og *Odysséen*, som Homer skrev ned ca. år 800 f.Kr.

Der har været et tæt samkvem med andre folkeslag i regionen, og fra fønikerne og de semitiske folk overtog de skriften og skabte det græske alfabet, som resten af Europa siden eftergjorde. Grækerne brugte også bogstaverne som talsymboler. De skrev utroligt meget; men vi har kun meget lidt originalt skriftligt materiale fra denne tidlige periode. Og selv fra højdepunkterne i den græske kultur er det beskedent, hvad der er bevaret af originaltekster.

I antikkens Grækenland kender vi således en masse personer; men kun lidt af, hvad de skrev, er bevaret i en form, så vi kan være 100% sikre på, at det, vi har foran os, er lig med det oprindelige. Fra oldtidens Ægypten og ikke mindst fra Mesopotamien har vi derimod et væld af skriftlige overleveringer; men vi aner ikke hvem, der skrev det ned, eller hvem, der tænkte tankerne.

a. Påvirkninger fra flodkulturerne

Omkring år 600 f.Kr. bliver presset fra perserne mod Ionien – kolonierne på Lilleasiens vestkyst og øerne ud for – så truende, at stadigt flere drog op. De fleste rejste vestpå, hvor de slog sig ned langs middelhavskysten og specielt grundlagde en række kolonier i Syditalien.



Pythagoras' rejser.

Ionien havde samtidig været det område, hvor påvirkningen fra de kulturelt højerestående folkeslag var mest umiddelbar. Derfor er de første store filosoffer og matematikere, vi hører om, næsten alle fra disse *joniske kolonier*:

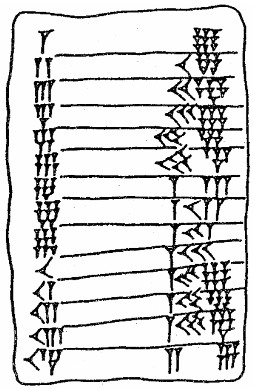
Thales (ca. 625 – ca. 547) kom fra Milet og Pythagoras (ca. 560 – ca. 450) fra øen Samos. Begge drog op fra deres hjemstavn og besøgte på lange rejser de to store flodriger. Om Thales fortælles, at »han var den første, der beviste ting«, og at han under et besøg i Ægypten for kongen der udregnede højden af pyramiderne ved at måle længden af den skygge, de kastede.

ØVELSE

Prøv selv at overveje, hvordan Thales kunne have gjort.

Om Pythagoras fortælles så mange historier, at det meste nok er løgn. Men tager vi det med nogle gran salt, kan hans historie måske alligevel illustrere, *hvordan den græske matematik blev til.*

Under rejser til Mesopotamien har han fået indtryk af matematikkens høje stade der; men det er snarere en stor samling regler og tabeller, opsamlet pr. erfaring gennem tusind år og nedskrevet på små lertavler, end det er egentlig videnskab eller grundlag for filosofisk overvejelse.
Blandt tavlerne så han måske en, der indeholdt en tabel over forholdet mellem siderne i retvinklede trekanter. Sådan nogle tavler er faktisk fundet i vore dage, og de er dateret til omkring 1800 f.Kr.; den tidsmæssige afstand til Pythagoras er lige så stor som vores tidsmæssige afstand til Gorm den Gamle! Vi ved altså i dag, at babylonerne gennem tusind år har kendt det, eftertiden har kaldt *Pythagoras' sætning*. Men kendt den gennem taleksempler. Og sådan havde de tabeller over de utroligste ting og ofte med en forbløffende nøjagtighed – f.eks. en slags sinustabeller, der i nøjagtighed kan konkurrere med moderne lommeregnere.



Ni-tabellen med kileskrift

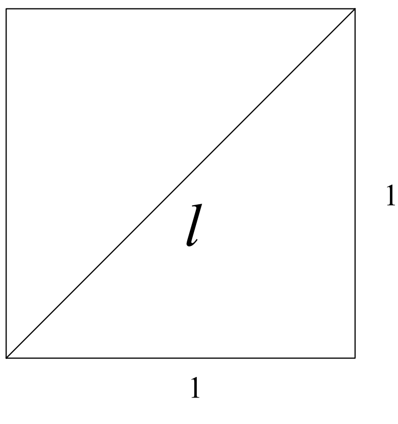
b. Pythagoræerne

Med Thales og Pythagoras træder den egentlige *matematik* ind på scenen: de regler, der skulle hjælpe på regnefærdighedernene hos skolebørn i Babylon formuleres nu i den græske matematik som sætninger, der ud fra visse forudsætninger gælder generelt, og at dette er tilfældet bevises.

Da Pythagoras kommer til Syditalien, samler han en kreds om sig, og de organiserer sig i et lukket, religiøst præget broderskab. Et medlem af inderkredsen i det pythagoræiske broderskab blev kaldt en *matematiker*, ud fra ordet *matematik*, der i sin græske version betød »det, der kan læres eller vides«. Matematik var altså betegnelsen for det pensum, som Pythagoras underviste sine elever i.

Opdagelsen af det smukke talforhold for retvinklede trekanter samt af, at tonehøjden i musik kunne karakteriseres ud fra længden af en svingende streng, bestyrkede Pythagoras i den opfattelse, at »alt er tal«.

Imidlertid opdagede de hurtigt, at netop Pythagoras' sætning producerede »umulige« tal eller, som vi siger i dag: irrationale tal som f.eks. $\sqrt{2}$. Da de kun kendte til rationale tal (brøker) og samtidig kunne indse, at $\sqrt{2}$ ikke er rational, stod de i et dilemma. Et linjestykke l – se figuren – må have en længde, og denne længde kan kun være $\sqrt{2}$. Men $\sqrt{2}$ er ikke et tal!



ØVELSE

Find beviset for at $\sqrt{2}$ ikke er rational og gennemgå det igen.

Dette udløste, hvad man siden har kaldt »den første grundlagskrise« i matematikken, dvs. krise i selve det grundlag, matematikken bygger på, på det pågældende tidspunkt. Grækerne overvandt den aldrig. Pythagoræerne, der mente at have afsløret en brist i gudernes konstruktion, svor, at de aldrig ville afsløre deres hemmelige opdagelse; men sådan noget slipper jo ud.

Og Proklos, der skrev i det 5. århundrede e.Kr., fortæller, at »de, der bragte disse størrelser frem i det åbne, omkom ved skibbrud alle som én. For det uudsigelige og formløse må nødvendigvis hemmeligholdes«.

Proklos er en af vore vigtigste kilder, på trods af at han først levede og skrev omkring 1000 år efter begivenhederne. Proklos havde nemlig adgang til en mængde af de skrifter, der siden er gået tabt, bl.a. en matematikhistorie af Eudemos, der levede i 200-tallet f.Kr. Og Proklos har været så betænksom over for eftertiden at bringe lange citater fra sine kildeskrifter.

Denne grundlagskrise blev en af årsagerne til, at den græske matematik i modsætning til den babyloniske vendte sig fra talbehandling til geometri. Dog blev de ved med at kredse om dette mysterium med de »umulige« tal.

Demokrit (ca. 460 – 370) og Theaitetos (410 – 368) har begge skrevet afhandlinger om irrationale tal; men ingen er bevaret. Og allerede pythagoræerne nærmede sig så småt et moderne syn, nemlig at anskue irrationale tal som grænseværdi for rationale.

En af pythagoræerne opstillede en metode til at bestemme $\sqrt{2}$: Lav to talrækker, som følger:

$$a_n:\ 1,2,5,12,29,\ldots \qquad a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$
$$b_n:\ 1,3,7,17,41,\ldots \qquad b_n = a_n + a_{n-1}$$

Så gælder:

$$\frac{b_n}{a_n} \to 2 \text{ for } n \to \infty$$

<u>ØVELSE</u>

1. Lav et lommeregnerprogram, der udregner a_n, b_n og $\frac{b_n}{a_n}$, og se konvergensen.
2. Indse, hvorfor det sker, ved at udregne $2a_n{}^2 - b_n{}^2$, og find dette er lig med $-\left(2a_{n-1}{}^2 - b_{n-1}{}^2\right)$.
   Fortsæt nedad til vi ender med $n = 1$, og indse deraf:
   $2a_n{}^2 - b_n{}^2 = \pm 1$, for alle n.
   For store n gælder derfor:
   $2a_n{}^2 \approx b_n{}^2$
   eller:
   $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \approx 2$, dvs. $\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \approx \sqrt{2}$

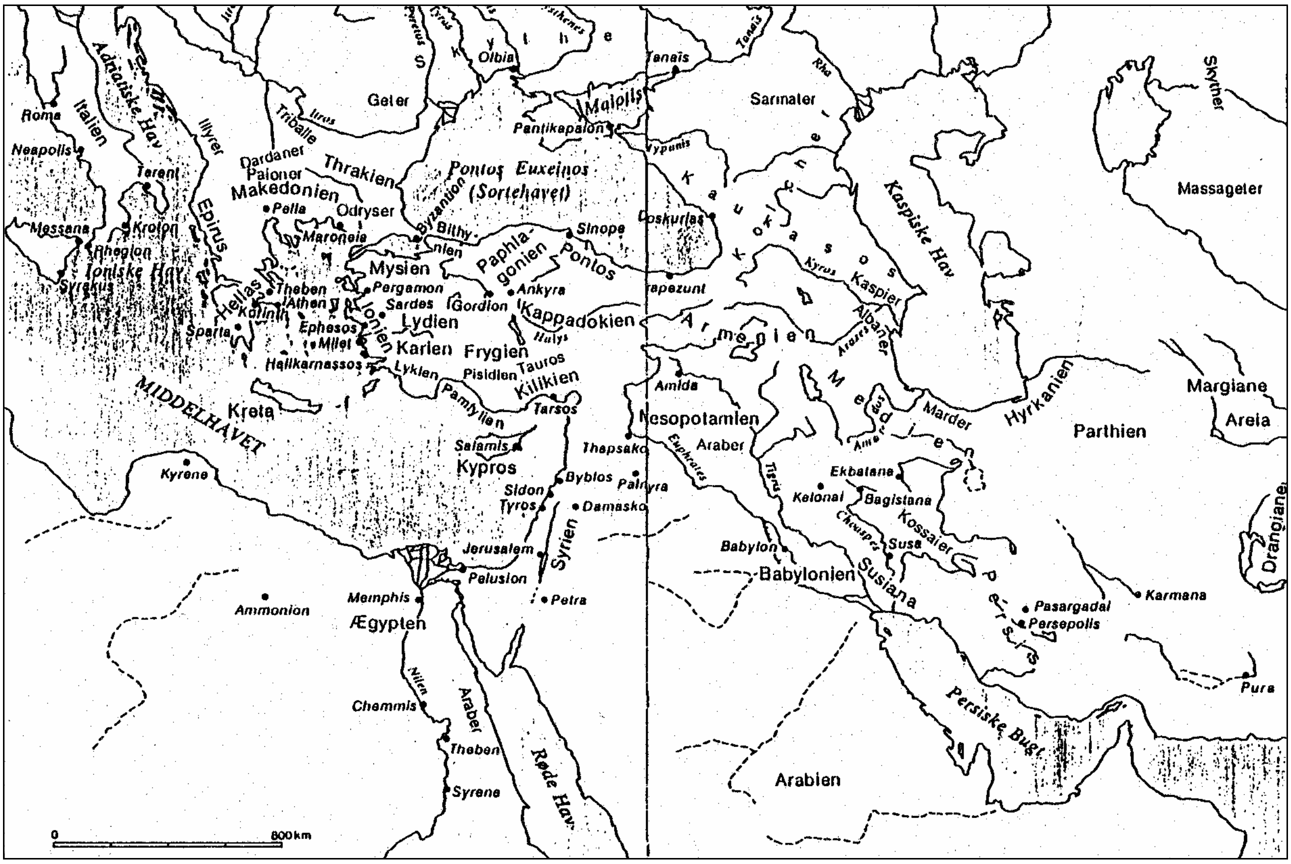
2. Den græske matematiks særtræk

Grækerne var ikke de første, der havde studeret geometri. Som nævnt havde babylonerne, hvad vi i dag kalder *trigonometriske tabeller* med stor nøjagtighed. I Ægypten var geometrien udviklet som praktisk redskab til opmåling af jordstykker. Historikeren Herodot (484 – 425), der især skrev om perserkrigene, fortæller:

»En konge udstykkede den frugtbare jord langs Nilen og tildelte hver ægypter en firkantet lod, som han pålagde dem at svare en årlig afgift af. Hvis floden tog noget fra en mands jordlod, henvendte han sig til kongen og meddelte, hvad der var sket. Denne sendte så synsmænd ud, de skulle måle op, hvor meget mindre stykket var blevet, for at besidderen i fremtiden kunne svare afgift i forhold dertil. Jeg mener dette var anledningen til, at landmålerkunsten blev opfundet, som siden er kommet til Hellas« (Herodot, s. 136).

Der findes en række originaltekster, der illustrerer den ægyptiske beregningskunst. De vigtigste er dels en papyrus fra ca. 1800 f.Kr., som er en slags matematiklærebog, der i øvrigt henviser til endnu ældre skrifter, og dels en papyrus fra ca. 1600 f.Kr., der tilsyneladende er en elevs »regnehæfte«.

Hos grækerne udvikles den praktiske beregning til en abstrakt matematik, der har almen gyldighed. Det sker i perioden fra ca. 500 til ca. 300, hvor Euklid sammenfatter stort set hele den daværende græske matematik i sit store værk *Elementerne*.



Det blev lærebogen, der afløste alle andre lærebøger. Og som vi kender det i dag – hvem gemmer gamle lærebøger, der er blevet forældede? Grækerne gjorde ikke, så vi kender kun lidt til alt det, Euklid kunne høste af og sammenfatte. Vi *ved* f.eks., at en stor matematiker Hippokrates (levede omkring år 430 f.Kr.) også havde skrevet et værk med titlen »Elementerne«; men det er gået tabt.

Selve den grundlæggende idé hos Euklid, nemlig først at klargøre præcis hvilke forudsætninger *(= aksiomer)* og *definitioner*, vi bygger på, og derefter logisk udlede *(= deducere)* sætninger herudfra, udvikles i 400-tallet af en række store filosoffer og matematikere (de fleste var begge dele dengang).

Metoden kaldes den *aksiomatisk-deduktive metode*, og den har lige siden været den helt dominerende indenfor al matematik; der *er* andre synspunkter, ikke mindst hvad angår formidling af matematik; men skal man lave ordentlig matematik, må man i hvert fald også beherske den aksiomatisk-deduktive metode.

Metoden vandt tilsyneladende så stærkt frem, som tilfældet var, på grund af et meget frugtbart samspil mellem filosofi, matematik og udviklingen af demokratiet.

a. Athens storhedstid

Rammen var Athen, der med sin autoritet og stærke økonomi efter sejren i Perserkrigene (omkring 480) fremstod som den absolut førende blandt de græske bystater. Fra alle hjørner af det store, men noget diffuse græske rige strømmede kunstnere og filosoffer, forfattere og naturvidenskabsmænd til byen, og skabte grundlag for den enestående kulturelle blomstring, der fandt sted især i 400-tallet.

Det var en historisk set kort periode. Allerede efter den peloponnesiske krig og nederlaget til Sparta (år 404) går det kunstneriske liv i Athen ind i sit efterår. Naturvidenskaberne fortsætter dog flugten mod tinderne et par hundrede år endnu.

Midt i 400-tallet var »kunsten at tænke deduktivt nylig blevet opfundet, og den bidrog til opstilling af spændende nye teorier, både sande og falske, over hele videnskabens område«, skriver den store engelske filosof og matematiker Bertrand Russel (1872 – 1970) i sin bog om Vestens Filosofi, og han tilføjer: »Det var dengang som sjældent før eller siden på een gang muligt at være intelligent og lykkelig, og lykkelig på grund af intelligens«; ak ja.

Den ledende politiker i Athen var Perikles (500 – 429). Han kom selv fra en af de store adelsslægter; men i striden mellem de forskellige fraktioner og slægter i Athen om, hvilken politik der skulle føres efter perserkrigene, stillede han sig på den hårde og uforsonlige linje, både over for perserne og siden over for Sparta. Det bragte ham i modsætning til de gamle adelsslægter, og i denne situation lykkedes det nu for Perikles at befæste sin position ved at tvinge de første elementer af demokrati igennem. I stedet for at de rige adelsslægter stort set suverænt udpegede bystyret, som de havde gjort hidtil, skulle nu i første omgang én af disse ti (der blev kaldt *strateger*) vælges af en folkeforsamling.

Det blev Perikles selv, der år efter år blev valgt, og dermed kunne optræde på en stærkere baggrund. For at vinde folk for deres synspunkter, i store som små forsamlinger, studerede politikerne retorik og veltalenhed hos filosofferne. Og Perikles knyttede specielt filosoffen og matematikeren Anaxagoras til sig.

Anaxagoras kom som så mange andre fra de joniske kolonier – han fra Klazomenae, hvorfra han var blevet hentet af Perikles. På samme måde var historikeren Herodot blevet hentet fra Halikarnassos med sigte på at få nedskrevet historien om perserkrigene; sikkert ud fra samme filosofi, som da Saxo i Valdemartiden blev sat til at skrive Danmarks historie – historien skulle også bruges til moralsk oprustning og til at fremme bestemte politiske synspunkter. Perikles knyttede ligeledes kunstnere som billedhuggeren Feidias og skuespilforfatteren Sofokles til sig.

I et af sine stykker (Faidias) beskriver Platon Anaxagoras og skriver bl.a.: »Perikles var nemlig truffet sammen med Anaxagoras og fik utvivlsomt derved sans for »højtflyvende spekulation« – og herfra overførte Perikles så til sin talekunst det, der lod sig anvende på den«.

