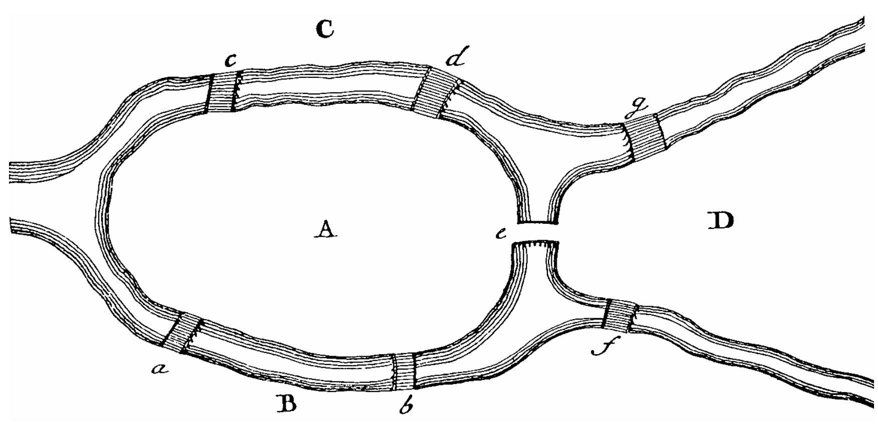
# Broer, skak og netværk

Carsten Thomassen: *Naturens Verden 10*, 1992, s. 388-393.

**Eksempler på praktiske anvendelser af matematik – og nogle uløste problemer**

## Indledning

Figur 1 viser syv broer i byen Königsberg. Er det muligt at begynde en vandring i et af de fire områder, således at man går over hver bro netop én gang og vender tilbage til udgangspunktet? Er det muligt at placere en springer i øverste højre hjørnefelt af et skakbræt og derefter flytte springeren, således at hvert felt besøges netop én gang, og således at springeren vender tilbage til udgangspunktet? Begge spørgsmål blev besvaret af den schweiziske matematiker og fysiker Leonhard Euler (1707-1783). Men selvom de to problemer har en overfladisk lighed, tilhører de problemtyper af vidt forskellig art. Den første problemtype forstår man fuldstændigt, og man kan løse konkrete eksempler ved hjælp af en effektiv metode. Det andet problem tilhører en klasse af ekstremt vanskelige problemer, for hvilke man ikke kender effektive løsningsmetoder. Denne skarpe grænse mellem »lette« og »svære« problemer spiller en stor rolle i moderne matematik. For en given problemtype kan det være af stor praktisk betydning at afgøre, på hvilken side af grænsen problemtypen befinder sig. Er det f.eks. muligt at beregne den korteste distance, en robotboremaskine må bevæge sig for at bore 1000 huller i en metalplade?



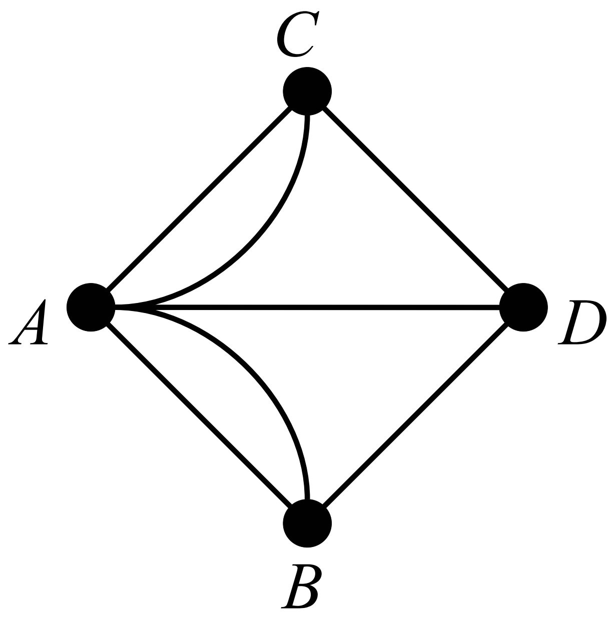
*Figur 1: Eulers tegning af broerne i Königsberg.*

## De Königsbergske broer

De to førstnævnte problemer kan afgøres i et endeligt antal skridt: Man kan gennemgå samtlige muligheder for vandringer. Men allerede Euler gjorde opmærksom på, at den fremgangsmåde er for tidskrævende. Der er behov for en simplere metode, en effektiv algoritme.

