

## Tilfældige rektangler: Et matematikeksperiment Variable og sammenhænge

### Baggrund:

I de senere år har en del gymnasieskoler eksperimenteret med **HOT**-programmet i matematik og fysik, hvor **HOT** står for **H**igher **O**rders **T**hinking. **HOT**-programmet blev oprindeligt udviklet i England under akronymet **CASE** (Cognitive Acceleration through Science Education) af Adey og Schayer. Omkring år 2000 blev **HOT**-programmet introduceret i Danmark af Jens Holbech og Poul V. Thomsen fra Center for Naturfagernes Didaktik ved Århus Universitet:



I begyndelsen koncentrerede man sig om faget fysik i 1g, men senere blev matematik i 1g (og også naturfag) inddraget i **HOT**-programmet. Centralt i **HOT**-programmet står bl.a. variabelbegrebet og hvordan man kan lære at håndtere sammenhænge mellem mange variable på en gang. Eleverne introduceres fra starten til variabelbegrebet og lærer at klassificere variable på forskellig vis:

- Kvantitative og kvalitative variable
- Uafhængige og afhængige variable
- S sammensatte variable

Dernæst lærer de at håndtere simple sammenhænge mellem variable, først kvalitativt (stigende, faldende), dernæst kvantitativt (ligefrem proportionalitet, omvendt proportionalitet, lineær sammenhæng).

Endelig lærer de **variabelkontrol**, dvs. hvordan man på systematisk vis afgør, hvilke variable, der har indflydelse på en given variabel ved kun at variere en af de uafhængige variable ad gangen.

### Matematikeksperimentet: Tilfældige rektangler

Her vil vi kigge på en typisk øvelse fra matematikdelen af **HOT**-programmet. I tilknytning til det første forløb om **variable og deres sammenhæng** har klassen arbejdet med deres første matematikprojekt, som vi dels arbejdede med i timerne, dels mandede det ud i deres første 'blækregning'. Eleverne har altså arbejdet med variable og herunder arbejdet lidt med klassificeringerne i kvalitative og kvantitative variable, henholdsvis uafhængige og afhængige variable. De har også arbejdet lidt med deres lommeregner og er så småt begyndt at få styr på tegningen af datasæt ved hjælp af **STAT-PLOT** og **ZOOM-STAT**<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Vi brugte den grafiske lommeregner TI-83+, men det er underordnet for selve projektet, der lige så godt kan udføres med fx et regneark.

Vi tegnede et rektangel på tavlen og snakkede om hvilke variable, der kunne karakterisere rektanglet. Eleverne kom med mange forslag som vi noterede på tavlen, herunder også nogle som vi ikke kunne bruge, fx *vinkel* (der jo netop ikke varierer i et rektangel) og *rumfang*. Til slut håndplukkede vi så de fire følgende variable:

### **grundlinje, højde, omkreds og areal**

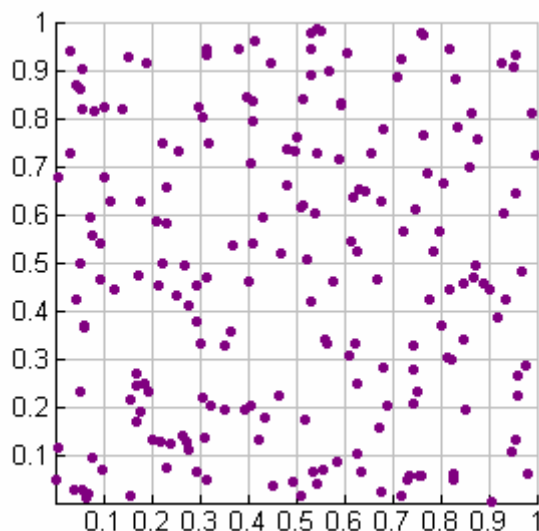
Af hensyn til øvelsen valgte jeg ikke at bruge navnene længde og bredde, men grundlinje og højde. Dels viser det med det samme at **grundlinjen** er den linje, der tegnes **vandret**, og **højden** den linje der tegnes **lodret**. Dels er det ligegyldigt om det er grundlinjen eller højden der er længst, mens nogle elever kan godt kan insistere på at længden skal være længere end bredden!

Derefter snakkede vi om **tilfældige tal**, som i vores tilfælde skulle ligge mellem 0 og 1, og vi valgte at benytte sådanne tilfældige tal som værdierne for grundlinjen og højden. Det kræver lidt snak om tilfældighedsgeneratorerne, der er indbygget i den grafiske lommeregner eller regnearket: Hvordan man finder den og hvordan man bruger den<sup>2</sup>.