Herfra går der en lige linje frem til opfattelsen af først geometri og siden matematisk træning som et grundlæggende *middel til almendannelse.*

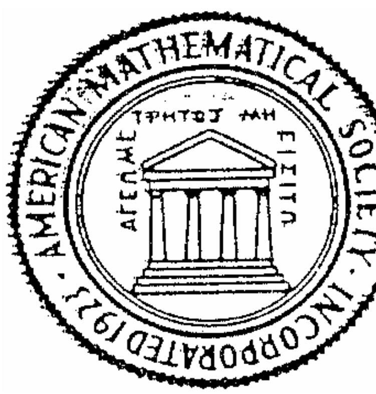
Hos Platon selv er matematik det afgørende middel til at træne tanken. Platon levede 429 – 348 og tilhørte som ung kredsen omkring Sokrates. Men da vilkårene for demokratiet blev trangere under den peloponnesiske krig (431 – 404), specielt efter kuppet i 411, og da Sokrates blev henrettet i 399 – med anklager om, at han forførte ungdommen – drog Platon i frivilligt eksil. Derved kunne han nemt være gledet ud af historien, idet han både blev fængslet og solgt som slave; men han blev dog løskøbt og vendte tilbage til Athen, hvor han i 387 grundlagde *Akademiet.*

Det var en skole for unge (velhavende) intellektuelle, en slags universitet, og det bestod faktisk frem til 529 e.Kr., hvor kejser Justinian endelig lukkede det, dvs. det havde en længere levetid, end noget nuværende europæisk universitet har haft.

I begyndelsen foregik undervisningen i en park, der hed Akademiet. Da de fik tag over hovedet, beholdt Platon navnet og satte så over indgangsdøren en inskription, hvorpå der stod:

»Lad ingen komme under mit tag, som ikke er vidende om geometri«.

Det har naturligvis glædet matematikere siden, og i vor tid har den amerikanske matematiske forening ladet inskriptionen indgå i deres bomærke.



Det gamle logo for American Mathematical Society

Platon var ikke selv matematiker, men et nærmere studium af hans filosofi vil vise, at han var ganske påvirket af den matematiske tankegang. I mange af skrifterne behandles matematiske emner, og i et af dem, der har fået navn efter en af pythagoræerne, Timaeus, siger han, at »geometrien er viden om det, som altid er«.

ØVELSE

Også i vor tid er matematik blevet opfattet som et grundlæggende almendannende fag, fordi faget optræner evnen til at tænke logisk og til at bevæge sig fra konkrete eksempler til en abstrakt og mere almen forståelse. Dette var f.eks. baggrunden for, at matematik, bortset fra nogle få år, altid har været et obligatorisk fag i sprogligt gymnasium. Giv en kritisk vurdering af denne opfattelse. Er det rigtigt, at den tankegang, matematik udvikler, kan anvendes i andre fag, måske endda helt generelt?

b. Matematikkens centre i antikken

1. Rom	9. Stageira	17. Milet
2. Syrakus	10. Abdera	18. Knidos
3. Kroton	11. Byzans	19. Rhodos
4. Elea	12. Pergamon	20. Perga
5. Tarent	13. Klazomenae	21. Alexandria
6. Delfi	14. Khios	22. Syene
7. Elis	15. Delos	23. Kyrene
8. Athen	16. Samos	

Abdera: Demokritos, 450 f.Kr.
Alexandria: Euklid, 300 f.Kr.; Aristarchos, 280 f.Kr.; Konon, 275 f.Kr.; Eratosthenes, 230 f.Kr.; Apollonios, 225 f.Kr.; Hypsikles, 180 f.Kr.; Heron, 50; Menelaos, 100; Ptolemæus, 150; Diofantus, 50(?); Pappus, 300; Theon, 390; Hypatia, 410.
Athen: Sokrates, 425 f.Kr.; Platon, 380 f.Kr.; Theaeteus, 375 f.Kr.; Aristoteles, 367 f.Kr.; Theodoros, 350 f.Kr.; Ptolemæus, 150.
Byzans: Proklos, 430.
Delfi: Det deliske problem.
Delos: Det deliske problem.
Elea: Parmenides, 460 f.Kr.; Zenon, 450 f.Kr.
Elis: Hippias, 425 f.Kr.
Khios: Hippokrates, 460 f.Kr.
Knidos: Eudoxus, 370 f.Kr.
Klazomenae: Anaxagoras, 450 f.Kr.
Kroton: Pythagoras, 540 f.Kr.; Filolaos, 425 f.Kr.
Kyrene: Theodoros, 400 f.Kr.; Eratosthenes, 230 f.Kr.
Milet: Thales, 600 f.Kr.
Perga: Apollonios, 250 f.Kr.
Pergamon: Museion, Apollonios, 210 f.Kr.
Rhodos: Eudemos, 335 f.Kr.; Hipparchos, 140 f.Kr.
Rom: Menalaos, 100.
Samos: Pythagoras, 540 f.Kr.; Konon, 300 f.Kr.; Aristarchos, 280 f.Kr.
Stageira: Aristoteles, 384 f.Kr.
Syene: Eratosthenes, 230 f.Kr.
Syrakus: Arkimedes, 225 f.Kr.
Tarent: Pythagoras, 540 f.Kr.; Archytas, 400 f.Kr.

c. Alexandria bliver centrum

Athen er i Platons levetid stadigvæk centret for græsk åndsliv. Men kort efter hans død erobrer Philip af Makedonien Grækenland i år 338, og hans søn Alexander (den Store) fortsætter hastigt felttoget ud over det meste af den verden, de kendte dengang. I Ægypten grundlægger han i 332 en ny by, der ubeskedent kaldes Alexandria, og i byen oprettes en slags universitet – der kaldes *Museet* – med udgangspunkt i det enestående bibliotek, der her bygges op.

Dermed overtager Alexandria i løbet af ganske få år fuldstændigt Athens førerstilling.

To af de tre største matematikere i Oldtidens Grækenland, Euklid (omkring 300 f.Kr.) og Appolonius (262 – 190) – der skrev et imponerende værk om keglesnit, dvs. ellipser, parabler og hyperbler – underviste her. Den tredje og måske største af alle, Arkimedes (287 – 212), boede i Syrakus i Syditalien, indtil byen blev erobret af romerne, og han selv dræbt af en romersk legionær.

Biblioteket rummede jo ikke bøger i vores forstand, men ruller af papyrus, pergament, læder eller andet materiale. Da Rom erobrede Ægypten i år 47 f.Kr., var samlingen oppe på 7-900.000 bind, alle i sagens natur uerstattelige originaler. Ved erobringen blev museet tændt i brand, og en stor del af skrifterne gik tabt. Siden påbegyndtes en ny opbygning af biblioteket; men da kristendommen vandt frem, gennemtvang tilhængerne af denne nye religion en afbrænding af de gamle »hedenske« skrifter.

Det lykkedes at få bragt en del i sikkerhed og disse ruller blev spredt ud over hele Orienten. Men det meste gik tabt, og det er en af forklaringerne på, at vi på trods af den omfattende skriftlige produktion har så forholdsvis lidt originalt materiale.

Senere fandt munke ud af, at i stedet for at brænde skrifterne kunne de vaske pergamentet af og derved genbruge det kostbare pergament. Således blev de naturvidenskabelige skrifter systematisk forvandlet til bønnebøger og lignende.

I nyere tid er det nu lykkedes at identificere nogle enkelte af disse overskrivninger. Den danske matematiker og sprogforsker J.L. Heiberg har været en hovedkraft i dette arbejde. Han sammenstykkede i 1883 den i dag anerkendte udgave af Euklids *Elementerne* og udgav ligeledes de af Arkimedes' værker, der ikke var gået tabt. Under dette arbejde fandt han ved et tilfælde i et klosterbibliotek i Konstantinopel en gammel pergamentrulle med bønner og ritualer fra det 13. århundrede, hvor han kunne se, at der under salmeversene var en anden og ældre tekst. Afvaskningen af pergamentet havde været ufuldstændig, og det lykkedes faktisk Heiberg at dechifrere originalteksten. Til hans glæde og forbløffelse dukkede nu et af Arkimedes' skrifter frem. Dette værk med titlen *Om Metoden* havde ligget gemt bag bønnerne i over 600 år og var regnet for tabt.

Glæden var særlig stor, fordi dette er det eneste bevarede skrift fra en af de store matematikere, hvori der fortælles om hvilke overvejelser og metoder, der har ført frem til alle de resultater, som så smukt og logisk præsenteres for os hos Arkimedes selv og f.eks. i *Elementerne*.

Det er indlysende, at der <u>forud</u> for den aksiomatisk-deduktive metode må have gået en <u>analyse</u>, en undersøgelse og en prøven sig frem. Men hvorledes – det har vi ikke vidst, før det dukkede frem fra sit skjul bag bønner og salmevers.

3. Euklid

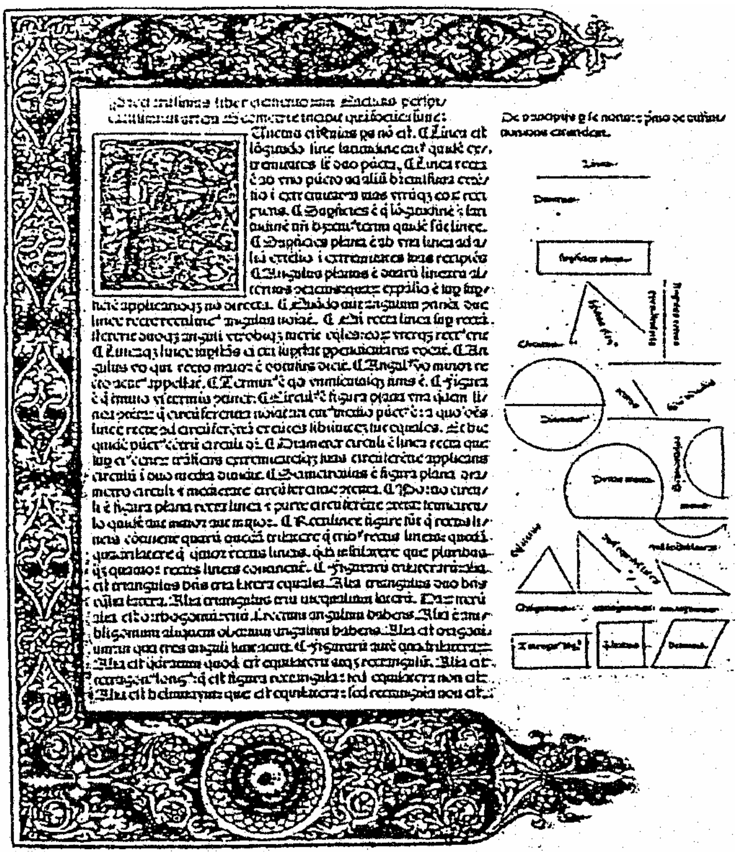
Om Euklid som person ved vi stort set intet. Og ingen af Euklids arbejder er bevaret i deres originaludgave! Han skrev mange andre bøger, hvoraf de fleste er gået tabt. En af disse ville det være overmåde interessant at finde – den hedder *Fejlslutninger* og blevet anvendt som pædagogisk optræning af elevernes evne til at afsløre fejl i noget, der tilsyneladende ser logisk ud.

Men vi har hans hovedværk *Elementerne* og det i en udgave, som, vi er ret sikre på, ligger tæt op ad originalen. Det er overleveret til os ad krogede veje.

Da Platons Akademi blev lukket i 529 e.Kr., da romerriget smuldrede, og kristendommens fremmarch knægtede megen fri videnskab, søgte mange lærde østover til den arabiske verden. Her fandtes en relativ stor åndsfrihed og samtidig en voksende interesse for naturvidenskab.

Det ældste kendte eksemplar af *Elementerne* er således en arabisk oversættelse fra ca. 800 e.Kr. Den blev bevaret, fordi det var en gave til den berømte Harun al Raschid (kendt fra 1001 nat og diverse tegneserier). Det er 1100 år efter, at Euklid har skrevet originalen. Det svarer nogenlunde til vores tidsmæssige afstand til Jellingestenene!

Den første latinske oversættelse dukker op i Europa i 1120, og den første engelske oversættelse er fra 1570 (den europæiske bogtrykkerkunst stammer fra 1438, før den tid kopieres bøgerne ved afskrift).



En side fra en af de tidligste trykte latinske udgaver af Euklids Elementerne. Bogen bærer stærkt præg af håndskrifttraditionen.

Det betyder imidlertid ikke, at Euklid var glemt i alle de mellemliggende år. Der blev fortsat undervist i hans geometri; men efter forskellige noter, kompendier osv. Men da de mere autoritative udgaver nu dukker op og spredes ved hjælp af den nye bogtrykkerkunst, fik den hurtigt en kolossal indflydelse, både på naturvidenskab, filosofi og mange andre felter. Og det er netop den aksiomatisk-deduktive metode, man begejstres for, og som vinder frem.

a. Påvirkninger fra Euklids metode

I 1687 udgiver Newton sit skelsættende værk *Principia* (fuld titel: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica), hvor han sammenfatter sin beskrivelse af, hvorledes naturlovene og tyngdekraften virker. Grundlaget er studiet af den virkelige verden. Alligevel kalder han sine love for »Aksiomer eller bevægelseslove«, og hele værkets opbygning er euklidisk.

Nogenlunde samtidig udgiver filosoffen Spinoza (1677) sit værk om *Etik*, med undertitlen: »fremstillet efter den geometriske metode«. Og han søger faktisk at gøre Euklid kunsten efter – der anføres definitioner, sætninger og beviser, så det næsten virker som en parodi.

Er Spinozas rolle i filosofihistorien beskeden, så har til gengæld den tyske filosof Immanuel Kant (1724 – 1804) øvet kolossal indflydelse på stort set alle senere filosoffer og store tænkere. I sin kritik af de filosoffer, især den engelske David Hume, der hævdede at menneskene ikke kunne vide noget med sikkerhed, fremhævede Kant netop geometrien som et område, hvor vi i alt fald var sikre; f.eks. sikre på, at vinkelsummen i en trekant er 180°.

ØVELSE

Hvad mener du om de to argumenter: Humes at vi intet kan vide med sikkerhed, f.eks. heller ikke at Solen i morgen står op i øst? Og Kants at der findes sikker viden, f.eks. sætningerne fra geometrien?

Inden for den økonomiske videnskab udgiver Adam Smith (den førende liberale økonom) i 1776 sit hovedværk *Wealth of Nations*, og i 1867 begynder Karl Marx (den førende socialistiske økonom) udgivelse af sit hovedværk *Kapitalen*. Begge værker er bygget op med forudsætninger, definitioner og stringente logiske ræsonnementer, der fører frem til at fastslå visse kendsgerninger (»sætninger«) osv.

I 1776 udsendes den amerikanske *Uafhængighedserklæring*, hvis hovedforfatter var Thomas Jefferson, der selv var en habil matematiker. Erklæringen er tydeligt præget af en aksiomatisk-deduktiv tankegang – fra formuleringen i begyndelsen: »Vi anser disse sandheder for selvindlysende…« (aksiom betyder selvindlysende sandheder), frem til hvor de erklærer, at de vil »bevise, at den engelske kong Georges regering ikke lever op til« de krav, man kan stille.

Flere områder og flere eksempler fra hvert kunne gives.

b. Elementerne

Hvad er det så for et værk, der har haft en sådan indflydelse på vores kultur, at den ifølge mange udsagn kun er overgået af Bibelen?

Elementerne består af 13 bøger, der i al korthed har følgende indhold:

Bog I:	Elementære konstruktioner	(»Trekantens geometri«)
Bog II:	Geometrisk Algebra	(»Firkantens geometri«)
Bog III:	Cirklens Geometri	
Bog IV:	Regulære Polygoner	(»Femkantens geometri«)
Bog V:	Størrelseslæren	(»Antikkens differential- og integralregning«)
Bog VI:	Ligedannethed	
Bog VII-IX:	Talteori	
Bog X:	Irrationale tal	(Bygger på Theaitetos' afhandling)
Bog XI:	Rumgeometri	
Bog XII:	Areal og Volumen	
Bog XIII:	Konstruktion af de 5 regulære polyedre	

Indholdsfortegnelsen giver et vist indtryk af, hvor omfattende et værk det er. Men det, som kom til at præge åndslivet siden, er strukturen i bøgerne. Euklid går frem på følgende måde:

Forrest er alle de *definitioner* (23 i alt), han får brug for i bog I. Den første definition i bogen er simpelthen: »1. Et punkt er det, som ikke kan deles.« Bang – hverken forord eller anden snak, men lige på.

Dernæst følger de *postulater* (aksiomer) (5 i alt), han mener, er nødvendige for denne geometri.

Og endelig sætter han nogle *almene aksiomer* op (5 i alt), som danner grundlag både for geometrien og for al anden matematik.

Den sidste gruppe giver en slags regler for, hvordan vi logisk argumenterer os frem.

Herefter klør han på med sætning efter sætning, hvor han skelner mellem *konstruktioner* – der afsluttes med »hvilket skulle gøres«, forkortet hsg – og *beviser* – der afsluttes med »hvilket skulle bevises«, forkortet hsb; den mere berømte latinske forkortelse qed, der står for »quod erat demonstrandum« anvendes stadig i mange matematikbøger.

<u>ØVELSE</u>

Prøv at overveje, hvor der er ligheder, og hvor der er forskelle mellem Euklids matematikbog og opbygningen af moderne matematikbøger.

En forudsætning nævnes ikke, selv om den næsten er vigtigere end alle andre: Ved samtlige konstruktioner må der kun anvendes passer og lineal!

Det kan måske forekomme lidt vilkårligt – hvorfor lige de to instrumenter? Men forklaringen er igen, at grækerne søgte at sætte så få og beskedne forudsætninger op som muligt; og uanset hvilke midler, der skulle tillades, måtte man under alle omstændigheder være helt enige om, hvad der må bruges. Det er nok betydeligt sværere at blive enige om at anvende et eller andet sindrigt apparat, end de simple passer og lineal. Det fortælles, at det var astronomen Oinopides fra Chios (levede ca. 450 f.Kr.), som var den første, der fastslog, at eneste tilladte hjælpemiddel er passer og lineal, og på Euklids tid var dette åbenbart så alment anerkendt, at det end ikke nævnes.