Euler løste de Königsbergske broers problem ved først at simplificere Figur 1.

Figur 2 viser det samme som Figur 1. Blot er landområderne *punkter*, og broerne er kurver mellem punkterne. Disse kurver vil vi kalde *kanter*. Punkterne og kanterne udgør tilsammen en *graf*. Antallet af kanter, der udgår fra et punkt, er punktets *valens*. De Königsbergske broers problem består nu i at gennemløbe grafen i Figur 2, således at hver kant gennemløbes netop én gang, og således at man slutter i udgangspunktet. En sådan vandring kaldes en lukket *Eulertur*. Hvis en graf har en lukket Eulertur, kaldes den en *Eulergraf*. Hvis



*Figur 2: Broerne i Königsberg som en graf.*

vi fokuserer på et vilkårligt punkt i en Eulergraf, ser vi, at hver gang vi vandrer ind til punktet, så må vi umiddelbart derefter vandre ud ad en anden kant. Valensen må altså være lige. Omvendt kan man vise, at hvis alle valenser i en sammenhængende graf er lige, så har grafen en lukket Eulertur. Og den er ikke svær at finde. Denne nødvendige og tilstrækkelige betingelse for en lukket Eulertur kaldes *Eulers Sætning*. Et hurtigt blik på Figur 2 viser, at der er punkter med ulige valens. Grafen er altså ikke en Eulergraf. Før vi omtaler springerproblemet fra indledningen, vil vi give eksempler på andre problemtyper, man kan løse effektivt.

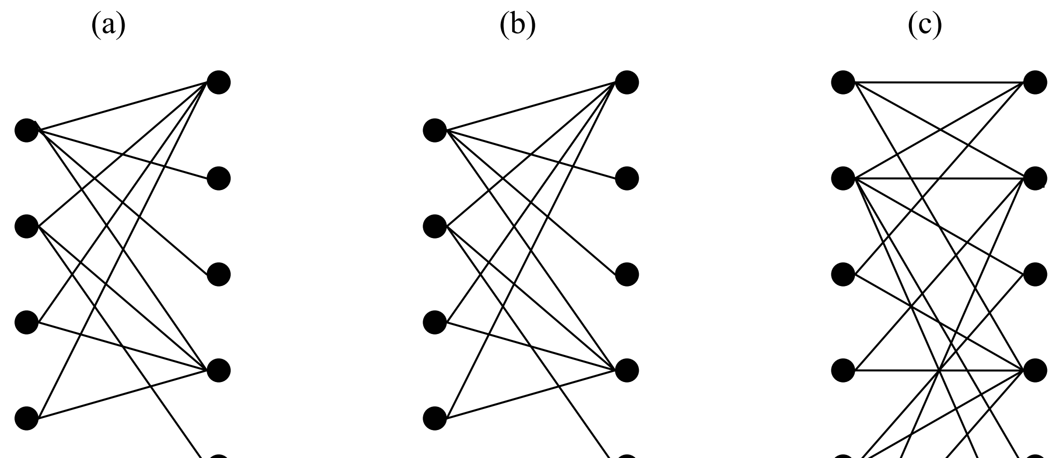
## Ægteskabsproblemet og jobtildelingsproblemet

Ægteskabsproblemet består i at afgøre, om en given mængde mænd $m_1$, $m_2$, …, $m_s$ kan blive gift med (nogle af) $k_1$, $k_2$, …, $k_t$ i en mængde af kvinder, når vi tillader ægteskab mellem to personer af forskelligt køn, hvis og kun hvis de kender hinanden. En oversigt over bekendtskaber kan gives som en graf i Figur 3, hvor mændene er punkter i venstre side, kvinderne er punkter i højre side, og hvor bekendtskaberne er kanter.