Så var vi klar til at producere grundlinjer og højder for 200 tilfældige rektangler ved inde i stat-liste editoren (eller i regnearket) at afgive kommandoer af typen

**Liste1 = RAND(200)** og **Liste2 = RAND(200)**

Bagefter tegnede vi forskellige plot over disse data, idet vi så på forskellige kombinationer af de fundne variable. Først afbildede vi grundlinjen versus højden, hvorved vi fik frembragt en stribe på 200 tilfældige punkter i enhedskvadratet, der fx kan se således ud (her tegnet med TI-interactive).



*Grundlinje versus højde!*

---

<sup>2</sup> Da vi benyttede fabriksnye grafiske lommeregnere gav elevernes maskiner de samme tilfældige tal! Vi snakkede derfor også om hvordan vi kunne give maskinen en tilfældig start ved fx at benytte elevernes fødselsdato som et frø (seed) for tilfældighedsgeneratoren, og derved sikre at maskinen virkelig gav deres egen personlige serie af tilfældige tal.

Vi snakkede også om at hvert enkelt punkt svarer til hjørnepunktet i et rektangel (med det modstående hjørnepunkt i  $(0,0)$ ). Men allervigtigst blev vi enige om at der ikke var nogen umiddelbar sammenhæng mellem grundlinjen og højden. Uanset hvilken grundlinje vi kigger på varierer højden tilfældigt mellem 0 og 1.

Herefter blev eleverne sluppet løs på egen hånd: De skulle nu selv finde formler for omkreds og areal og lægge dem ind i listerne Liste3 og Liste4. De havde så fire variable, de kunne lege med og deres opgave var at frembringe grafer for de mulige sammenhænge og kommentere disse grafer, dvs. dels afgøre om der rent faktisk er tale om en sammenhæng eller ej, dels sætte ord på de fundne sammenhænge. Og så måtte de meget gerne, hvis ellers de kunne, sætte formler på de fundne sammenhænge!

Efterfølgende skulle eleverne skrive en rapport over forsøget. Her fik eleverne de følgende holdepunkter:

**Rapporten om tilfældige rektangler bør indeholde de følgende punkter:**

En beskrivelse af forsøget herunder hvordan man frembringer de fire lister ved dels at udnytte tilfældighedsgenerators for grundlinjen og højden, dels at udnytte formlerne for omkredsen og arealet af et rektangel.

En beskrivelse af de fire variable, en diskussion af deres værdier og en klassifikation af hvem der er uafhængige og hvem der er afhængige. Det vil også være godt med en diskussion af hvilke kombinationer, der er relevante.

En beskrivelse af de fire figurer, der fremkommer, herunder en diskussion af deres form og ligningerne for de afgrænsende figurer. Det vil også være godt med en diskussion af hvordan disse ligninger er fremkommet.

**Afsluttende kommentarer**

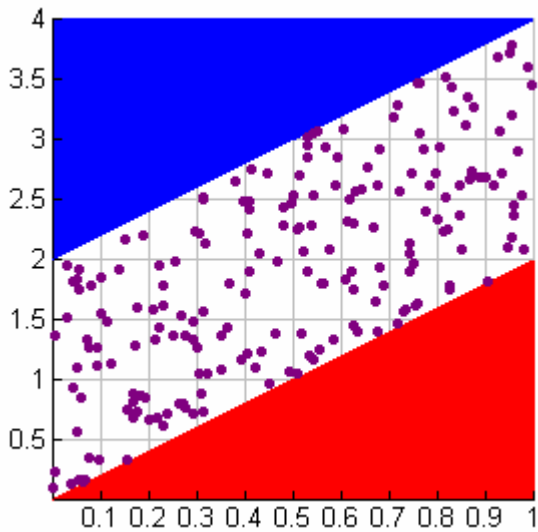
Hvad kan eleverne nu få ud af en sådan øvelse?