<u>ØVELSE</u>

Forestil dig du er en græker på Euklids tid. Hvordan vil du skaffe dig en lineal og en passer? Hvad er efter din opfattelse det mest oprindelige eller mest grundlæggende af de to instrumenter? Hvis du begynder med kun at have to punkter og afstanden mellem dem, hvor langt kan du så komme i dine konstruktioner ved brug af lineal alene? Hvor langt kan du komme ved brug af passer og lineal alene?

EUKLIDS ELEMENTER*

BOG 1

Definitioner

1. Et punkt er det, der ikke kan deles.
2. En linie er en længde uden bredde.
3. En linies begrænsninger er punkter.
4. En ret linie er en linie, som ligger *lige* mellem punkterne på den.
5. En flade er det, der kun har en længde og en bredde.
6. En flades begrænsninger er linier.
7. En plan flade er en flade, som ligger *lige* mellem de rette linier i den.
8. En plan vinkel er hældningen mellem to linier, der ligger i samme plan, har et punkt fælles og ikke ligger på en ret linie.
9. Når de linier, der indeslutter vinkler, er rette, kaldes vinklen retliniet.
10. Når en ret linie er oprejst på en anden, så at de ved siden af hinanden liggende vinkler bliver lige store, er enhver af de lige store vinkler ret; og denne rette linie, der er oprejst på den anden, kaldes vinkelret på denne.
11. Em stump vinkel er en vinkel, som er større end en ret.
12. En spids vinkel er en vinkel, som er mindre end en ret.
13. En omkreds er begrænsningen af noget.
14. En figur er det, der indesluttes af en eller flere omkredse.
15. En cirkel er en plan figur, indesluttet af en sådan linie (som kaldes periferien), at alle de rette linier, der kan trækkes ud til den fra et inden for figuren liggende punkt, er indbyrdes lige store.
16. Dette punkt kaldes centrum i cirklen.
17. En diameter i cirklen er en ret linie, trykket gennem centrum og begrænset til begge sider af cirkelperiferien, og den halverer også cirklen.
18. En halvcirkel er en figur, som indesluttes af en diameter og den af diameteren afskårne periferi. Halvcirklens centrum er det samme som cirklens.
19. Retliniede figurer er sådanne, som indesluttes af rette linier: tresidede, som indesluttes af tre, firesidede af fire, flersidede af flere end fire rette linier.
20. Af tresidede figurer kaldes den, der har alle tre sider lige store, en ligesidet, den som kun har to sider lige store, en ligebenet, og den, som har alle tre sider ulige store, en skæv trekant.
21. Af tresidede figurer kaldes endvidere den, der har en ret vinkel, en retvinklet, den, der har en stump vinkel, en stumpvinklet, den, der har alle tre vinkler spidse, en spidsvinklet trekant.
22. Af firesidede figurer kaldes den, der både er ligesidet og retvinklet, et kvadrat, den, der er retvinklet, men ikke ligesidet, et rektangel, den, der er ligesidet, men ikke retvinklet, en rhombe, den, der både ar modstående sider og vinkler lige store, men hverken er ligesidet eller retvinklet, en rhomboide, de øvrige firesider kunne kaldes trapezer.
23. Parallelle linier er rette linier, der ligger i samme plan, og som, når de forlænges ubegrænset til begge sider, ikke mødes til nogen af siderne.

Forudsætninger

Lad det være forudsat:

1. At man kan trække en ret linie fra et hvilket som helst punkt til et hvilket som helst andet punkt.
2. At man kan forlænge en begrænset linie i ret linie ud i eet.
3. At man kan tegne en cirkel med et hvilket som helst centrum og en hvilken som helst radius.
4. At alle rette vinkler er lige store.
5. At når en ret linie skærer to rette linier og de indvendige vinkler på samme side er mindre end to rette, så mødes de to linier, når de forlænges ubegrænset, på den side, hvor de to vinkler, der er mindre end de to rette, ligger.

Almindelige begreber

1. Størrelser, der er lige store med samme størrelse, er indbyrdes lige store.
2. Når lige store størrelser lægges til lige store størrelser, er summerne lige store.
3. Når lige store størrelser trækkes fra lige store størrelser, er resterne lige store.
4. Størrelser, der kan dække hverandre, er indbyrdes lige store.
5. Det hele er større end en del deraf.

De første to sider af Elementerne, Bog I, i dansk oversættelse.

Det, som har imponeret verden siden, er dels Euklids evne til at opstille og fastholde sit aksiomsystem og dels den uhyre præcision og nøjagtighed i alle detaljer, der præger hans argumentation. I det væsentlige lever hans system endog op til kravene til et moderne aksiomsystem. Disse krav er følgende tre:

1. Aksiomsystemet skal være *fuldstændigt*, dvs. der må ikke være uudtalte forudsætninger.
2. Aksiomsystemet skal være *konsistent*, dvs. man må ikke kunne udlede to sætninger, der er i *modstrid* med hinanden.
3. Aksiomerne skal være *uafhængige*, dvs. man har brug for alle aksiomer og kan ikke udlede nogen af disse ud fra andre af aksiomerne.

Efter totusind års forsøg på at vise, at parallelpostulatet (nr. 5) <u>ikke</u> er uafhængig af de andre, lykkedes det midt i 1800-tallet nogenlunde samtidig for ungareren Wolfgang Bolyai og russeren Nikolaj Lobatjevskij at vise, at postulatet <u>var</u> nødvendigt for at få udviklet <u>plan</u>geometrien. Euklid havde haft ret over for de tusinder, der havde forsøgt at vise det modsatte.

Med andre udgaver af parallelpostulatet kunne man nemlig få andre udgaver af geometrien; disse andre geometrier blev i begyndelsen anset som den reneste og mest abstrakte matematik, uden relation til virkelighedens verden, indtil Einstein faktisk anvendte den ikke-euklidiske geometri i sin relativitetsteori.

ØVELSE

Overvej det første krav om fuldstændighed. Kan du finde andre mangler hos Euklid end de nævnte med passer og lineal, dvs. andre ting, vi bruger, uden det er nævnt i forudsætningerne.

4. De uløste konstruktionsopgaver

Højdepunktet i Euklids Geometri er konstruktionen af de fem regulære polyedre og beviset for, at der ikke findes andre end disse fem. Dette er emnet for Bog XIII.

Euklid omtaler imidlertid ikke de tre store uløste problemer: Kan man ved hjælp af passer og lineal konstruere en løsning på følgende:

1. »Terningens fordobling«: Givet en terning. Konstruér en ny terning med dobbelt så stort et rumfang.
2. »Vinklens tredeling«: Givet en vinkel. Del den i tre lige store dele.
3. »Cirklens kvadratur«: Givet en cirkel. Konstruér et kvadrat, der har samme areal som cirklen.

Problemerne var kendt af alle og enhver. De blev omtalt af filosoffer og forfattere og voldte hovedbrud for mangen en matematiker og endnu flere glade amatører. Anstrengelserne for at løse dem var langtfra spildte, for de førte til mange andre interessante resultater. Men de tre problemer forblev uløste.

At så enkle problemer er så svære at løse, er for mange mennesker i sig selv vanskelig at forstå. Men det er faktisk langt fra enestående i matematikhistorien, næsten tværtimod. Tænk på firfarveproblemet1, eller Fermats store sætning[2].
Lad os formulere de tre klassiske problemer lidt mere præcist:

1. Givet en terning med rumfang 1, dvs. sidelængde 1. Kan vi konstruere en terning med rumfang 2, dvs. Kan vi konstruere et linjestykke med længde $\sqrt[3]{2}$?
2. Nogle vinkler, som 90° eller 180°, kan vi let tredele. Problemet er, om alle kan tredeles. Eller omvendt: Findes der vinkler, som ikke kan? Kan eksempelvis også vinklen på 60° eller på 30° tredeles?
3. Arealet af en cirkel er $\pi \cdot r^2$. Arealet af enhedscirklen er således π. Et kvadrat med areal π må have kantlængde $\sqrt{\pi}$. Hvis vi kan konstruere π, kan vi imidlertid også konstruere $\sqrt{\pi}$, og omvendt – det behandler vi på side 26 – så problemet er: Kan vi konstruere et linjestykke med længde π?

a. Myter om de tre problemer

Problemerne fascinerede samtiden i en sådan grad, at der blev skabt en række myter om dem, hvoraf den kendteste fortæller følgende:

1 Firfarveproblemet rejser spørgsmålet, om man kan nøjes med at bruge 4 farver, hvis et atlas skal farvelægges, så landene adskilles ved hjælp af farverne. Det hævdes i dag bevist med et gigantisk computerbevis.

2 Fermats store sætning, som han formulerede i margenen på en gammel matematikbog, lyder: »Der findes ingen hele tal x, y og z, som opfylder ligningen $x^n + y^n = z^n$, hvor $n > 2$. Efter 350 år blev den endelig vist, men ved hjælp af den mest avancerede matematisk teori hentet fra mange forskellige områder af matematikken.

Øen Delos midt i det ægæiske hav blev ramt af pest, og i deres nød henvendte befolkningen sig til oraklet i Delfi for at spørge om råd. Her fik de som altid et tåget svar, nemlig at de skulle drage hjem og mildne gudernes vrede ved at gøre det terningformede alter, de havde i deres Apollontempel på øen, dobbelt så stort.

De drog hjem og tænkte længe over svaret. Hvordan fordobles en terning? Da de havde tænkt længe, og ingen kunne finde svaret, henvendte de sig til *Akademiet* i Athen, hvor de klogeste hoveder var samlet. Platon mente nok, de havde taget svaret for bogstaveligt – oraklet havde snarere ment, at indbyggerne på Delos skulle lægge sig mere efter matematik.

Alligevel gik de i gang med problemet; men det viste sig umuligt for dem at løse det, når de kun måtte bruge passer og lineal. I deres søgen efter en løsning konstruerede de dog et apparat, der kunne klare opgaven, som vi skal se lidt senere.

Og apparatet var, hvad de kunne give videre til indbyggerne på Delos. Det forlyder ikke, om gudernes vrede blev mildnet.

Efter denne fortælling kaldes problemet om terningens fordobling for »det deliske problem«.

Historien er jo god nok; men den er nu nok løgn. For problemet var kendt længe før Platons tid. Andre udgaver af historien skubber den nogle årtier tilbage og taler om den pest, der ramte Athen omkring 430, og som rev en fjerdedel af byens 300.000 indbyggere i døden. Men det er nu stadig ikke langt nok tilbage i tiden.

Euripides, en af datidens store forfattere, går helt til den anden yderlighed og skubber myten mere end 1000 år tilbage, til Kretas storhedstid under kong Minos. Da en af dennes nærmeste skulle begraves, og kong Minos så den terningformede udgravning, så befalede han ifølge Euripides, at graven skulle gøres dobbelt så stor, uden at dens smukke form blev ændret.

Atter andre taler om opgaver, hvor det drejer sig om at fordoble statuer – og det er principielt samme problem.

Det fremgår i øvrigt af en af Platons dialoger, *Republikken*, at han faktisk var interesseret i problemet. I en diskussion mellem Sokrates (Platons talerør) og Glaukon hedder det:

»Glaukon: Men Sokrates, dette emne – forstørrelse af terningen – synes endnu ikke at være blevet undersøgt.
Sokrates: Der er to grunde dertil; for det første, eftersom ingen by værdsætter dem, går disse undersøgelser meget trægt, på grund af deres vanskelighed. Og for det andet behøver de, der undersøger emnet, en leder.«

Mon ikke Platon her ubeskedent tænkte på sig selv?

b. Løsning med andre metoder end med passer og lineal

1. Terningens fordobling

Terningens fordobling er et rumgeometrisk problem: En terning med sidelængde a har rumfang a^3. Kan vi konstruere sidelængden b i en terning med rumfang $2a^3$? Med vore dages betegnelser ved vi:

$$b = a \cdot \sqrt{2}$$

Problemet ville være lettere at overskue, mente grækerne, hvis det kunne »oversættes« fra 3 til 2 dimensioner. Og det kan det!

Allerede Hippokrates viste (omkring 430 f.Kr.), at terningens fordobling svarer til problemet om at konstruere to sammenhørende mellemproportionaler:

Vi har givet linjestykkerne a og d. Konstruér to andre linjestykker b og c, så der gælder:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

Vi kan (og grækerne kunne) let konstruere én mellemproportional: Givet a og d, konstruér et x, så:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{d}$$

(Har du ikke konstruktionen præsent, så se under: Geometriske konstruktioner på side 27).

Derfor er det jo en nærliggende tanke, at vi kommer et stort skridt nærmere en løsning ved en sådan »oversættelse«. Lad os derfor lige indse, at det faktisk forholder sig, som Hippokrates viste. Ét argument herfor kan lyde:

Vi begynder med en terning med kantlængde a. Lad os et øjeblik sige, vi kunne konstruere en dobbelt så stor terning med kantlængde b. Kan vi gøre det én gang, kan vi også gentage det, så vi laver nu en terning dobbelt så stor som b-terningen, nu med kantlængde c. Så er det klart, at c's forstørrelse i forhold til b, må være det samme som b's forstørrelse i forhold til a. Altså:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$$

Vi gentager processen, nu med c-terningen, der fordobles til en terning med kantlængde d. Igen må derfor gælde:

$$\frac{d}{c} = \frac{c}{b}$$

Men nu har vi jo fordoblet den oprindelige terning tre gange, så den er $2^3 = 8$ gange så stor som a-terningen. Derfor må den have kantlængden $2a$, idet der jo gælder, at $(2a)^3 = 8a^3$. Altså:

$$d = 2a\,,$$

som indsættes i ligningen ovenfor, så vi alt i alt får:

$$\frac{2a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a} \qquad (*)$$

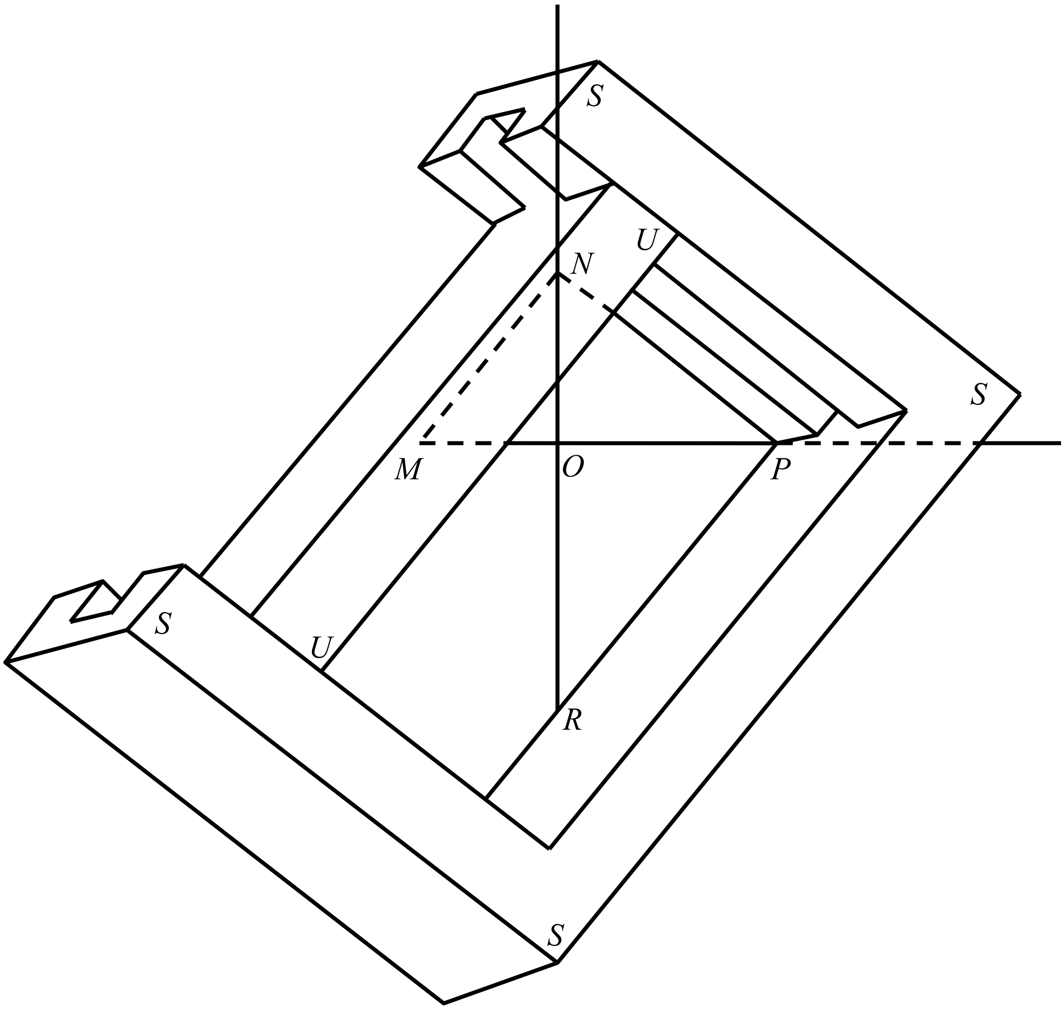
a og $2a$ kender vi. Kan vi løse problemet om »konstruktion af sammenhørende mellemproportionaler«, er opgaven derfor løst: Det b, vi får i en sådan konstruktion, er den ønskede kantlængde:

$$b = \sqrt{a}$$

ØVELSE

Finder du argumentet for løst, så gennemfør det ved at sætte $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ og $c = \sqrt{b}$ og se at (*) er opfyldt.