En nødvendig betingelse for, at alle mænd kan giftes, er, at hver mand kender mindst én kvinde (dvs. han har valens mindst én). Der må også være mindst lige så mange kvinder som mænd. Figur 3 viser to situationer, hvor begge disse betingelser er opfyldt. På Figur 3 (a) er tre mænd gift, og pardannelsen kan ikke udvides. Men på Figur 3 (b) (som er samme graf som 3 (a)) er alle fire mænd gift. På Figur 3 (c) er det ikke muligt at få alle mænd gift, fordi mændene nr. 1, 3, 4 og 6 tilsammen kun kender tre kvinder, nr. 1, 2 og 4. $k$ mænd må tilsammen kende mindst $k$ kvinder. Betingelsen har vist sig at være både nødvendig og tilstrækkelig for, at alle mænd kan giftes. Dette smukke resultat danner grundlag for *pardannelsesteorien*.

*Jobtildelingsproblemet* er et generelt problem. Det består i at anbringe $n$ mænd $m_1$, $m_2$, …, $m_n$ på $n$ jobs $j_1$, $j_2$, …, $j_n$, således at den samlede produktivitet maksimeres. Der er på forhånd opgivet $n^2$ tal $a_{ik}$, hvor $a_{ik}$ er produktiviteten af mand $m_i$ på job $j_k$.

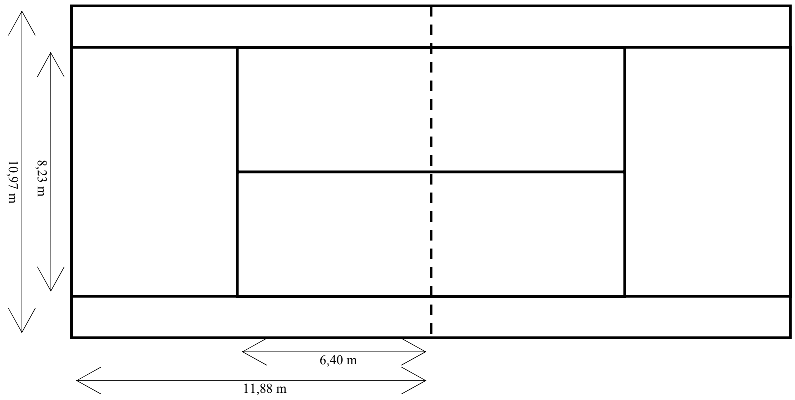
Hvis $G$ er en graf, og $P$ er en mængde kanter i $G$, så kaldes $P$ en *parring*, hvis ethvert punkt er endepunkt for højst én kant i $P$. Hvis alle kanter i $G$ er tildelt et positivt tal, som vi kalder kantens *vægt*, så siger vi, at vægten af $P$ er summen af vægtene i kanterne i $P$. I 1965 fandt man en sofistikeret og effektiv algoritme til at finde en parring af maksimal vægt. Denne betydningsfulde algoritme, som ikke er let at beskrive, er en del af grundlaget for *diskret optimering*, som er en vigtig del af *operationsanalysen*. Jobtildelingsproblemet kan løses ved f.eks. at anvende parringsalgoritmen på den graf, hvor punkterne er mænd og jobs, og hvor der er en kant fra hver mand til hvert job.