Dels bør de overveje at grundlinjen og højden rummer samme information, så de får ikke noget nyt ud af at udskifte grundlinjen med højden i en sammenhæng mellem de øvrige variable! Der bliver derfor kun fire reelt forskellige mulige sammenhænge:

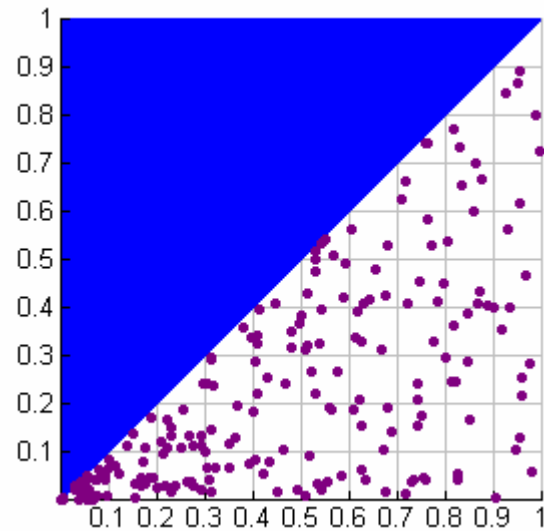
**(Grundlinje, Højde), (Grundlinje, Omkreds), (Grundlinje, Areal) og (Omkreds, Areal)**

Rækkefølgen kan selvfølgelig diskuteres, men som **uafhængig variabel** bør man vel vælge den **simpleste variabel**, og i den sammenhæng er grundlinjen/højden vel simple end omkredsen (som også er en længde) og denne igen er vel simple end arealet.

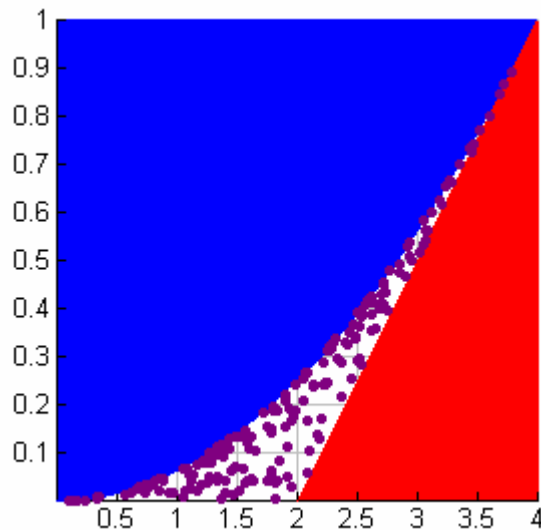
Vi har allerede set på den første af graferne. De tre øvrige ser således ud:



*Grundlinje versus omkreds*



*Grundlinje versus areal*



*Omkreds versus areal*

Specielt den sidste figur er rimeligt kompliceret og vakte straks elevernes begejstring (selv om de selvfølgelig ikke så den i farver og med skravering!). Men jeg var spændt på, om der også var nogen af dem, der kunne 'afkode' den. I hvert enkelt tilfælde er det klart at såvel den øvre grænse for den afhængige variabel (den største omkreds henholdsvis det største areal) afhænger af valget af grundlinjen henholdsvis omkredsen – og tilsvarende for den nedre grænse for den afhængige variabel. Endvidere er det klart, at der i de fleste tilfælde er tale om lineære sammenhænge med den sidste graf som en markant undtagelse. Her dukker der også en kvadratisk sammenhæng i form af en parabel op på figuren. Selv om klassen som sådan ikke kendte til parabler på forhånd, var der altid nogen der gjorde (fx fordi de havde gået i 10 klasse), og de fleste kunne hurtigt fange ideen med at kigge på grafer for funktionen af typen  $y = kx^2$ . Herefter skulle man gætte på en passende værdi af  $k$ . Her kan man eksperimentere sig frem, fx med brug af dynamiske parametre. Men man kan også snakke om betydningen af punktet (4;1), der tydeligvis afslutter parabelen oppe i grafens øverste højre hjørne. Det giver tilsvarende mulighed for at fastsætte værdien af parameteren  $k$ .

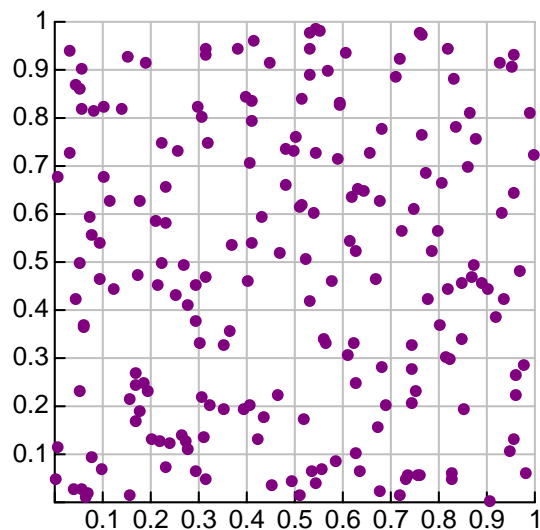
Øvelsen gav helt klart stof til overvejelser og udfordringer til alle, også de elever, der måtte synes, at de ikke rigtigt var blevet pressede i forløbet hidtil.