Det skulle vise sig, at det heller ikke var muligt at løse denne udgave af problemet alene med brug af passer og lineal. Men arbejdet var dog langt fra spildt. Dels kom der en række praktiske løsninger ud af det, som f.eks. følgende, der efter overleveringen skulle være det apparat, Akademiet konstruerede til løsning af det deliske problem:



Stykket *OM* er *a*, og stykket *OR* er 2*a*. I apparatet skydes *U*-stykket på plads, så det kommer til at ligge som vist på tegningen. Ved at se på ensvinklede trekanter finder vi så:

$$\frac{|OR|}{|OP|} = \frac{|OP|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OM|}$$

Sættes $|OP| = c$ og $|ON| = b$, står der altså $\frac{2a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$.

Men vigtigere for matematikkens udvikling var det, at undersøgelser over »de sammenhørende mellemproportionaler« førte frem til opdagelsen af parabler, ellipser og hyperbler – det, vi samlet kalder for keglesnittene (fordi disse figurer kan fremkomme ved at lade en plan snitte igennem en kegle).

Det var en anden af de store før Euklid, matematikeren Menaichmos (ca. 350 f.Kr.), der nåede frem til dette. Med moderne ligninger og koordinatsystemer er det let nok at se. Dengang var det uhyre kompliceret; koordinatsystemet blev først lanceret som et nyttigt redskab i geometrien af den franske matematiker og filosof Descartes i 1637.

Lad os se, hvorledes disse keglesnit dukker op fra »de sammenhørende mellemproportionaler«. Vi ser igen på ligningen med de tre forhold og kalder de søgte stykker for *x* og *y* (mellemproportionalerne) og dem, vi kender, for *a* og *b*. Vi skal altså finde *x* og *y* ud fra følgende:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Der står faktisk tre ligninger her:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}\ (1) \qquad \frac{x}{y}=\frac{y}{b}\ (2) \qquad \frac{a}{x}=\frac{y}{b}\ (3)$$

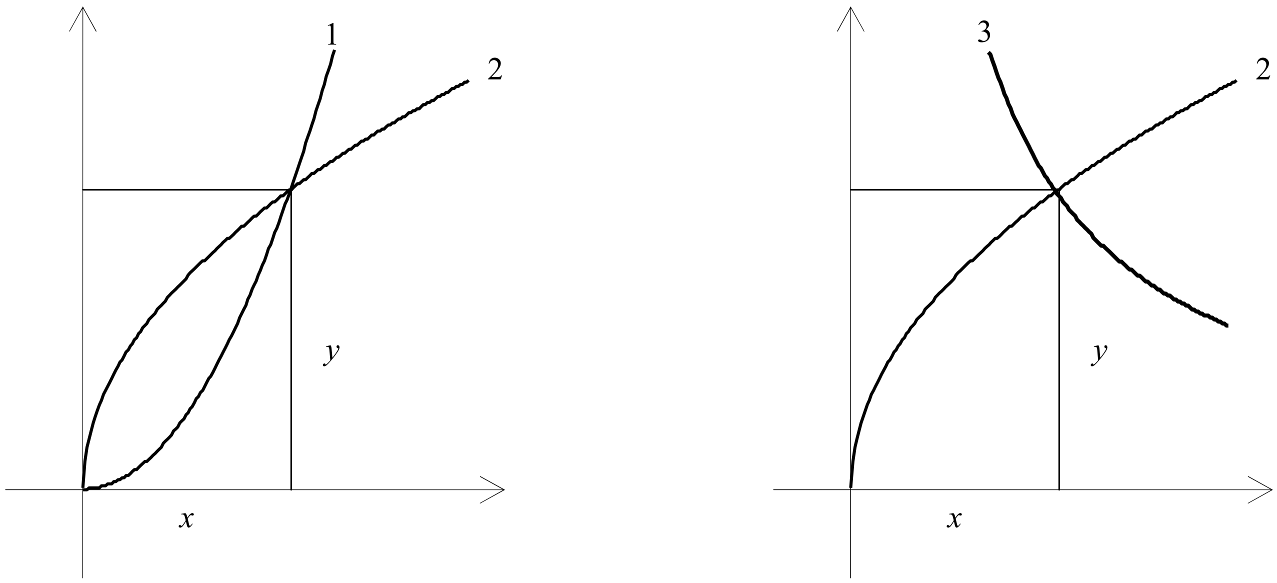
I (2) isolerer vi nu x, og i (1) og (3) isolerer vi y; så får vi:

$$y=\frac{1}{a}\cdot x^2\ (1) \qquad x=\frac{1}{b}\cdot y^2\ (2) \qquad y=a\cdot b\cdot\frac{1}{x}\ (3)$$

Disse ligninger fremstiller kurver, vi kender:

- Den første er en almindelig parabel.
- Den anden er en parabel, der »ligger ned«, dvs. den er symmetrisk om x-aksen.
- Den tredje er en hyperbel.

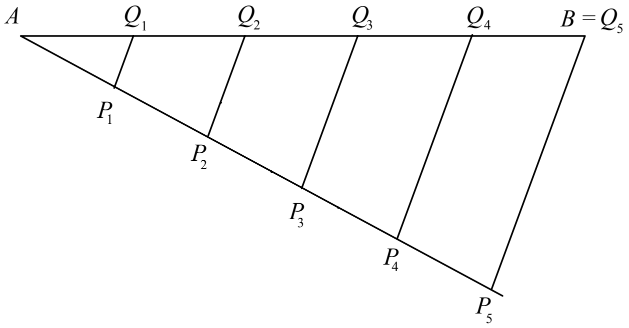
Men det betyder jo, at vi kan finde x og y som skæringspunkterne mellem to parabler (1 og 2) eller som skæringspunkt mellem en parabel og en hyperbel (1 og 3 eller 2 og 3):



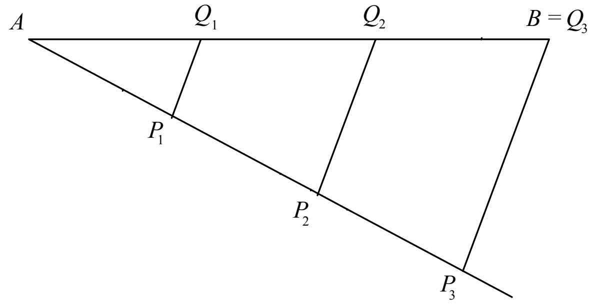
Vi kan imidlertid ikke tegne parabler og hyperbler alene med brug af passer og lineal. Men et nyt område af geometrien var under udvikling. Godt 100 år senere var denne teori allerede drevet så vidt, at en af de tre store Appolonius (262 – 190) kunne skrive et værk om keglesnittene, der var lige så imponerende på sit felt, som *Elementerne*.

2. Vinklens tredeling

Det er let at tredele et linjestykke. Eller for den sags skyld dele det op i n lige store dele, hvor $n \in \mathbb{N}$: Afsæt en vilkårlig vinkel, hvor linjen $l = AB$ ligger ud af det ene ben. Afsæt n lige lange stykker ned af det andet ben, så vi her får punkterne $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Forbind nu det sidste P_n med B og tegn gennem $P_1, P_2, \ldots$ osv. linjer parallelle med P_nB. Deres skæringspunkter med linjen l kalder vi for $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, og disse punkter deler AB i n lige store dele:



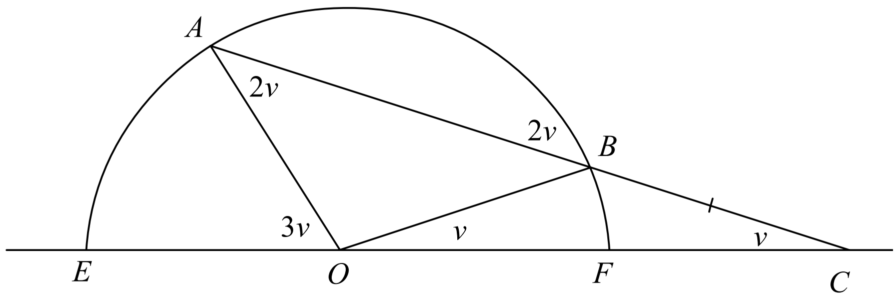
Tilflædet $n = 5$



Tilfældet $n = 3$

Når dette er tilfældet, er det jo ikke en fjern tanke at rejse problemet om tredeling af en vinkel. Men det kunne mærkværdigvis ikke løses så let – ja det viste sig at være uløseligt. Men med flere hjælpemidler gik det fint. Arkimedes lavede den nok enkleste konstruktion, hvor han brugte en »indskydningslineal«, dvs. en lineal med måleenheder. Han gjorde som følger:

I enhedscirklen afsættes den vinkel, vi vil tredele, i 2. kvadrant (se figuren). Vi kalder vinklen $3v$, og ønsker altså at finde en vinkel af størrelse v.



Vi tager nu linealen, lægger den, så den rører punktet A, således at vi får afsat et stykke BC, der har længden 1. Det kan vi gøre ved at prøve os frem. Når BC er afsat, er trekanterne OAB og OBC begge ligebenede, og ved at se på vinkelsummen finder vi vinklerne som vist på tegningen og specielt:

$$\measuredangle C = v,$$

altså netop en tredjedel af den, vi begyndte med.

<u>ØVELSE</u>

Gennemfør beviset for at $\measuredangle C = v$.

I deres jagt på en løsning fandt de græske matematikere frem til en række nye, komplicerede kurver, som *Kvadratricen*, *Konkoiden*, *Arkimedes' spiral* og andre, som man i dag studerer under vektorfunktioner. Men ingen af dem kunne konstrueres med passer og lineal.

Gennem århundrederne fortsattes forsøgene, og mange troede, de havde fundet en løsning, som de så sendte til matematikere og videnskabelige akademier i håb om berømmelse og belønning. Det gik så vidt, at det franske Videnskabernes Akademi i 1775 udsendte en erklæring om, at det fremover hverken ville bedømme vinkeltredelinger, cirkelkvadraturer eller evighedsmaskiner.

I deres begrundelse skrev de, at der gik rygter om, at regeringer havde udlovet store dusører til dem, som løste problemerne, og at det var blevet til en sand galskab hos mange, som opgav deres arbejde og blev ganske forstyrrede i hovederne og i øvrigt ikke ville tage imod fornuft og acceptere, at de løsninger, de kom med, var fejlagtige.

Men det stoppede ikke de glade amatører, og mange lavede utroligt komplicerede konstruktioner, som var tæt ved, men aldrig eksakt løste opgaven. Således bragtes i årene omkring 1930 i et af de store tyske matematiktidsskrifter nogle artikler på grundlag af en skrædders ihærdige arbejde med passer og lineal. Den første hed: »Die Winkeldreiteilung des Schneidermeister Kopf« og den næste: »Eine neue Winkeldreiteilung des Schneidermeister Kopf«.

Mere frugtbar var udviklingen blandt de arabiske matematikere omkring år 1000. De fandt frem til, at vinkeltredelingen kunne »oversættes« til et spørgsmål, om en bestemt tredjegradsligning havde en løsning. Dette blev senere fulgt op af Descartes (1596 – 1650), der i sin præsentation af koordinatsystemet behandlede kurver af tredje, fjerde og højere grad, for at vise den nye analytiske geometris overlegenhed. Descartes' argument var nogenlunde som følger:

Lad os igen kalde den vinkel, vi vil tredele, for $3v$, og begynde med at afsætte en vinkel på $6v$ i en enhedscirkel med centrum i O. De to punkter A og D forbindes, og vi antager nu, at vi kunne tredele vinklen på $6v$ for at analysere problemet nøjere. Tredeling af $6v$ ville give vinkler på $2v$ og punkterne B og C.

Trekanterne OAB, OBC og OCD er alle ligebenede og har alle topvinklen $2v$, dvs. vinklerne ved grundlinjen er $90° - v$, f.eks.

$\measuredangle A = \measuredangle B = 90° - v$

Trekant OAD også ligebenet, med topvinkel $6v$ og vinkler ved grundlinjen:

$\measuredangle OAD = \measuredangle ODA = 90° - 3v$

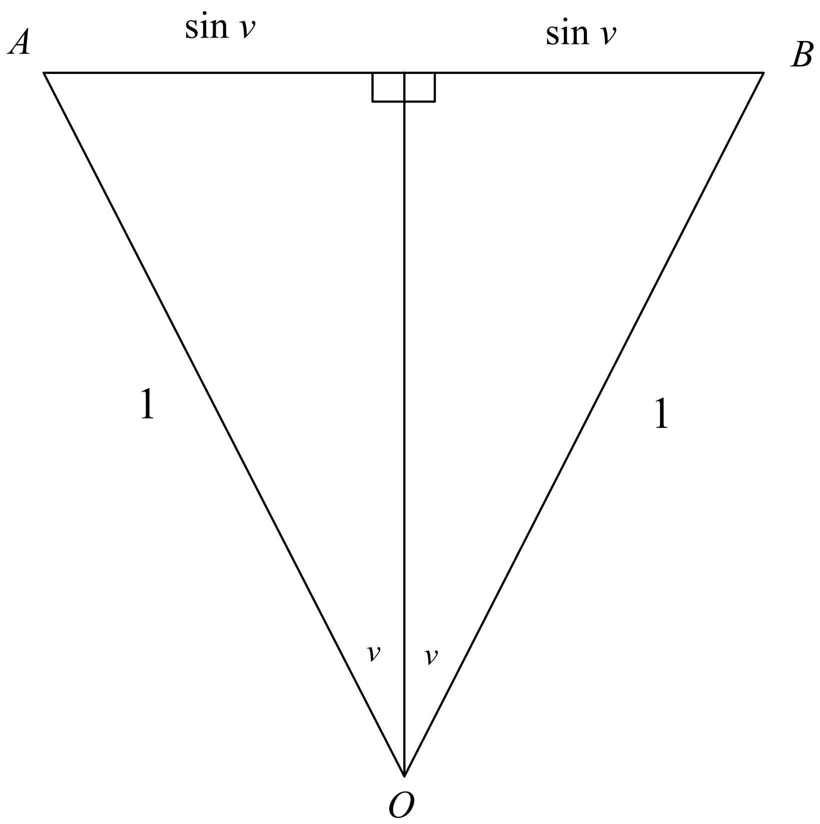
Derfor ser vi, at i trekant ABE er $\measuredangle EAB$ lig med $2v$, og da $\measuredangle EBA = 90° - v$, må også $\measuredangle BEA$ være $90° - v$, så trekanten er ligebenet og ligedannet med trekant OAB. Altså:

$$\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{|BE|}{|AB|} \text{ eller } |BE| = \frac{|AB|^2}{|AO|} = |AB|^2,$$

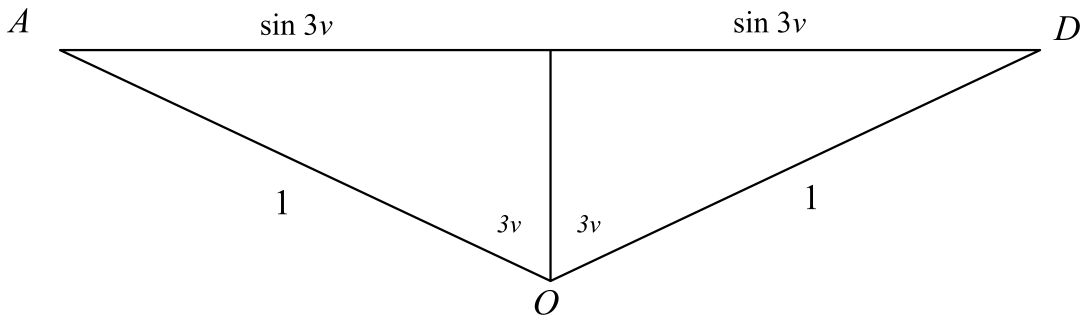
da $|AO| = 1$.

Vores mål er at kunne konstruere sin(v) ud fra kendskab til sin($3v$), for så kan vi også på enhedscirklen konstruere v ud fra $3v$.

Vi vil nå frem til dette ved at udnytte, at trekant OAB er ligebenet, så $|AB| = 2 \cdot \sin(v)$:



samt udnytte, at trekant *OAD* er ligebenet, så $|AD| = 2 \cdot \sin(3v)$:



Nu mangler vi blot at få *AD* udtrykt ved *AB*.

Derfor trækker vi en linje *l* parallel med *OC*, og som skærer *AD* i *G*. Nu er $|BC| = |GF|$, og vi ved, at $|DF| = |DC| = |AB|$. Heraf ser vi, at $|AD| = |DF| + |GF| - |GE| \Leftrightarrow |AD| = 3 \cdot |AB| - |GE|$.

Se nu på trekant *BGE*. Den er konstrueret, så $\measuredangle G = \measuredangle F = 90° - v$.
$\measuredangle E$ er også lig med $90° - v$. Men så er trekant *BGE* ligebenet og ligedannet med trekant *ABE*, dvs.

$$\frac{|GE|}{|BE|} = \frac{|BE|}{|AB|} \Leftrightarrow |GE| = \frac{|BE|^2}{|AB|}$$

Indsæt nu $|BE| = |AB|^2$:

$$|GE| = \frac{\left(|AB|^2\right)^2}{|AB|} = |AB|^3, \text{ dvs.}$$

$$\begin{aligned}
|AD| &= 3 \cdot |AB| - |GE| && \Leftrightarrow \\
|AD| &= 3 \cdot |AB| - |AB|^3 && \Leftrightarrow \\
2 \cdot \sin(3v) &= 3 \cdot 2 \cdot \sin(v) - (2 \cdot \sin(v))^3 && \Leftrightarrow \\
2 \cdot \sin(3v) &= 6 \cdot \sin(v) - 8 \cdot \sin^3(v) && \Leftrightarrow \\
\sin(3v) &= 3 \cdot \sin(v) - 4 \cdot \sin^3(v)
\end{aligned}$$

Hermed er tredelingen oversat til løsning af en tredjegradsligning: Givet tallet sin(3*v*). Find det *x*, der opfylder:

$$-4x^3 + 3x = \sin(3v)$$

Dette *x* er så sin(*v*), og kan på enhedscirklen give os *v*.