*Figur 3: Eksempler på ægteskabsproblemet.*

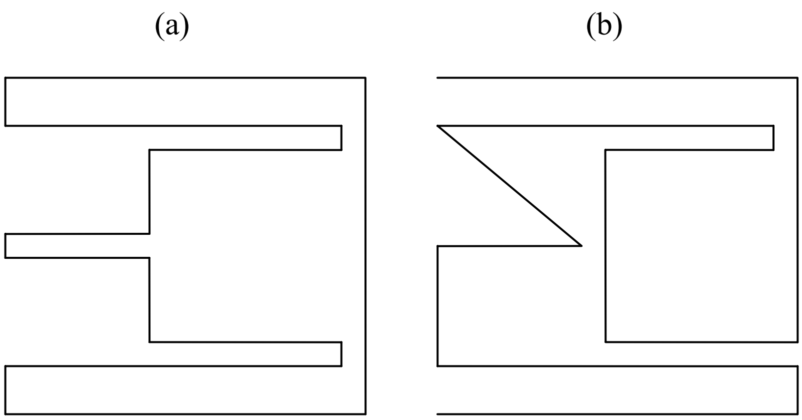
## Tennisbanefejning, plotterproblem og det kinesiske postbud

Vi vil nu illustrere, hvorledes de ovennævnte fundamentale problemstillinger kan kombineres. Figur 4 viser en tennisbane. En spiller skal feje striberne på den højre halvdel af banen, så den samlede vandring minimeres. Kosten hentes og afleveres foroven ved nettet.



*Figur 4: Striber på en tennisbane.*

Vi kan betragte striberne som en graf *G*. Vi danner nu en ny hjælpegraf *H*, hvis punkter er de punkter i *G*, som har ulige valens. *H* indeholder alle mulige kanter. Til enhver kant i *H* knyttes en vægt, nemlig afstanden mellem endepunkterne. Vi finder nu en parring bestående af kanter i *H*, så alle punkter i *H* indgår i parringen, og således at den samlede vægt er mindst mulig. En sådan parring er angivet med røde linjer på Figur 5. Vi tilføjer denne parring i *H* som nye kanter i *G* og opnår derved en Eulergraf. En lukket Eulertur i den udvidede graf (som er antydet på Figur 5 (a)) løser fejningsproblemet. De røde linjer angiver, hvorledes man bevæger sig uden at feje. Den samlede længde af disse kanter er 20,10 m. Stribernes samlede længde er 73,12 m. Den samlede vandring bliver altså af længde 93,22 m. En lignende metode løser den variant af problemet, der består i, at kosten afleveres forneden ved nettet. Den samlede længde bliver lidt større, nemlig 95,80 m, og løsningen er angivet i Figur 5 (b).



*Figur 5: Fejning af tennisbane.*

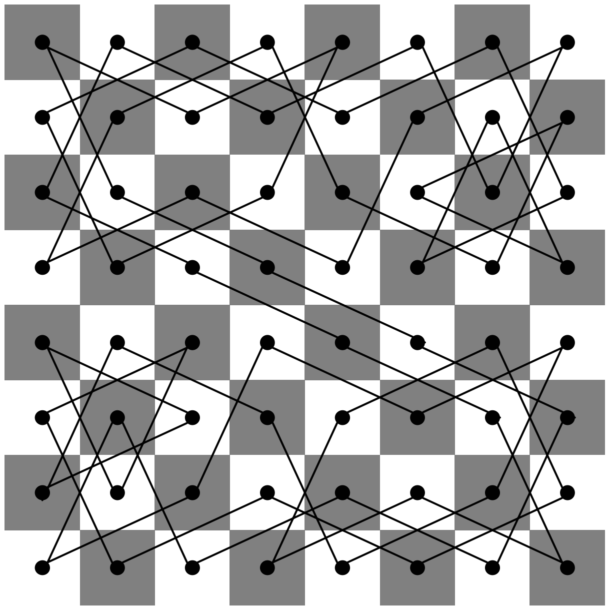
Tennisbaneproblemet er et specialtilfælde af et mere betydningsfuldt problem: En plotter skal tegne en kompliceret graf (f.eks. vejene i en storby), således at den samlede spildtid minimeres. Ved spildtid forstås her den tid, plotteren bruger til at bevæge sig fra et punkt til et andet uden at tegne. Metoden anvendt til tennisbanefejningen generaliseres let til at give en effektiv algoritme til løsning af plotterproblemet.