### Tilfældige rektangler med TI-Interactive

Efterfølgende gives et konkret eksempel på en analyse af figurerne ud fra en undersøgelse i TI-Interactive<sup>3</sup>, men det er altså tænkt som en lærervejledning!

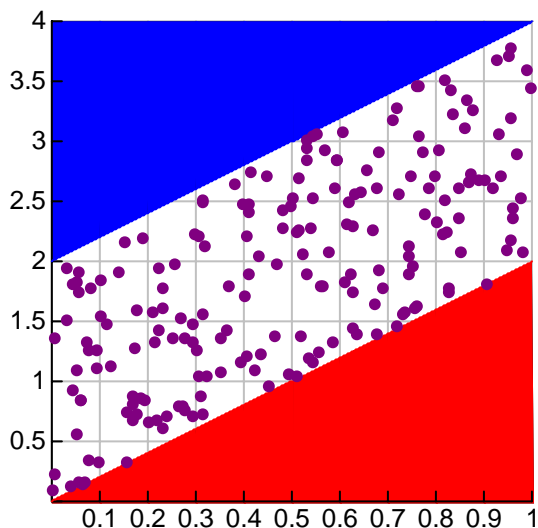
| L1 $\bar{a}$ | L2 $\bar{a}$ | L3 $\bar{a}$ | L4 $\bar{a}$ |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0.25033      | 0.43342      | 1.3675       | 0.1085       |
| 0.73501      | 0.05845      | 1.58691      | 0.04296      |
| 0.40437      | 0.70699      | 2.22273      | 0.28589      |
| 0.18199      | 0.25114      | 0.86626      | 0.04571      |
| 0.538        | 0.60236      | 2.28071      | 0.32407      |
| 0.79709      | 0.56479      | 2.72376      | 0.45019      |
| 0.2902       | 0.06716      | 0.71472      | 0.01949      |
| 0.31201      | 0.94431      | 2.51264      | 0.29463      |
| 0.58586      | 0.71832      | 2.60835      | 0.42083      |
| 0.27323      | 0.41069      | 1.36784      | 0.11221      |
| 0.77018      | 0.68878      | 2.91791      | 0.53048      |
| 0.31422      | 0.05102      | 0.73049      | 0.01603      |
| 0.31377      | 0.46913      | 1.56581      | 0.1472       |
| 0.64254      | 0.64807      | 2.58121      | 0.41641      |
| 0.07843      | 0.8174       | 1.79166      | 0.06411      |

Vi frembringer længderne og bredderne for 200 tilfældige rektangler som listerne **L1** og **L2** af 200 tilfældige tal mellem 0 og 1 ved hjælp af formelen **rand(200)**. Dernæst finder vi omkredsen **L3 = 2L1 + 2L2** og arealet **L4 = L1\*L2** for de 200 rektangler. Vi har altså nu fire forskellige variable repræsenteret ved de fire lister. Spørgsmålet er så om der er nogle sammenhænge mellem disse fire variable?



Først viser vi grafen for bredden **L2** som funktion af længden **L1**. Det giver som vist anledning til et punktdiagram, hvor punkterne ligger tilfældigt fordelt i enhedskvadratet. Der er ingen umiddelbar sammenhæng mellem længde og bredde. De er (som forventet) uafhængige af hinanden!

<sup>3</sup> En tilsvarende grundig gennemgang af projektet med databehandlingsprogrammet **DataMeter** findes som eksempel 2 i hæftet 'Seks Guidede ture med DataMeter', der kan downloades fra programmets hjemmeside: [www.datameter.dk](http://www.datameter.dk). Her findes også forslag til udvidelser af projektet på højere niveauer, hvor man kigger på summer og produkter af stokastiske variable.