<u>EKSEMPEL</u>

Tredeling af en vinkel på 30°. Vi ved, at $\sin(30°) = \frac{1}{2}$. Altså findes sin(10°) ud af ligningen:

$$-4x^3 + 3x = \tfrac{1}{2} \text{ eller } 8x^3 - 6x + 1 = 0$$

Det medførte ikke, at man nu kunne løse problemet med passer og lineal. Men oversættelsen fra et geometrisk til et algebraisk problem skulle vise sig at være et afgørende redskab til at bevise umuligheden af at løse opgaven.

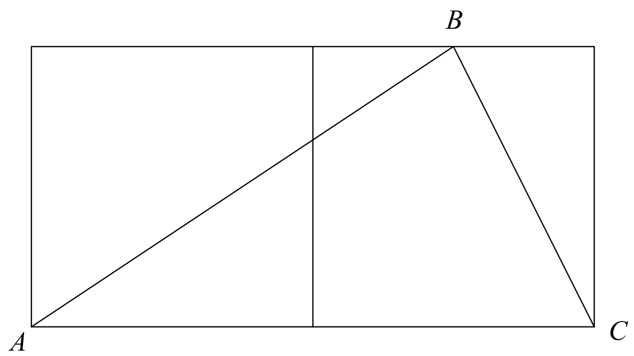
3. Cirklens kvadratur

Dette er langt det sværeste af problemerne. Man lærte tidligt at kvadrere vilkårlige polygoner, dvs. til en vilkårlig polygon (mangekant) at finde et kvadrat med samme areal.

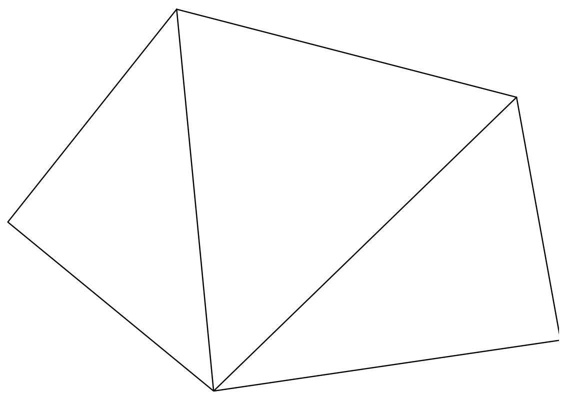
Det kan man indse gennem et par skridt. Først er vi tilfredse med at omsætte til rektangler.

ØVELSE

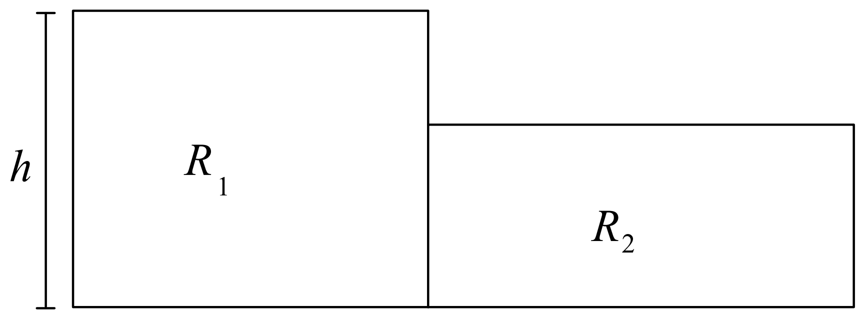
Se på figuren og vis, hvorledes man kan finde et rektangel med samme areal som trekant ABC:



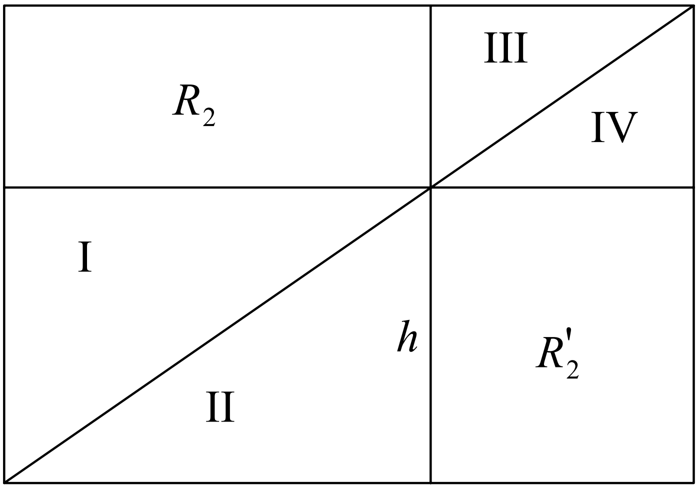
Når vi har en polygon, splittes den op i trekanter, og hver af disse omsættes til et rektangel:



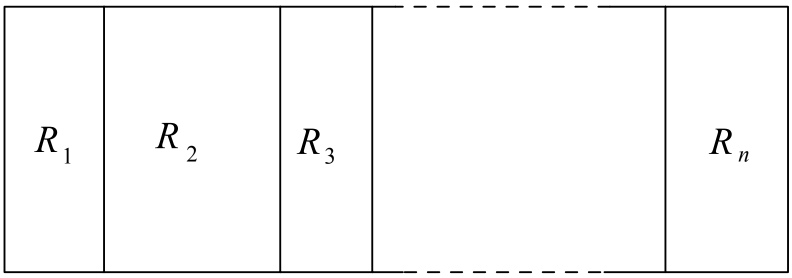
Når vi således får flere rektangler, skal de stykkes sammen, dvs. gives en fælles højde. Det sker lettest på følgende måde: Givet rektanglerne R_1 og R_2:



R_2 skal omformes til et med højden h. Tegn dertil følgende figur:



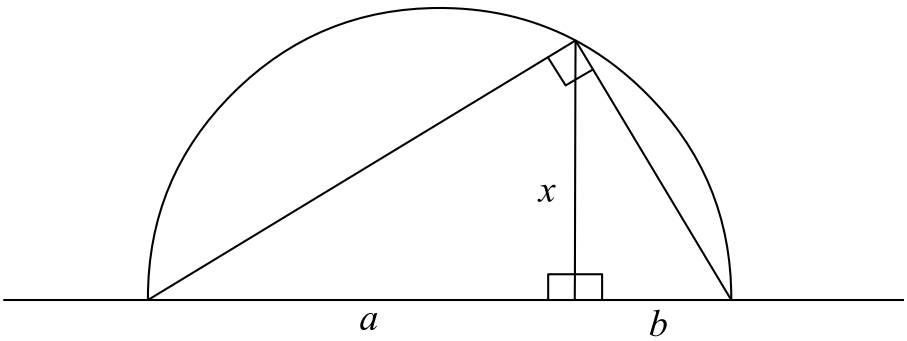
Har alle rektangler nu fået samme højde, stykkes de sammen til ét ved blot at sætte dem i forlængelse af hinanden:



dvs. polygonens areal er lig med rektanglets areal.

Når vi har fundet ét rektangel med siderne a og b, omformes dette slutteligt til et kvadrat ved konstruktion af mellemproportionalen x til a og b:

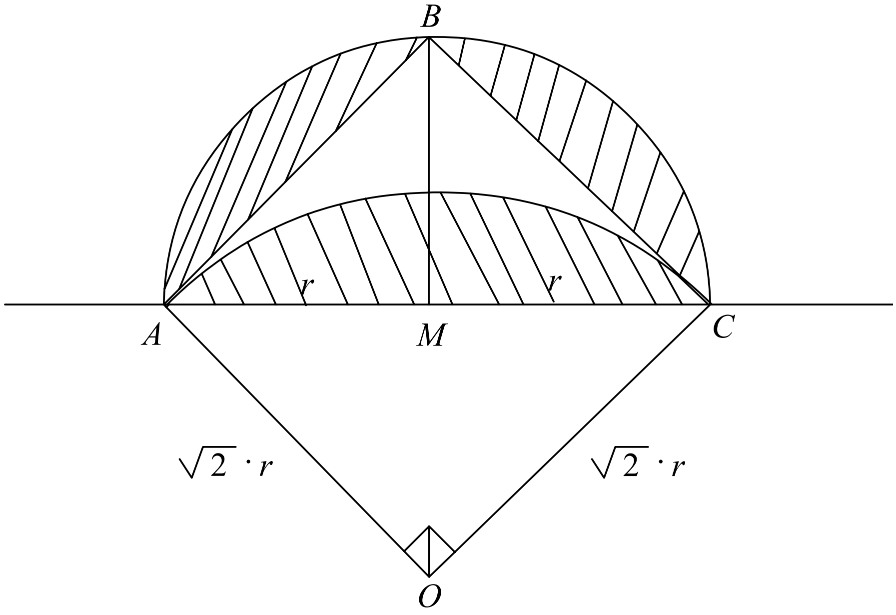
$\frac{x}{b} = \frac{a}{x}$ eller $x^2 = a \cdot b$



Altså har det søgte kvadrat siden x, som vi netop har konstrueret (for denne konstruktion se afsnit 5).

En cirkel kan tilnærmes med polygoner – laves flere og flere kanter, kan vi komme tættere og tættere på cirkelbuen. Så skulle man måske tro, at også cirklen kan kvadreres.

Det lykkedes tidligt for matematikeren Hippokrates (ca. 430 f.Kr.) at kvadrere visse halvmåner, dvs. figurer afgrænset af to cirkelbuer. Det gøres som følger. Vi tegner en halvmåne afgrænset yderst af en halvcirkel med radius r og centrum M og inderst af en bue fra en cirkel med radius $r = \sqrt{2}$ og centrum O:



Siderne i trekant *AOC* opfylder Pythagoras' læresætning, derfor er $\measuredangle O = 90°$.

I halvcirklen tegnes en ligebenet, retvinklet trekant *ABC*. Cirkelafsnittene over *AB* og *BC* (de skraverede) svarer begge til 90°. Det samme gør cirkelafsnittet over *AC*, så cirkelafsnittene er ligedannede. Når radius ganges op med $\sqrt{2}$ (fra *r* til $r \cdot \sqrt{2}$), så ganges arealet op med $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Dvs. arealet af afsnittet over *AC* er 2 gange arealet af afsnittet over *AB*, dvs. lig med summen af de to afsnit over *AB* og over *BC*.

Da således det / / / / skraverede er lig med det \ \ \ \ skraverede, er halvmånens areal lig med arealet af trekant *ABC*.

Og en trekant kan kvadreres! Altså kan halvmånen kvadreres. Det måtte naturligt nok bestyrke troen på, at cirkler kan kvadreres.

Men ak nej – også her måtte man ty til de komplicerede kurver som f.eks. *Arkimedes' spiral* for at løse problemet.

En af de store skuespilforfattere Aristofanes lod sig i øvrigt inspirere af dette problem til at berige sproget med et nyt udtryk til at karakterisere tåbelige mennesker: sådan nogle »cirkelkvadratører« (fra *Fuglene*).

5. Vigtige geometriske konstruktioner

Grækerne forlod ikke aritmetikken og den abstrakte bogstavregning (algebra), da de vendte sig til geometrien. Men geometrien rejste tilsyneladende ikke uforståelige paradokser.

Uanset at punkter og linjer er abstraktioner (hvem kan tegne en linje uden bredde!), så følte de nok som vi, at papiret, sandet på stranden eller en tavle med vore linjer og cirkler er en så god repræsentation af den abstrakte geometriske model, at vi ikke så let påtvinges ubehagelige spørgsmål som: »Findes der nu virkelig et punkt, hvor de to cirkelbuer ser ud til at skære hinanden?« Vi tegner jo cirkelbuen uden at hæve blyanten, så de må skære hinanden.

Samtidig var de bedre i stand til at gennemføre en stringent opbygning af geometrien end inden for talbehandling eller algebra. Det kender alle – et område, man længe har beskæftiget sig med, har afsat så mange indlysende regler og metoder, at det er svært at komme til bunds i, hvad der er forudsætninger, og hvad vi slutter os til ud fra forudsætningerne.

I geometrien opstillede Euklid definitioner og aksiomer, og samtidig blev det »kanoniseret«, at følge det krav, som Oinopides fra Chios havde rejst – nemlig at det kun var tilladt at bruge passer og lineal. I opbygningen af en matematisk teori må det naturligvis fastlægges, hvad der er tilladt, og hvad der ikke er.

Når de valgte at nøjes med så beskedne hjælpemidler, var det givetvis med henblik på at reducere til så få forudsætninger som muligt. Dette er i god overensstemmelse med moderne krav til aksiomsystemer.

a. Andre aksiomsystemer

Man kunne naturligvis have valgt andre aksiomer og andre hjælpemidler. Som tidligere omtalt vil vi få forskellige former for ikke-euklidisk geometri, hvis parallel-postulatet erstattes med et andet.

Et helt andet projekt blev i begyndelsen af dette århundrede udviklet af en af vore store danske matematikere Hjelmslev: Den såkaldte virkelighedsgeometri. Denne byggede på sådanne synspunkter som: »I virkeligheden« skærer to linjer ikke hinanden i et punkt, men i et lille linjestykke! – se selv efter når du tegner.

Hjelmslev udviklede et helt aksiomsystem som grundlag for sin teori, og som den vigtigste metode satte han: At prøve sig frem!

I Hjelmslevs geometri er det uhyre simpelt at tredele en vinkel. Det er faktisk den første konstruktion i hans lærebog om det, han kalder »Geometriske eksperimenter«: Tag en målepasser (en med nål i begge ender), og prøv at anslå, hvor stor en tredjedel af en given vinkel er. Mål efter – og juster ind, hvis den var lidt for stor osv. Metoden er overlegen, fordi den giver et langt mere nøjagtigt resultat »i virkeligheden«, end alle andre beregningsmetoder giver, fastslog Hjelmslev. Og så er den oven i købet selvkontrollerende! For man gør netop prøve, ved at bruge passeren som omtalt. At have metoder, der er selvkontrollerende, ville ikke være så dårligt.

Når Hjelmslevs geometri ikke slog an, skyldes det især, at matematikken er interesseret i mere end gode beregninger. I matematik er vi grundlæggende interesseret i at forstå *hvorfor*, eller *hvorfor ikke* noget gælder.

b. Konstruktioner med passer og lineal

Da grækerne havde fastlagt forudsætningerne i geometrien, løste de derefter algebraiske problemer ved at oversætte til geometri og løse dem der. Denne særlige disciplin er med et udtryk af den danske matematiker Zeuthen blevet kaldt geometrisk algebra, og Euklids bog II handler stort set om dette. Eksempelvis løste de andengradsligninger ved geometriske konstruktioner.

I dag er det snarere omvendt – der er rimeligt styr på det algebraiske, og vi oversætter geometriske problemer til algebraiske, hvor de så løses, som vi skal se senere.

Indenfor geometrisk algebra bygger man på en række vigtige konstruktioner, som vi får brug for; men som det også i sig selv er af interesse at kunne beherske. Vi begynder med følgende vedtagelser:

- Tal oversættes til linjestykkers længde.
- Med a betegnes både tallet a og et linjestykke af længde a. a er således positiv. Et negativ tal angives $-a$, hvor a er positiv.
- Med $a \cdot b$ betegnes hos Euklid ofte rektanglet med siderne a og b og areal $a \cdot b$. Denne oversættelse af tal til geometri er i øvrigt sprogligt bevaret i udtrykket »kvadratet på a« for a^2. Vi vil imidlertid søge at få alle tal, også $a \cdot b$ repræsenteret ved linjestykker.
- Vi bruger i det følgende både kongruenssætningerne og den vigtige sætning om ensvinklede trekanter, som vi allerede har brugt en del gange:
- »I ensvinklede trekanter er forholdet mellem længderne af ensliggende sider det samme tal.«

ØVELSE

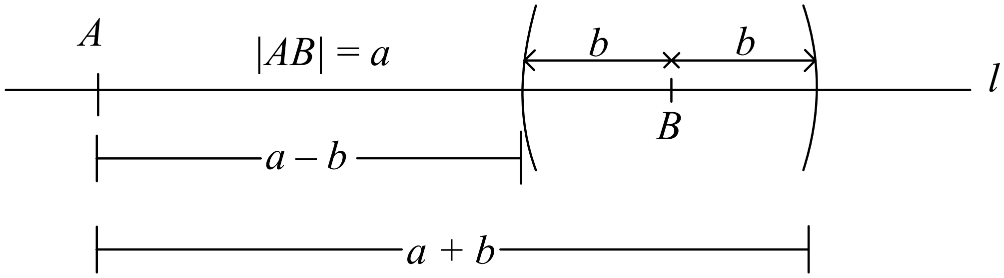
Find kongruenssætningerne og den citerede sætning om ensvinklede trekanter i din matematikbog, tegn figurer og overbevis dig om, at du forstår sætningerne.

Vi skal nu se, hvorledes vi i geometrisk algebra opererer både med de fire regningsarter +, –, · og / og med $\sqrt{\ }$.

Lad være givet to positive tal a og b, $b \neq 0$, der begge repræsenteres af linjestykker med længderne a og b. Og lad endvidere være givet et linjestykke af længden 1.