*Det kinesiske postbuds problem* består i at gennemløbe et netværk (dvs. en graf, hvor hver kant har en længde), således at hver kant gennemløbes mindst én gang, og således at den samlede vandrings længde minimeres. Man skal slutte i udgangspositionen (dvs. posthuset, hvis man tænker på problemet som et postomdelingsproblem). Løsningsmetoden er den samme som for plotterproblemet, blot med den forskel, at vægtene i hjælpegrafen *H* nu ikke er de Euklidiske afstande (altså afstandene i lige linje), men afstandene i netværket. Også disse afstande kan findes ved en effektiv algoritme.

**Hamiltonkredse, firfarveproblemet og grafisomorfi**

De problemtyper, vi har omtalt indtil nu, kan alle løses ved hjælp af effektive algoritmer, om end det kan være vanskeligt at finde disse algoritmer. Det forholder sig anderledes med den problemtype, der indeholder det springerproblem, som vi nævnte i indledningen.

Figur 6 viser Eulers løsning af problemet: Springerens vandring i den graf, hvor skakbrættets felter er punkter, og kanterne viser et muligt springertræk. Vandringen kaldes også en *Hamiltonkreds*. Det er ikke altid muligt at finde en sådan – f.eks. ikke i grafen på Figur 9 (a). Det er altså ikke muligt at vandre rundt i Figur 9 (a), således at man gennemløber hvert punkt netop én gang og vender tilbage til udgangspunktet. Men man kan ikke give en simpel forklaring herpå i lighed med løsningen på de Königsbergske broers problem. Matematisk set er Hamiltonproblemet derfor mere interessant end Eulerproblemet, og der findes en række undersøgelser og uløste problemer i forbindelse med Hamiltonkredse. En særlig spændende variant af Hamiltonproblemet er knyttet til landkort. Ved et landkort vil vi her forstå en tegning som f.eks. Figur 7.



*Figur 6: Springer på skakbræt.*

Grænserne er rette linjestykker. Alle punkter i grænsegrafen har valens 3. Vi vil også tilføje den tekniske betingelse, at grænsegrafen er sammenhændende, og at den vedbliver at være sammenhængende, selvom et eller to af dens punkter fjernes. Det var i mange år et uløst problem (den såkaldte Taitsformodning), om grænsegrafen for landkort altid har en Hamiltonkreds. Dette problem har en tilknytning til det berømte firfarveproblem. En Hamiltonkreds i grænsegrafen deler landene i to klasser: Det indre og det ydre af kredsen. På Figur 7 har vi fundet en Hamiltonkreds og benyttet den til at farve landene i det indre med farverne rød/blå, og landene i det ydre med farverne gul/grøn. To lande, der støder op til hinanden, får altid forskellig farve. Firfarveformodningen, der blev fremsat omkring 1852, siger, at *ethvert* landkort kan farves med fire farver. Der er publiceret adskillige (forkerte) »beviser« for denne formodning. I 1976 offentliggjordes et kompliceret bevis (udført ved hjælp af en computer). Bevisets korrekthed diskuteres stadig.

En motivation for at studere Hamiltonkredse har også været ønsket om at finde, hvad der er blevet kaldt en kanonisk repræsentation af molekyler. Hamiltonkredse kunne være et middel til at få overblik over komplicerede molekyler.

Det fører os til det mere generelle problem at få overblik over en graf. Mere præcist, hvis $G$ og $H$ er givne grafer, kan man da afgøre, om de er isomorfe? At to grafer er isomorfe betyder, at deres punkter kan nummereres 1, 2, …, $n$, således at nabopunkter i $G$ svarer til nabopunkter i $H$.

I Figur 9 er (b) isomorf med (a), mens (c) ikke er isomorf med (a) eller (b). Alle tre grafer har samme antal punkter og kanter og samme valenser. Men i modsætning til (a) og (b) har (c) en firkant. Det forholder sig med grafisomorfiproblemet som med Hamiltonproblemet: Man kender ingen nødvendig og tilstrækkelig betingelse, som kan anvendes som idégrundlag for en effektiv algoritme.