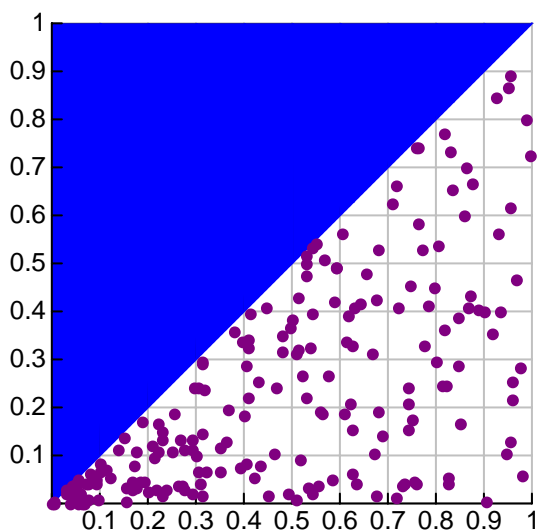


Dernæst viser vi omkredsen **L3** som funktion af længden **L1**. Her dukker der tydeligvis en sammenhæng op, idet den maksimale omkreds som vist afgrænses af linjen  $y = 2 + 2x$  og den minimale omkreds afgrænses af linjen  $y = 2x$ . Begge dele er nemme nok at forstå: Den maksimale omkreds for en givet længde **L1** fås når bredden **L2** er maksimal, dvs. vi finder netop:

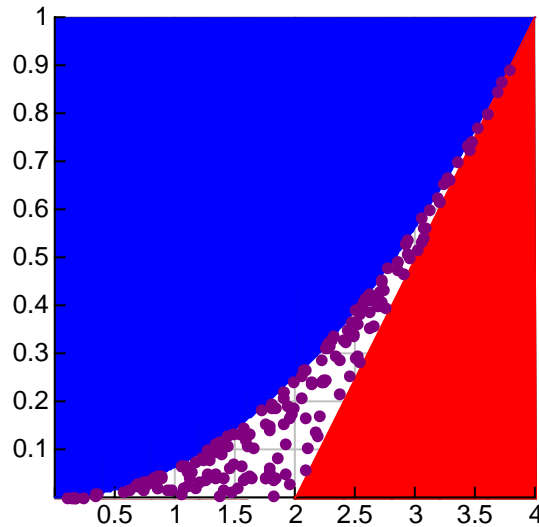
$$O_{maks} = 2 \cdot L1 + 2 \cdot L2 \mid L2 = 1 = 2L1 + 2$$

Tilsvarende fås den minimale omkreds for en given længde **L1** netop, når bredden **L2** er minimal, dvs. 0, hvorfor vi denne gang finder:

$$O_{min} = 2 \cdot L1 + 2 \cdot L2 \mid L2 = 0 = 2L1$$



Denne gang ser vi på arealet **L3** som funktion af længden **L1**. Her er der igen en sammenhæng, idet det maksimale areal for en given længde er opadtil begrænset af linjen  $y = x$ . Også det er nemt at forstå idet vi finder det maksimale areal  $L1 \cdot L2$  ved at sætte bredden **L2** til 1.



Endelig ser vi på den mest komplicerede sammenhæng: Arealet **L4** som funktion af omkredsen **L3**. Det giver anledning til en kompliceret sammenhæng, hvor arealet er opadtil begrænset af parablen med ligningen  $y = \frac{1}{16} \cdot x^2$ . Det hænger sammen med (hvad man nok bør begrunde på simpel vis!) at det største areal fås for et kvadrat, dvs. med længden givet ved en kvart omkreds. Heraf følger netop formlen:

$$A_{maks} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \quad \rightarrow \quad A_{maks} = \frac{x^2}{16}$$

Tilsvarende er arealet tydeligvis nedadtil begrænset af den stykvis lineære funktion:

$$y := \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{2} \cdot x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Her er der altså langt flere ting at overveje!

For en given omkreds *mindre end 2* kan vi vælge længden stor og bredden lille, fx kan vi gøre bredden vilkårligt lille ved at vælge længden tæt på den halve omkreds! Derfor kan vi gøre arealet vilkårligt lille. Det forklarer den nedre grænse for arealet på 0.

Men for en given omkreds *større end 2* er den største længde netop 1! Den mindste bredde er så tilsvarende givet ved halvdelen af resten, dvs.  $(O - 2)/2$ . Det forklarer så den nedre grænse:

$$A_{min} = \text{expand}\left(\frac{1 \cdot (x - 2)}{2}\right) \quad \rightarrow \quad A_{min} = \frac{x}{2} - 1$$

Igen kræver det selvfølgelig en overvejelse om hvorfor det mindste areal fås når rektangler ligger så langt fra et kvadrat som muligt.

Bjørn Felsager  
Haslev Gymnasium & HF  
August 2005