Konstruktion af *a* + *b* og af *a* – *b* (hvis *a* > *b*)

Forlæng linjestykket a i en ret linje og tegn med centrum i et af a's endepunkter en cirkel med radius b. Herved afskæres henholdsvis $a + b$ og $a - b$ på linjen:



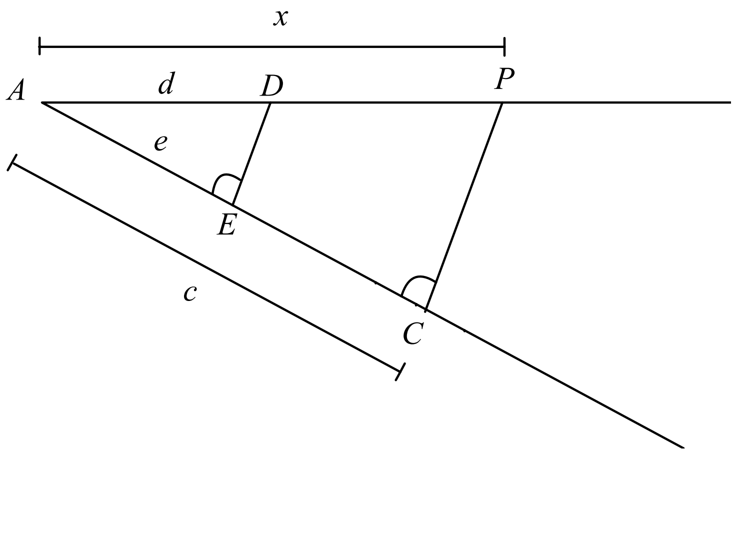
Konstruktion af a · *b* (konstruktion af »fjerdeproportionalen«)

Konstruktionen bygger på følgende forhold: $\dfrac{a \cdot b}{b} = \dfrac{a}{1}$

Sæt $a \cdot b = x$. Opgaven er en speciel udgave af den generelle konstruktion af fjerdeproportionalen x til tre kendte stykker c, d og e:

$$\frac{x}{c} = \frac{d}{e}$$

Det gøres som følger:



Afsæt i en vilkårlig vinkel stykket *d* ud af det ene ben og *e* ud af det andet. Forbind *DE*. Afsæt *c* ud ad samme ben som *e*, og tegn igennem punktet *C* en linje parallel med *DE*.

ØVELSE

Gør det! – dvs. flyt vinklen $\measuredangle AED$ ned i *C* (ved brug af passer og lineal).

Nu er de to trekanter *AED* og *ACP* ensvinklede, og derfor gælder det ønskede:

$$\frac{x}{c} = \frac{d}{e}$$

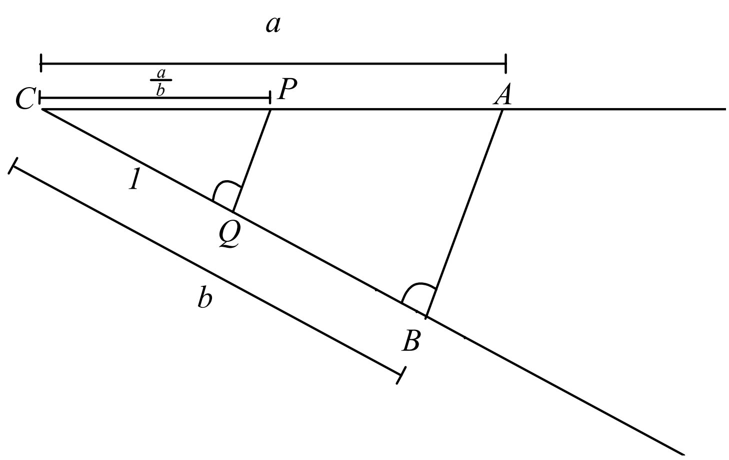
ØVELSE

Udfør nu selv konstruktionen af $a \cdot b$.

Konstruktion af $\frac{x}{c}$

Konstruktionen bygger på følgende forhold: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b}}{1}$

og udnytter metoden til konstruktion af fjerdeproportionalen, hvor $x = \frac{a}{b}$:



Trekant *ABC* er ensvinklet med trekant *PQC*, deraf det ønskede.

Konstruktion af $\sqrt{a}$ (konstruktion af mellemproportionalen)

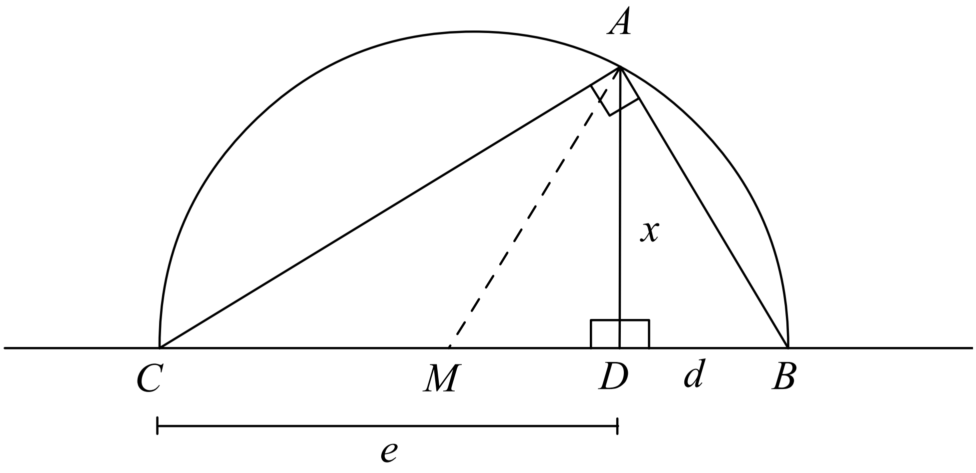
Konstruktionen bygger på følgende forhold: $\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$,

som let indses ved at gange med $\sqrt{a}$ på begge sider.

Konstruktionen er en speciel variant af den generelle konstruktion af mellemproportionaler:

$$\frac{x}{c} = \frac{d}{x},$$

der forløber som følger (se figuren):



Afsæt c og d i forlængelse af hinanden ud ad en ret linje, find midtpunktet M af dette linjestykke, og tegn med M som centrum og afstanden MC som radius i en halvcirkel over CB. Oprejs i D den vinkelrette på linjen, og kald skæringspunktet med halvcirklen for A:

Stykket DA bliver nu lig med det søgte x:
$\measuredangle A$ er 90°, og trekanterne ABD og CAD er ensvinklede. Derfor er:

$$\frac{x}{c} = \frac{d}{x} \text{ eller } x^2 = c \cdot d$$

ØVELSE

Indse at trekant ABC er retvinklet, f.eks. ved at trække linjen MA og se på de to ligebenede trekanter MCA og MAB.

ØVELSE

Konstruér efter ovenstående metode $\sqrt{3}$.

Konklusion:

Når vi begynder med blot ét linjestykke af længde 1, kan vi konstruere:

1. linjestykker af længde n, $n \in \mathbb{N}$
2. linjestykker af længde $r = \frac{p}{q}$, hvor $p, q \in \mathbb{N}$, dvs. $r \in \mathbb{Q}_+$
3. linjestykker af længde $\sqrt{r}$, hvor $r \in \mathbb{Q}_+$
4. linjestykker af længden l, hvor l er en vilkårlig kombination af +, –, ·, / og $\sqrt{\ }$, f.eks.:

$$\sqrt{7} + \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \text{ og endnu mere tossede.}$$

Vi bemærker imidlertid allerede nu, at uanset hvordan et sådant udtryk vrides, ser det ud til, at vi ikke kan få $\sqrt[3]{2}$ frem – mens $\sqrt[4]{2}$ let kan konstrueres, nemlig ved at tage kvadratroden to gange efter hinanden.

Hvis vi indfører en orientering på en talakse, kan vi naturligvis også få afsat de negative tal. Så hele $\mathbb{Q}$ og de mange rodkombinationer kan vi konstruere i geometrisk algebra.

EUCLIDES DANICUS,

Bestaande udi Too Deele.

Dend Første Deel: Handler udaf de Sex Første/ EUCLIDIS Bøger/ de der udi begreffne Maalkunstige Werckstycker.

Dend Anden Deel: Giffver Anledning At-skillige Werckstycker at giøre/ som Skæring/ Røring/ Deeling/ Skinbar Tegenkonst oc Soole-vijsere. Allenniste med en Circkel (Foruden Linial at bruge) med Skærelser af Number.

Forestillet.

Af

Georg Mohr.

Prentet i Amsterdam af Jacob van Velsen.
For Authore, Aar 1672.

I 1672 udgav den danske matematiker Georg Mohr i Amsterdam et skrift med titlen Euclides Danicus. Heri viser han som den første i verden, at det er muligt at gennemføre alle Euklids konstruktioner med brug af passer alene, altså uden lineal. Skriftet var upåagtet af samtiden og blev først genopdaget i dette århundrede og genudgivet af Hjelmslev. Herefter er Georg Mohrs navn blevet internationalt kendt, og han har i dag æren for dette resultat. Siden viste han i øvrigt, at de samme konstruktioner var mulige alene med brug af en lineal og en rusten passer!

6. På vej til en løsning

De tre klassiske konstruktionsproblemer, som havde udfordret amatører og professionelle gennem totusind år, fandt deres løsning midt i 1800-tallet – og løsningen kom fra en højst overraskende vinkel.

Problemerne er af geometrisk karakter, og alle forsøg på at løse dem havde udspillet sig indenfor den klassiske geometris rammer; de mest sindrige konstruktioner var udtænkt; men ingen løste problemerne. De fleste matematikere havde nok den opfattelse, at problemerne var uløselige; måske var det endog også grækernes opfattelse. Men hvordan vise, at det er utænkeligt, at et eller andet geni en eller anden dag får den idé, der skal til?

Vanskeligheden bestod bl.a. i at kunne bevare overblikket over, hvad der sker, når vi griber passer og lineal og begynder at konstruere nye punkter. For at få et sådant overblik viste det sig meget hensigtsmæssig at »oversætte« de geometriske problemer til algebraiske.

Og de tre klassiske problemer blev efter en sådan oversættelse blot til specialtilfælde af en ny teori for løsning af ligninger. En teori, der udtaler sig om, hvornår ligninger af højere grad har »pæne« løsninger.

c. Om Galois' korte liv og bratte død

Selv om en del store matematikere (især Lagrange, 1736 – 1813) havde arbejdet med at udvikle en sådan ny algebra, tilkommer æren den geniale franske matematiker Evariste Galois. Efter ham kaldes denne del af algebraen, der viste sig at have de mest forskelligartede og overraskende anvendelser, for Galois' teori.

Galois' liv var som en klassisk græsk tragedie. Han blev født i 1811, hvor hele Europa var revet op af Napoleonskrigene, og Frankrig selv splittet på kryds og tværs af modsætningerne mellem demokraterne, der ville forsvare idealerne fra den store revolution i 1789, og monarkister af mange afskygninger.

Den meget temperamentsfulde Evariste Galois tog allerede fra gymnasietiden aktivt del i agitationen for at få genetableret republikken, og med sine indlæg i gymnasieblade og taler på møder og værtshuse bragte han sig i konflikt med myndighederne.

I juli 1830 forsøgte kongen, der var blevet indsat efter Napoleons fald, at bremse den demokratiske bevægelse med censur og beslaglæggelse af trykkerierne; men det blev i stedet signal til oprør. Det var i øvrigt på samme tid, at nationale konflikter og frihedskrige førte til, at Belgien rev sig løs fra Holland og kom på Europakortet, Serbien blev selvstændig, og Grækenland endelig fik smidt tyrkerne ud og efter næsten 2000 år igen blev herrer i deres eget hus.

I Paris lykkedes det godt nok at få væltet kongen, som flygtede til England; men i stedet for den demokratiske republik blev der indsat en ny, men dog mere liberal konge. Republikanerne – og blandt dem Evariste Galois og de andre studenter, som var højlydt utilfredse – fortsatte deres agitation, men måtte nu opleve at myndighederne skred hårdt ind.

Efter at have skrevet et læserbrev vendt mod sin rektor, blev Galois smidt ud af skolen i december 1830. Han slutter sig til republikanergarden, der er de mest oprørske, og som kort efter forbydes. Da Galois selv offentligt udtaler sig imod kongen, fængsles han i maj 1831.

Han løslades for en kort bemærkning i juni, men ryger ind igen i juli 1831, efter at han har deltaget i en demonstration på Bastilledagen (14. juli – årsdagen for den store revolution i 1789). 29. april 1832 slipper han endelig ud.

Ude af fængslet opdager han, at der er en medbejler til den pige, han er forelsket i. Straks udfordrer den temperamentsfulde Galois den anden til duel, men er tilsyneladende klar over sine ringe chancer, for om natten til den 30. maj, hvor duellen skal finde sted, samler han febrilsk sine matematiske artikler og udkast sammen og skriver en længere redegørelse for, at han her har udviklet en helt ny algebraisk teori, der vil have vide anvendelsesmuligheder (og bl.a. demonstrere umuligheden af at løse de tre klassiske problemer).

Redegørelsen var især beregnet for den store tyske matematiker Gauss (1772 – 1855). Galois skriver:

»[…] jeg har gjort nogle nye opdagelser i analysen. […] Bed Jacobi eller Gauss om offentligt at udtale deres mening, ikke om sandheden, men om betydningen af disse sætninger. Senere vil der, håber jeg, findes matematikere, som vil have fordel af at dechifrere at dette rod […]«

Og i papirerne kradsede han flere steder ned: »jeg har ikke tid, jeg har ikke tid.«

Den 30. maj 1832 om morgenen blev Evariste Galois, som han havde forudanet, dødeligt såret i duellen; han blev efterladt med sine skudsår og først fundet en del timer senere af en bonde, der bragte ham til et nærliggende hospital, men for sent. Han overlevede ikke.

Og hans papirer nåede tilsyneladende aldrig frem til Gauss. Uheldet syntes at forfølge stakkels Galois efter hans død, som det var sket, mens han levede.

Artiklerne var i forskellige versioner sendt frem til tidsskrifter og bedømmelse hos kendte matematikere. En af disse, Cauchy (1789 – 1857) havde med interesse læst noget af det, men blev uheldigvis syg, da han skulle præsentere Galois' ideer for Akademiet i 1829. Samme år dumper Galois selv ved optagelsesprøven til Polyteknisk læreanstalt, da han er stærkt nedbrudt over, at hans far efter en smædekampagne havde begået selvmord få dage før prøven.

I 1830 vender Cauchy så tilbage til Galois og beder ham om at omskrive materialet til en prisopgave, som akademiet netop havde udskrevet. Men da Galois gør det og indsender sin nye version, bliver hans bidrag væk! Sandsynligvis fordi komitéformanden Fourier (1768 – 1830, kendt fra teorien om Fourier-rækker, der anvendes i studiet af sammensatte harmoniske svingninger) havde taget artiklen med hjem, og pludselig dør.

Et af de andre komitemedlemmer er Poisson (1781 – 1840, kendt fra Poisson-fordelingen, der anvendes i sandsynlighedsregning og statistik) anmoder nu Galois om at igen at lave en ny version, denne gang med eksempler på de rige anvendelsesmuligheder, hans teori har. Artiklen indleveres først på året 1831; men i juli 1831 afviser Poisson den med bemærkningen »uforståelig«.

Ad mærkelige omveje lander Galois' artikler og sidste breve i 1843 hos endnu en af Frankrigs mange store matematikere, Liouville (1809 – 1882, især kendt fra differentialligningsteorien), og endelig er der en, som forstår teoriens betydning og genialitet. Han bearbejder det, og i 1846 offentliggøres materialet.

Sideløbende hermed havde Gauss og andre udviklet elementer af den nye algebraiske teori, som smeltede sammen med Galois' bidrag til det, vi i dag blot kalder for Algebra, og hvor teorien om *grupper*, om *legemer* (som vi skal høre om) og *Galois' teori* er specielle områder.

7. Konstruerbare tal

Vi rekapitulerer:

1. Spørgsmålet, om man kan fordoble en terning, svarer til spørgsmålet: Kan man konstruere sig frem til tallet $\sqrt[3]{2}$?

2. Spørgsmålet, om man kan tredele en vinkel på 60°, svarer til spørgsmålet: Kan man konstruere sig frem til en løsning til ligningen $8z^3 - 6z + 1 = 0$ (jf. side 21)?

3. Spørgsmålet, om man kan løse cirklens kvadratur, svarer til spørgsmålet: Kan man konstruere sig frem til tallet π?

Undersøgelsen heraf tager nu form af en algebraisk undersøgelse af spørgsmålet:
Hvilke tal kan man i det hele taget konstruere, ud fra en given enhed?

a. De konstruerbare punkter

I afsnit 5 så vi, at vi kunne konstruere hele $\mathbb{Q}$, samt en masse forskellige rod-udtryk. Men præcis hvilke? Det skal vi nu få styr på. Først:

Forudsætninger

Vi har givet et koordinatsystem med punkterne $P_1(0,0)$ og $P_2(0,1)$.

Tilladte konstruktioner med passer og lineal

1. Givet to punkter, må vi tegne linjen gennem dem.
2. Givet et punkt og en afstand (mellem to punkter), må vi tegne en cirkel med punktet som centrum og afstanden som radius.
3. Ved hjælp af punkt 1 og 2 får vi konstrueret nye punkter ud fra givne punkter, nemlig:
    a. skæringspunkter mellem linjer,
    b. skæringspunkter mellem cirkler,
    c. skæringspunkter mellem en cirkel og en linje.

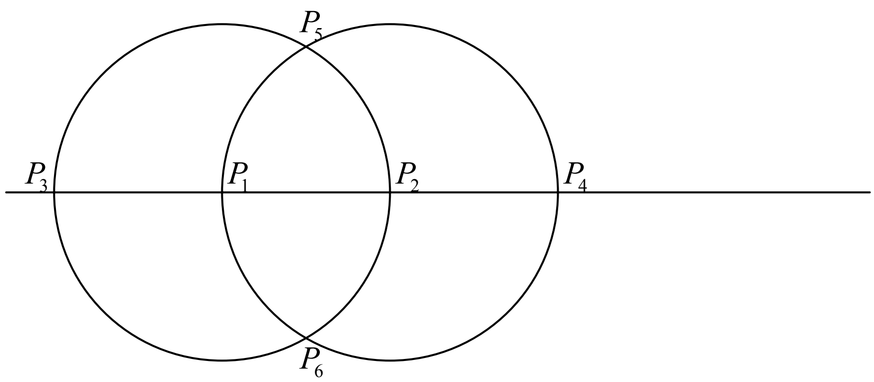
Definition 1

Mængden af alle de punkter i planen, der fremkommer ved at gå ud fra P_1 og P_2 og anvende de tilladte konstruktioner et endeligt antal gange, kalder vi for mængden af konstruerbare punkter.