Begge problemtyper er af stor praktisk betydning. Hvis en computer skal undersøge en række tilfælde eller generere en række konfigurationer, kan man være interesseret i, at samme tilfælde eller konfiguration gentages. Dette vil ofte være et specialtilfælde af grafisomorfiproblemet. Og på samme måde som det kinesiske postbuds problem er en generaliseret version af Eulerproblemet, er *den handelsrejsendes problem* en generaliseret udgave af Hamiltonproblemet: Hvis en robotarm skal bore 10.000 huller i printplader, vil man være interesseret i at tilrettelægge armens bevægelse, således at den samlede længde minimeres. Skønt dette betydningsfulde problem minder om tennisbaneproblemet, kender man ingen effektiv metode til at løse problemet generelt (om end der findes metoder, når problemets størrelse er begrænset, f.eks. når der højst er 1000 huller, der skal bores).

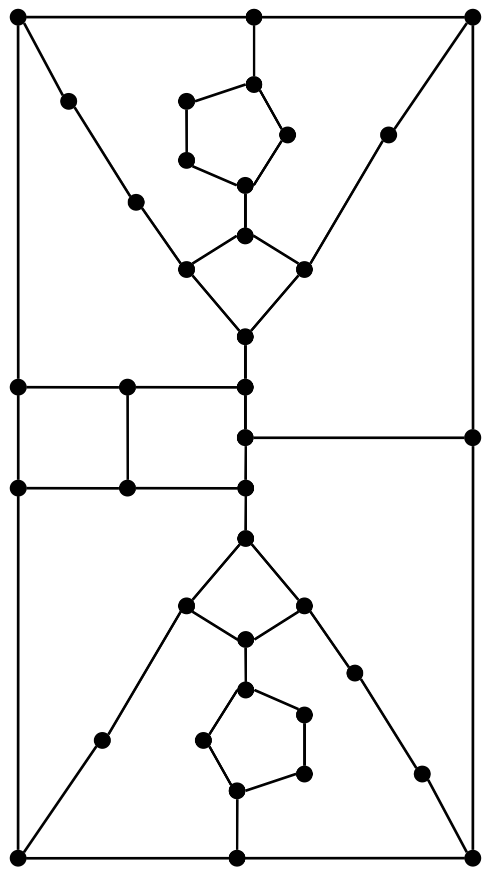
## Klassifikation af kombinatoriske problemtyper

Lad os vende tilbage til de to spørgsmål i indledningen: Har grafen $G$ en lukket Eulertur? Har grafen $G$ en Hamiltonkreds? Disse spørgsmål kaldes *problemtyper*. For enhver konkret graf kan spørgsmålet besvares i et endeligt antal skridt med et ja eller et nej. Endvidere kan man hurtigt afgøre, om en foreslået løsning virkelig er en løsning. Et hurtigt blik på Figur 6 eller 7 viser, at de foreslåede Hamiltonkredse virkelig er Hamiltonkredse. En problemtype, der opfylder ovennævnte betingelser, siges at tilhøre klassen *NP*. Optimeringsproblemer er ikke umiddelbart i *NP*. Men en modifikation af problemtypen fører os ofte over i klassen *NP*. I stedet for at bede om den korteste vandring for tennisbaneproblemet, skal man spørge: Findes der en løsning til tennisbaneproblemet, hvor vandringen er under f.eks. 100 m?

Klassen *NP* er en meget omfattende klasse af problemtyper. Den omfatter foruden de tidligere omtalte problemer også problemtyper uden for grafteorien, f.eks. *det lineære programmeringsproblem*. Et eksempel er at maksimere størrelsen $2x + 3y + 5z$ under betingelserne $x + 3y \leq 5$, $x + y + 7z \leq 15$ og $y + z \leq 3$. Hvis vi insisterer på, at variablene $x$, $y$ og $z$ skal være hele tal, taler man om *heltalsprogrammeringsproblemet*. I praksis forekommer varianter med mange tusinde variable. Også *primtalsproblemet* er i *NP*. Det er ikke umiddelbart klart, om 4.294.867.297 er et primtal eller et sammensat tal. Men man kan hurtigt verificere, at dette tal kan skrives som produkt af 6.700.417 og 641 (efter at man har fået opgivet disse tal).