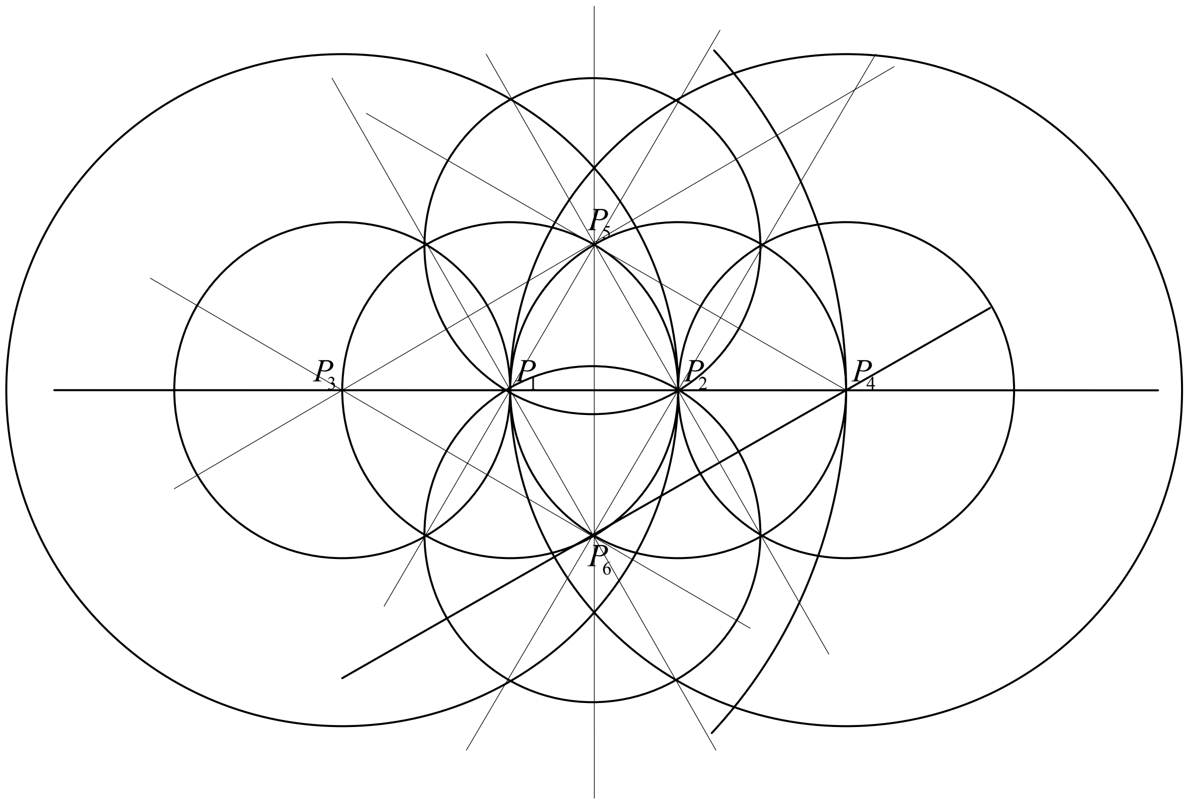
Mængden af konstruerbare punkter kan vi forestille os fremkomme ved skridt for skridt at køre punkt 1-3 igennem, ud fra de punkter, vi i det foregående skridt har skaffet os:

Forudsætninger $P_1(0,0)$ og $P_2(0,1)$.

1. skridt:

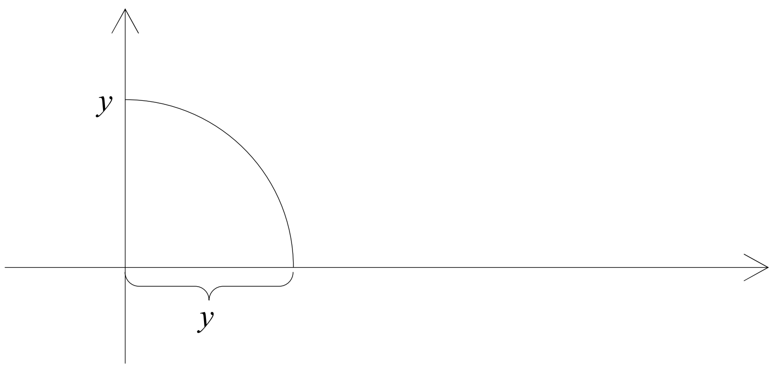


2. skridt:



Vi stoppede midt i tegneriet, da det viste sig, at geometrien allerede her i 2. trin blev uoverskuelig.

Men skridt for skridt får vi fat i alle konstruerbare punkter. Et punkt repræsenteres af koordinater (x,y). x og y findes ved at nedfælde en linje vinkelret på henholdsvis første- og andenaksen. Har vi et y på andenaksen, kan vi få det samme tal på førsteaksen ved at bruge passeren:



Definition 2

Koordinaterne til de konstruerbare punkter kaldes konstruerbare tal. Mængden af alle konstruerbare tal betegnes K. Af vores undersøgelse i afsnittet om Elementære konstruktioner kan vi nu drage følgende slutninger:

Sætning 3

1. $\mathbb{Q} \in K$
2. Alle tal, der fremkommer ved at kombinere rationale tal ved hjælp af $+, -, \cdot, /$ og $\sqrt{\ }$, er med i K.

b. Tallegemer

Vi vil nu nå frem til en mere overskuelig beskrivelse af *K*. Ovenstående tegning skulle være en rimelig begrundelse herfor. Sætningen ovenfor antyder det, vi vil nå frem til – nemlig at beskrive *K* som fremkommet ved at udvide $\mathbb{Q}$, først med almindelige kvadratrødder, så med kvadratrødder af kvadratrødder osv. osv.

For at holde styr på dette indføres først en definition af talmængder med særligt pæne egenskaber:

<u>Definition 4</u>

En talmængde *L* kaldes et *Legeme*, hvis der gælder følgende:

$$\begin{array}{lcl} a,b \in L & \Rightarrow & a+b \in L \\ a \in L & \Rightarrow & -a \in L \\ a,b \in L & \Rightarrow & a \cdot b \in L \\ a,b \in L,\ b \neq 0 & \Rightarrow & \dfrac{a}{b} \in L \\ 1 \in L & & \end{array}$$

Kort og godt: Et legeme er en mængde *L*, hvori vi kan udføre de 4 regningsarter og stadig blive inden for *L*.

<u>Sætning 5</u>

1. $\mathbb{Q}$ er et legeme.
2. $\mathbb{Q}$ er det mindste legeme, dvs. ethvert tallegeme *L* må indeholde $\mathbb{Q}$.

<u>Bevis</u>

Vis selv punkt 1.
For punkt 2: Da $1 \in L$, får vi, at $2 = 1 + 1 \in L$, tilsvarende $3 \in L$, $4 \in L$ osv. Altså:

$$\mathbb{N} \subseteq L$$

Endvidere: $1 \in L \Rightarrow -1 \in L$, og derfor videre: $-2 \in L$, $-3 \in L$ osv., så alle negative hele tal er med i *L*. $1,-1 \in L \Rightarrow 1 + (-1) \in L$, dvs. $0 \in L$. Hermed har vi:

$$\mathbb{Z} \subseteq L$$

Divisionsreglen giver nu endelig, at for alle hele tal *p* og *q*, hvor $q \neq 0$, gælder: $p,q \in L \Rightarrow \dfrac{p}{q} \in L$.

Forhold mellem hele tal giver netop brøkerne, så:

$$\mathbb{Q} \subseteq L$$

<u>ØVELSE</u>

Hvilke af følgende talmængder er legemer:
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_+$, mængden af irrationale tal *I*?

Sætning 6

K er et legeme.

Bevis

Følger umiddelbart af vore konstruktioner i afsnit 5: Elementære konstruktioner. Prøv selv at gå det efter.

Bemærkning

Normalt kan vi ikke uddrage rødder inden for et tallegeme. $\sqrt{2}$ er f.eks. ikke et rationalt tal. Vi kan uddrage rødder indenfor $\mathbb{R}$, og vi kan også indenfor K (overvej selv dette – slå evt. tilbage under konstruktion af mellemproportional).

Definition og sætning 7

Hvis $q \in \mathbb{Q}$ er et positivt rationalt tal, hvor det gælder, at $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$, så betegnes med $\mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$:

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right) = \left\{a + b\sqrt{q} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

$\mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$ er et tallegeme, der indeholder $\mathbb{Q}$.

Bemærkning

$\mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$ er altså alle tal, der kan skrives på formen $a + b\sqrt{q}$, hvor a og b er rationale. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ er således alle tal på formen $a + b\sqrt{2}$, f.eks. $\frac{1}{2} - 2\sqrt{2}$ og $-\frac{7}{8} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Først vises en lille hjælpesætning:

Hjælpesætning 8

Hvis $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$, er opskrivningen af tal i $\mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$ på formen $a + b\sqrt{q}$ entydig.

Bevis

Påstanden er, at det samme tal ikke kan skrives på to forskellige måder:

$$x = a + b\sqrt{q} = c + d\sqrt{q}\ ,\ a \neq c\ ,\ b \neq d\ .$$

For lad os antage, at $a + b\sqrt{q} = c + d\sqrt{q}$.
Hvis nu $b = d$, får vi straks, at $a = c$, og så står der jo samme tal.
Hvis i stedet $b \neq d$, så omskriver vi:

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{q} = c + d\sqrt{q} \quad &\Leftrightarrow \\ a - c = (b - d)\sqrt{q} \quad &\Leftrightarrow \\ \sqrt{q} = \frac{a - c}{b - d} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Men vi havde jo forudsat, at $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$, så det går ikke; altså kan ikke gælde, at $b \neq d$.
Når $b = d$ gælder således også, at $a = c$. Og dermed har vi, at x ikke kan skrives på denne form på to forskellige måder.

<u>Bemærkning</u>

Specielt gælder:

$$a + b\sqrt{q} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$$

<u>Bevis for sætning 7</u>

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$ er trivielt, da vi blot kan sætte $b = 0$.

Vi skal nu vise, at vi »kan regne indenfor $\mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$«. (I algebra bruger man også det udtryk, at $\mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$ er <u>lukket</u> over for +, –, · og /).

Lad os sige, at vi har to tal i $\mathbb{Q}\left(\sqrt{q}\right)$:

$$x = a + b\sqrt{q} \text{ og } y = c + d\sqrt{q}$$

Så regner vi:

$$x + y = \left(a + b\sqrt{q}\right) + \left(c + d\sqrt{q}\right) = (a + c) + (b + d)\sqrt{q}$$

$$-x = -\left(a + b\sqrt{q}\right) = -a + (-b)\sqrt{q}$$

$$x \cdot y = \left(a + b\sqrt{q}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{q}\right) = ac + bd\left(\sqrt{q}\right)^2 + ad\sqrt{q} + bc\sqrt{q} = (ac + bdq) + (ad + bc)\sqrt{q}$$

$$y \neq 0,\ \frac{x}{y} = \frac{a + b\sqrt{q}}{c + d\sqrt{q}} = \frac{\left(a + b\sqrt{q}\right)\left(c - d\sqrt{q}\right)}{\left(c + d\sqrt{q}\right)\left(c - d\sqrt{q}\right)} = \frac{(ac - bdq) + (bc - ad)\sqrt{q}}{\left(c^2 - \left(d\sqrt{q}\right)^2\right)} = \frac{ac - bdq}{c^2 - qd^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - qd^2} \cdot \sqrt{q}$$

Alle fire udregninger ender på formen

$$r_1 + r_2\sqrt{q}\ ,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Q},$$

netop fordi $\mathbb{Q}$ selv er et tallegeme.
De tre første er simple omskrivninger.
I den sidste forlængede vi med $c + d\sqrt{q}$ for at udnytte reglen

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

og dermed få $\sqrt{q}$ væk i nævneren.
Vi <u>ved</u>, at $c - d\sqrt{q} \neq 0$, for hvis der gjaldt, at $c + d\sqrt{q} = 0$, så var $c = 0$ og $d = 0$, og dermed ville også $y = c + d\sqrt{q}$ være 0. Men det, har vi jo forudsat, ikke er tilfældet – altså at $y \neq 0$.

Ovenstående definitioner og sætninger er ikke specielle for $\mathbb{Q}$. Vi har kun brugt, at $\mathbb{Q}$ er et tallegeme. Derfor kan vi formulere resultaterne mere generelt:

Definition 9

Hvis L er et tallegeme, og q er et tal i L, således at $\sqrt{q} \notin L$, defineres $L\left(\sqrt{q}\right)$ som

$$L\left(\sqrt{q}\right) = \left\{a + b\sqrt{q} \mid a, b \in L\right\}$$

Sætning 10.

1. Opskrivningen af tal i $L\left(\sqrt{q}\right)$ på formen $x = a + b\sqrt{q}$, $a, b \in L$, er entydig.
2. $L \subseteq L\left(\sqrt{q}\right)$, og $L\left(\sqrt{q}\right)$ er selv et tallegeme.

Bemærkning

$L\left(\sqrt{q}\right)$ kaldes derfor et *udvidelseslegeme* til L. Indenfor algebra siger man også, at $L\left(\sqrt{q}\right)$ er fremkommet ved *adjunktion* af $\sqrt{q}$ til L.

c. Beskrivelse af de konstruerbare tal

Vi er nu i stand til at beskrive K – de konstruerbare tal – ved hjælp af udvidelseslegemer til $\mathbb{Q}$.

1. Først vender vi lige tilbage til konstruktionen af alle de konstruerbare punkter. Uanset hvor uoverskuelig en tegning kunne være, er det alligevel klart, at der i hvert skridt kun bliver konstrueret et bestemt, endeligt antal punkter.

   Derfor kan vi fortsætte den nummerering af dem, som begyndte med $P_1, P_2, \ldots, P_6$, så vi får en følge af punkter:

   $P_1, P_2, \ldots, P_n$

   Det er ligegyldigt, hvilken rækkefølge vi vælger inden for hvert skridt.

   Ud fra punkterne får vi så de konstruerbare tal, som tilsvarende kan skrives op i rækkefølge:

   $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (*)

   Det er ligegyldigt, hvilken rækkefølge vi vælger inden for hvert skridt. Det eneste af betydning er, at alle er med, samt at vi først tager alle fra første skridt, dernæst alle fra andet skridt osv.

2. Dernæst går vi i gang med at konstruere en følge af udvidelseslegemer til $\mathbb{Q}$ efter følgende recept:

   Vi bevæger os frem i række af x'er, til vi første gang møder et x_i, hvor $x_i \notin \mathbb{Q}$. Efter en opskrift, der følger nedenfor i punkt 3, finder vi så et tal $l_0 \in \mathbb{Q}$ og danner $L_1 = \mathbb{Q}\left(\sqrt{l_0}\right)$.

   Nu har vi begyndelsen på følgen, som vi leder efter, idet L_1 er et legeme, og $\mathbb{Q} \subseteq L_1$.

   Vi fortsætter frem i rækken af x'er, til vi første gang møder et x_j, hvor $x_j \notin L_1$, finder et $l_1 \in L_1$ efter opskriften nedenfor og danner som før $L_2 = L_1\left(\sqrt{l_1}\right)$.

Nu gælder derfor:

$\mathbb{Q} \subseteq L_1 \subseteq L_2$,

og processen fortsætter, så vi får konstrueret en følge af *udvidelseslegemer*:

$\mathbb{Q} \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \ldots \subseteq L_k$

3. Det enest,e vi mangler at angive, er, hvorledes vi finder de $l_0, l_1, l_2, l_3, \ldots, l_k$, som anvendes ved hver udvidelse:

   $L_{k+1} = L_k\left(\sqrt{l_k}\right)$, hvor $l_k \in L_k$

   Lad os sige, vi er nået til konstruktionen af L_k og skal videre. Vi går som beskrevet frem i rækken og når frem til et x_n. Lad os nu lige overveje, hvorledes et sådant x_n i rækken af konstruerbare tal fremkommer. Der er tre mulige måder – som skæringspunkt:
   I. mellem to linjer,
   II. mellem en linje og en cirkel,
   III. mellem to cirkler,
   hvor disse linjer og cirkler alle er fastlagt ud fra nogle af de foregående punkter, dvs. ud fra nogle af $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

   En linje fastlagt af punkterne (x_i, y_i) og (x_j, y_j) har ligningen:

   $$y - y_j = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \cdot \left(x - x_j\right),$$

   og skrives dette på formen
   $ax + by + c = 0$,
   er det let at se, at a, b og c er fremkommet af de foregående tal ved brug af regningsarterne +, –, · og /. Altså:
   a, b og c ligger i L_k.

   En cirkel med centrum i (x_k, y_k) og radius r (som er et tal fastlagt ud fra de foregående punkter), har ligningen:
   $(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = r^2$,
   og skrives denne på formen:
   $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$,
   ses let, at d, e og f alle er fremkommet af de foregående punkter ved brug af +, –, · og /. Altså:
   d, e og f ligger også i L_k.

   Vi ser nu på de tre nævnte tilfælde:

   I. x_n stammer fra et skæringspunkt mellem to linjer:
   $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
   $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
   x_n findes altså ved at løse disse to ligninger og må derfor fremkomme af a'erne, b'erne og c'erne ved brug af +, –, · og /. Men så ligger x_n jo selv i L_k. Med andre ord bidrager x_n ikke med noget nyt i dette tilfælde: L_k bliver ikke udvidet.

   II. x_n stammer fra et skæringspunkt mellem
   linjen: $ax + by + c = 0$
   og cirklen: $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$
   a og b kan ikke begge være lig nul. Lad os sige $b \neq 0$. Så findes y af den første ligning:

   $$y = -\frac{ax + c}{d},$$

   som dernæst indsættes i den anden ligning:

$$x^2+\left(-\frac{ax+c}{d}\right)^2+dx+e\cdot\left(-\frac{ax+c}{d}\right)+f=0$$

Vi kan se, at denne ligning kan reduceres til en ligning af formen:

$$Ax^2+Bx+C=0,\ A,B,C\in L_k$$

Vi <u>ved</u> jo, at $x = x_n$ er en løsning. Derfor vil vi opskrive løsningsformlen:

$$x_n=\frac{-B+\sqrt{D}}{2A}\vee x_n=\frac{-B-\sqrt{D}}{2A},$$

hvor $D=B^2-4AC\in L_k$.