Hvis der for en problemtype i NP yderligere gælder, at man også kan *finde* løsninger ved hjælp af en effektiv algoritme, så tilhører problemtypen den såkaldte klasse *P*.

Klassen *P* omfatter f.eks. Eulerproblemet, ægteskabsproblemet, jobtildelingsproblemet, plotterproblemet, det kinesiske postbudsproblem og det lineære programmeringsproblem. Som vi har set, kan man undertiden vise, at en problemtype tilhører *P* ved at reducere den til andre problemtyper i *P*. Problemtyperne i *P* blev i indledningen kaldt »lette«. Det skal forstås på den måde, at i det øjeblik, man har fundet en effektiv algoritme (hvilket kan være overordentligt svært), så kan man i praksis løse eksempler på problemtypen.

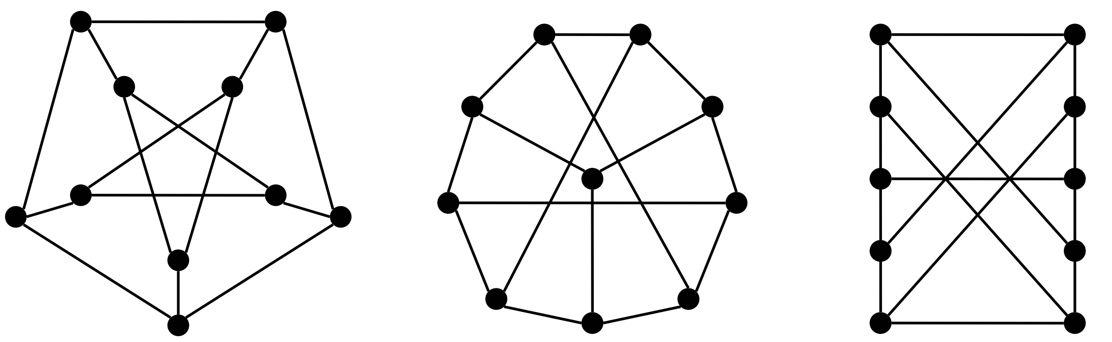


*Figur 8: Et modeksempel til Taits formodning.*

Man kan sige, at problemtyperne, som er i *NP*, men uden for *P*, er »svære« i den forstand, at man ikke ved, om de er »lette«. Man har vist, at nogle af dem, f.eks. Hamiltonproblemet, har en højst bemærkelsesværdig egenskab: Hvis Hamiltonproblemet er i *P*, så kan *alle* problemtyper i *NP* løses ved hjælp af effektive algoritmer. Med andre ord, så vil der gælde, at $NP = P$. En problemtype (som altså f.eks. Hamiltonproblemet), der har denne forbavsende egenskab, kaldes *NP-komplet*.

Et væld af problemer er blevet klassificeret som *NP*-komplette, f.eks. heltalsprogrammeringsproblemet, samt spørgsmålet om et givet landkort kan farvelægges med tre farver. Man ved ikke, om grafisomorfiproblemet og faktoriseringsproblemet tilhører *P*, eller om de er *NP*-komplette. Af ovennævnte problemer er landkortproblemet det eneste, der ikke har umiddelbar praktisk betydning. Men det er alligevel centralt i den forstand, at hvis man kan angive en effektiv algoritme til løsning af det, så har man med ét slag også løst de andre nævnte problemtyper. Det forekommer usandsynligt, at man skulle kunne løse samtlige problemtyper i *NP* på én gang. Det er derfor den almindelige opfattelse, at $P \neq NP$ . At bevise eller modbevise dette er en af de største udfordringer i diskret matematik.

(a) (b) (c)



*Figur 9: Hvilke grafer er isomorfe?*