Hvis $\sqrt{D}\in L_k$, vil også $x_n\in L_k$ og bidrager således heller ikke til noget nyt; L_k bliver ikke udvidet. Men hvis $\sqrt{D}\notin L_k$, så sætter vi:

$L_{k+1}=L_k\left(\sqrt{D}\right)$, dvs. D er det omtalte tal l_k.

III. x_n stammer fra et skæringspunkt mellem <u>to cirkler</u>:

$$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$$
$$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$$

Ved at trække den nederste fra den øverste får vi omformet dette ligningssystem til følgende to ligninger:

$$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$$
$$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$$

Men det er jo præcis samme situation som under punkt II med en linje og en cirkel, så det har vi allerede behandlet.

<u>Konklusion:</u> Et nyt tal i rækken af konstruerbare tal vil enten blot være en kombination af de foregående tal ved brug af +, –, · og /, dvs. ligge indenfor det tallegeme, som de hidtidige tal tilhører. Eller der vil findes et $l_k\in L_k$, så x_n ligger i $L_k\left(\sqrt{l_k}\right)$, som så bliver det næste i følgen af tallegemer.

<u>Sætning 11</u>

Hvis K er mængden af konstruerbare tal, og L_k har samme betydning som ovenfor, så gælder:

$$K=\bigcup_{k=1}^{\infty}L_k$$

<u>Bevis</u>

Lighedstegnet mellem de to mængder vises ved en almindelig anvendt teknik, nemlig at vise:

1. $K\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}L_k$ 2. $K\supseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}L_k$,

for så må de jo være ens.

1. L_k'erne er konstrueret, så ethvert $x_n \in K$ bliver fanget og kommer med i et eller andet L_k.

   Derfor er $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$.

2. Se på følgen:

   $\mathbb{Q} \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq ... \subseteq L_k$

   Vi ved, at $\mathbb{Q} \subseteq K$. L_1 består af tal af formen $a + b\sqrt{l_0}$, $a, b, l_0 \in \mathbb{Q}$. Fra sætning 3, side 33, ved vi, at $\sqrt{l_0} \in K$ og derfor også, at $b\sqrt{l_0} \in K$ og endelig, at $a + b\sqrt{l_0} \in K$. Altså:

   $L_1 \subseteq K$

   L_2 består af tal af formen $a + b\sqrt{l_1}$, $a, b, l_1 \in L_1 \subseteq K$. Som før ved vi derfor også, at $\sqrt{l_1} \in K$ og derfor også, at $b\sqrt{l_1} \in K$ og endelig, at $a + b\sqrt{l_1} \in K$. Altså:

   $L_2 \subseteq K$

   Dette kan vi indlysende nok fortsætte og får for ethvert *k*, at $L_k \subseteq K$, altså:

   $K \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$,

   og sætningen er vist.

d. Terningens fordobling er ikke mulig

Vi er nu endelig parat til at vise umuligheden af at fordoble terningen, dvs, umuligheden af at konstruere $\sqrt[3]{2}$ med passer og lineal. Først vises følgende vigtige sætning, der også har almen interesse:

Sætning 12

Lad $L\left(\sqrt{q}\right)$ være et udvidelseslegeme til et tallegeme *L*, og lad

$P\left(x\right) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$

være et polynomium med koefficienter i *L*: $a_n, ..., a_1, a_0 \in L$. Så gælder:

Hvis $a + b\sqrt{q}$ er en rod i *P*(*x*), så er også $a - b\sqrt{q}$ en rod i *P*(*x*).

$a - b\sqrt{q}$ kaldes partneren til $a + b\sqrt{q}$.

Bemærkning

Prøv selv at overveje situationen, hvor *P*(*x*) er et andengradspolynomium med rationale koefficienter (tænk på løsningsformlen).

Bevis

Først en betegnelse: Hvis $x = a + b\sqrt{q}$, betegner vi partneren med $\overline{x}$:

$\overline{x} = a - b\sqrt{q}$

Partneren til et tal $a \in L$ er tallet selv, for her gælder jo, at *b* = 0:

$\overline{a} = a$

Dernæst en iagttagelse: Hvis $x = a + b\sqrt{q}$, $y = c + d\sqrt{q}$, har vi tidligere udregnet

$$x \cdot y = (ac + bdq) + (ad + bc)\sqrt{q}.$$

Tilsvarende kan vi udregne

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \left(a - b\sqrt{q}\right) \cdot \left(c - d\sqrt{q}\right) = (ac + bdq) - (ad + bc)\sqrt{q}.$$

Men heraf ser vi, at

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

Dette kan vi naturligvis fortsætte, så vi også får

$$\overline{x^n} = \left(\overline{x}\right)^n.$$

Det er endvidere let at se, at

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}.$$

Nu kan vi indse sætningens rigtighed: Lad nemlig $x_0 = a + b\sqrt{q}$ være en rod i $P(x)$:

$$P(x_0) = 0 \text{ eller } a_n x_0{}^n + a_{n-1} x_0{}^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

Tag nu partneren på begge sider:

$$\overline{a_n x_0{}^n + a_{n-1} x_0{}^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0} = \overline{0} = 0$$

Anvend de regneregler, vi netop har indset, til omskrivning af venstre side:

$$\overline{a_n x_0{}^n} + \overline{a_{n-1} x_0{}^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 x_0} + \overline{a_0} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\overline{a_n}\left(\overline{x_0}\right)^n + \overline{a_{n-1}}\left(\overline{x_0}\right)^{n-1} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{x_0} + \overline{a_0} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$a_n\left(\overline{x_0}\right)^n + a_{n-1}\left(\overline{x_0}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\overline{x_0} + a_0 = 0$$

Men venstre side er jo nu $P\left(\overline{x_0}\right)$, så der står

$$P\left(\overline{x_0}\right) = 0,$$

altså at også $\overline{x_0}$ er en rod.

<u>Sætning 13</u>

Lad $L\left(\sqrt{q}\right)$ være et udvidelseslegeme til L. Så gælder:

$$\sqrt[3]{2} \in L\left(\sqrt{q}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{2} \in L$$

<u>Bevis</u>

Vi bruger det, vi ved, nemlig $\sqrt[3]{2} \in L\left(\sqrt{q}\right)$, til at opskrive:

$$\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{q}, \ a, b \in L$$

Dette tal er rod i polynomiet $P(x) = x^3 - 2$, som er et polynomium med koefficienter i $\mathbb{Q} \subseteq L$.
Derfor gælder ifølge den foregående sætning 11, at også $a - b\sqrt{q}$ er rod i $x^3 - 2$.
Men $P(x)$ er en voksende funktion (overvej dette!), og har således kun én rod. Altså er de to ens:

$$
\begin{aligned}
&a + b\sqrt{q} = a - b\sqrt{q} && \Leftrightarrow \\
&b\sqrt{q} = -b\sqrt{q} && \Leftrightarrow \\
&b = 0 && \Leftrightarrow \\
&\sqrt[3]{2} = a, \text{ eller } \sqrt[3]{2} \in L,
\end{aligned}
$$

hvilket skulle vises.

Hovedsætning 1

Terningens fordobling er ikke mulig med passer og lineal.

Bevis

Vi skal vise, at $\sqrt[3]{2}$ ikke er konstruerbar.
Beviset føres indirekte: Antag at $\sqrt[3]{2}$ kunne konstrueres – så vil vi føre dette til en modstrid.

$$\sqrt[3]{2} \in K \Rightarrow \sqrt[3]{2} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$$

ifølge sætning 11.

$\sqrt[3]{2}$ må så tilhøre én af disse, f.eks. $\sqrt[3]{2} \in L_k$, men $L_k = L_{k-1}\left(\sqrt{l_{k-1}}\right)$, så af sætningen, vi lige har vist, får vi $\sqrt[3]{2} \in L_k \Rightarrow \sqrt[3]{2} \in L_{k-1}\left(\sqrt{l_{k-1}}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{2} \in L_{k-1}$, hvor $L_{k-1} = L_{k-2}\left(\sqrt{l_{k-2}}\right)$.

Argumentet kan fortsættes nedad i rækken, så vi får:

$$\sqrt[3]{2} \in L_{k-1} \Rightarrow \sqrt[3]{2} \in L_{k-2} \Rightarrow \sqrt[3]{2} \in L_{k-3} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \sqrt[3]{2} \in L_1 \Rightarrow \sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$$

Det sidste er imidlertid forkert, hvilket f.eks. kan indses på samme måde, som man indser, at $\sqrt{2}$ er irrational: Hvis $\sqrt{2}$ var et rationalt tal, kunne det skrives som en uforkortelig brøk:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \text{ eller } 2 = \frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow 2q^3 = p^3 \qquad (*)$$

Heraf får vi, at 2 går op i p, så p er et lige tal, der kan skrives som $p = 2r$ eller $p^3 = 2^3 \cdot r^3$, der indsættes i (*): $2q^3 = p^3 \Leftrightarrow 2q^3 = 2^3 \cdot r^3 \Leftrightarrow q^3 = 2^2 \cdot r^3$.

Heraf får vi dernæst, at 2 går op i q. Men når 2 går op i både p og q, så kunne brøken jo forkortes, altså i modstrid med at den var uforkortelig, altså må antagelsen om, at $\sqrt[3]{2}$ er rational være forkert. Alt i alt får vi, at $\sqrt[3]{2}$ ikke kan tilhøre nogen af L_k'erne og dermed ikke kan tilhøre K, mængden af konstruerbare tal!

e. Tredeling af en vilkårlig vinkel er ikke mulig

Med samme teknik kan vi nu også vise, at vinklens tredeling med passer og lineal (for en vilkårlig vinkel) er umulig.

Først vises:

Hjælpesætning 14

Lad $L\left(\sqrt{q}\right)$ være et udvidelseslegeme af L. Sæt:

$$P\left(x\right)=x^3-3x+1$$

Så gælder, at $P(x)$ har en rod i $L\left(\sqrt{q}\right)\Rightarrow P\left(x\right)$ har en rod i L.

Bemærkning

Slå tilbage og find hvad det var for et polynomium, der dukkede op, da vi undersøgte, om en vinkel på 30° kunne tredeles. Det ligner meget $P(x)$, og det er da også begrundelsen for at vise denne ellers ret uinteressante sætning.

Bevis

Lad $x_0=a+b\sqrt{q}$, $a,b,q\in L$, være en rod i $P(x)$.
Hvis $b = 0$, vil x_0 være lig med a. Og så er det jo trivielt, at $P(x)$ har en rod (nemlig x_0) i L.
Hvis $b\neq 0$, så er ifølge sætning 12 partneren $\overline{x_0}=a-b\sqrt{q}$ også en rod i $P(x)$, og der gælder:

$$x_0\neq\overline{x_0}$$

Ved polynomiers division kan vi derfor få $P(x)$ skrevet således:

$$P\left(x\right)=\left(x-\left(a+b\sqrt{q}\right)\right)\left(x-\left(a-b\sqrt{q}\right)\right)\left(x-c\right),$$

hvor c er den tredje rod i $P(x)$.
Når vi ganger parenteserne på højre side ud, skal vi få venstresiden. På venstre side er der $0x^2$, hvilket der derfor også må være på højre side. Lad os se efter og finde, hvor mange x^2 der er:

$$-c\cdot x^2-\left(a+b\sqrt{q}\right)\cdot x^2-\left(a-b\sqrt{q}\right)\cdot x^2=\left(-c-\left(a+b\sqrt{q}\right)-\left(a-b\sqrt{q}\right)\right)\cdot x^2,$$

som altså er lig med $0x^2$. Men det vil jo sige:

$$-c-\left(a+b\sqrt{q}\right)-\left(a-b\sqrt{q}\right)=0\Leftrightarrow -c-2a=0\Leftrightarrow c=-2a$$

Hermed har vi vist, at $P(x)$ har en rod i L, nemlig:

$$c=-2a\in L$$

Dernæst vises:

Hjælpesætning 15

$P\left(x\right)=x^3-3x+1$ har ingen rationale rødder.

Bevis

Lad os sige, det rationale tal r var en rod i $P(x)$, og lad os sige, r var skrevet som en uforkortelig brøk:

$$r=\frac{p}{q}$$

Så gjaldt der:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\frac{p}{q} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{p^3}{q^3} - 3\frac{p}{q} + 1 = 0 \Leftrightarrow p^3 - 3pq^2 + q^3 = 0$$

I denne ligning isolerer vi først q^3, dernæst p^3 og får de to ligninger:

1. $p^3 = 3pq^2 - q^3$ 2. $-p^3 + 3pq^2 = q^3$

Af 1. ser vi, at det hele tal q går op på højre side, derfor også på venstre.
Men $\frac{p}{q}$ var jo uforkortelig, så den eneste mulighed for q er at være +1 eller –1.
Af 2. ser vi på samme måde, at p må være enten +1 eller –1. Derfor er tallet r enten +1 eller –1.
Altså: $r = +1$ og $r = -1$ er de eneste mulige rationale rødder. Om de nu også virkelig dur, kan vi efterprøve ved blot at indsætte dem og se efter. Prøv at gøre det og se, at de faktisk ikke dur. Altså: der er ingen rationale rødder.

Hovedsætning 2

Det er umuligt at tredele en vilkårlig vinkel med passer og lineal.

Bemærkning

Vi husker, at nogle vinkler naturligvis kan tredeles. Når vi kan konstruere en vinkel på 30° ved f.eks. at halvere en vinkel på 60° (som vi får fra en ligesidet trekant), ja så kan vi jo sige, at vi har tredelt en vinkel på 90°. Det, sætningen siger, er, at vi ikke kan tredele en vilkårlig vinkel. Dette bevises ved at vise, at en ganske bestemt vinkel, nemlig den på 30° ikke kan tredeles.

Bevis

Vi viser, at en vinkel på 10° ikke er konstruerbar, ved at vise, at tallet sin(10°) ikke er et konstruerbart tal (det er jo 1. koordinaten til retningspunktet P_{10} på enhedscirklen).

Der gælder følgende ligning (se side 21) for enhver vinkel u:[3]

$$\sin(3u) = -4\sin^3(u) + 3\sin(u),$$

og idet vi sætter u = 10°, får vi, som vi også så på side 21:

$$\sin(30°) = -4\sin^3(10°) + 3\sin(10°) \quad \Leftrightarrow$$
$$\tfrac{1}{2} = -4\sin^3(10°) + 3\sin(10°) \quad \Leftrightarrow$$
$$8\sin^3(10°) - 6\sin(10°) + 1 = 0$$

Nu substitueres $x = 2\sin(10°)$, så ligningen bliver til $x^3 - 3x + 1 = 0$, som vi kender fra sætningen ovenfor. Derfor ser vi nu: Hvis sin(10°) var konstruerbar, var også 2sin(10°) det. Dermed ville polynomiet $P(x) = x^3 - 3x + 1$ have en konstruerbar rod, x_0.

Da $x_0 \in K$, vil der findes et L_k så $x_0 \in L_k$. Hjælpesætning 14 giver derfor:
$P(x)$ har en rod i $L_k = L_{k-1}\left(\sqrt{l_{k-1}}\right) \Rightarrow P(x)$ har en rod i L_{k-1}.

[3]Strengt taget har vi kun vist, at formlen gælder for vinkler, hvor $6v \le 180°$, dvs. for $v \le 30°$. Men det kan vises, at trigonometriske formler, der gælder i et interval, uanset hvor lille, gælder overalt! Vi benytter imidlertid her kun det, vi har vist.

Som vi gjorde tidligere, kan vi også her fortsætte dette nedad og får: $P(x)$ har en rod i $L_k \Rightarrow P(x)$ har en rod i $L_{k-1} \Rightarrow P(x)$ har en rod i $L_{k-2} \Rightarrow ... \Rightarrow P(x)$ har en rod i $\mathbb{Q}$.

Men det har $P(x)$ ikke, ifølge hjælpesætning 15. Derfor har $P(x)$ overhovedet ikke nogen konstruerbare rødder, altså sin(10°) er ikke konstruerbar: Vinklen på 30° kan ikke tredeles.

f. Cirklens kvadratur er ikke mulig

Som tidligere omtalt er dette problem langt det vanskeligste. Det skyldes, at tallet π er et meget mere kompliceret tal, end tal der kan udtrykkes som rødder. De sidste er rødder i polynomier, og selv om de kan forekomme komplicerede nok, så er der alligevel rimeligt styr på dem. Sådanne tal kaldes for *algebraiske* tal.

Således er både $\sqrt{2}$, e og π irrationale tal; men kun $\sqrt{2}$ blandt disse er algebraisk. Det er svært at angive særlig mange irrationale tal – f.eks. er alle tal i lommeregneren jo rationale; men langt de fleste af dem, vi trods alt kan hitte på, er på en form, så de er algebraiske (prøv!). Alligevel viser det sig, at der ikke er specielt mange algebraiske tal – de kan faktisk opstilles i rækkefølge og derfor tælles.

Derimod vrimler verden med den anden slags tal, som kaldes *transcendente*, som altså er tal, der ikke er rod i noget polynomium. Sådanne tal kan derfor heller ikke konstrueres.

Det var først i 1882, det lykkedes for en tysk matematiker Lindemann (1852 – 1939) at bevise, at tallet π var transcendent. Beviset herfor er betydeligt sværere end beviset for, at tallet e er transcendent, og involverer, at man bevæger sig ud i de komplekse tal. Så det lader vi ligge her.

Lindemanns ry led i øvrigt en del skade, fordi han (i overmod over sit resultat med π?) publicerede flere beviser for Fermats store sætning (jf. side 14), som desværre alle viste sig at være forkerte.