Bernouillis differentialligning

Den logistiske differentialligning er et eksempel på en *ikke-lineær differentialligning*. Den logistiske differentialligning kan generaliseres på flere måder, og i dette afsnit skal vi studere en af disse generaliseringer, de såkaldte Bernouilli-differentialligninger.

De lineære differentialligninger er karakteriseret ved, at den ukendte y ikke indgår med potenser eller som en del af sammensatte funktioner. Lineære differentialligninger (af første, anden eller højere orden) er de mest håndterlige. Her kan vi ofte bestemme løsninger eksakt og skabe os et overblik over *den fuldstændige* løsning (dvs. *mængden* af alle løsninger til den forelagte differentialligning). Eksempler på sådanne differentialligninger er typerne $y' = ky$, $y' = b - ay$, $y'' + by' + cy = 0$ og $y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$. Definitionsmængderne indskrænkes kun, hvis der er problemer med definitionsmængderne for nogle af de funktioner, der indgår i ligningen.

Anderledes er det med ikke-lineære differentialligninger. For den logistiske differentialligning så vi, at visse løsninger fik indskrænket definitionsmængden dramatisk. Mange ikke-lineære differentialligninger kan ikke løses eksakt. I stedet kan man vælge at foretage en *numerisk løsning*, eller man kan af og til tilnærme med lineære differentialligninger. Endelig kan man også få en del oplysninger ved at analysere differentialligningen uden direkte at løse den – som f.eks. oplysninger om løsningers monotoniforhold.

En del familier af ikke-lineære differentialligninger kan dog løses eksakt. Den logistiske er således med i en større familie, vi samlet kalder Bernouillis differentialligning. De har fået navn efter Jacob Bernouilli, der levede samtidig med Newton og Leibniz.

Bernouillis differentialligning er interessant af flere grunde. Den træder ind på scenen i så forskellige situationer som opstilling af modeller for et frit fald med luftmodstand inden for fysikken og opstilling af matematiske fiskerimodeller inden for biologi.

Den generelle form og nogle specialtilfælde

Bernouillis differentialligning kan i sin generelle form opskrives således:

$$y' = g(x) \cdot y^{\alpha} - f(x) \cdot y, \qquad (*)$$

hvor f og g er kontinuerte funktioner defineret på et interval I – som evt. kan være alle reelle tal – og α er et reelt tal.

<u>ØVELSE 1</u>

Angiv hvad $f(x)$ og $g(x)$ samt α er i følgende differentialligninger:

1. $y' = by - ay^2$
2. $h' = hy^{\frac{2}{3}} - ky$
3. $y' = \dfrac{4y}{x} + x\sqrt{y}$

Vi ser først på et par specialtilfælde:

α = 1: $\quad y' = g(x) \cdot y - f(x) \cdot y \Leftrightarrow y' = \big(g(x) - f(x)\big) \cdot y$

Dette genkendes som et specialtilfælde fra behandlingen af den generelle lineære 1. ordens differentialligning. I tilfældet, hvor funktionerne er konstante: $f(x) = b$ og $g(x) = a$, og vi sætter $k = a - b$, genkendes den første type differentialligning, vi løste: $y' = ky$.

$\alpha = 0$: $y' = g(x)\cdot y^0 - f(x)\cdot y \Leftrightarrow y' = g(x) - f(x)\cdot y \Leftrightarrow y' + f(x)\cdot y = g(x)$

Dette genkendes som den lineære 1. ordens differentialligning, som vi kan opskrive den fuldstændige løsning til. I tilfældet, hvor funktionerne er konstante: $f(x) = a$ og $g(x) = b$, genkendes differentialligningen: $y' = b - ay$.

$\alpha = 2$: $y' = g(x)\cdot y^2 - f(x)\cdot y \Leftrightarrow y' = y\cdot\left(g(x)\cdot y - f(x)\right)$

Denne minder om den logistiske differentialligning. I tilfældet, hvor funktionerne er konstante: $f(x) = -b$ og $g(x) = -a$, får vi: $y' = y(b - ay)$. Altså ser vi, at den logistiske differentialligning er et specialtilfælde af Bernouillis differentialligning.

Løsning af den generelle Bernouilli-ligning

Vi gennemfører nu løsningen af differentialligningen: $y' = g(x)\cdot y^\alpha - f(x)\cdot y$. (*)

I det følgende antages $\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$. Ofte løses differentialligningen kun i tilfældet med konstante koefficienter; men det vanskeliggør ikke løsningen i særlig grad at betragte det generelle tilfælde, så det lægger vi ud med.

Vi lader os inspirere af løsningsmetoden ved den logistiske differentialligning: Dengang dividerede vi igennem med y^2, og efter nogle omskrivninger lykkedes det at substituere tilbage til en lineær differentialligning.

Lad i det følgende f og g være kontinuerte funktioner defineret på et interval I (I kan som tidligere nævnt udmærket være alle reelle tal).

Hvis $\alpha > 0$ er funktionen $y = 0$ en løsning til (*), hvilket ses ved indsættelse.
Hvis $\alpha < 0$ kan y ikke være 0.
Derfor antages i det følgende, at $y \neq 0$. Da y er kontinuert gælder derfor, at $y \neq 0$ i et helt interval inden for I. Vi arbejder videre inden for dette interval og vil afslutningsvis bestemme definitionsmængden, så denne bliver så stor som muligt.

Vi regner nu ensbetydende ud fra (*)

$$\begin{aligned} y' &= g(x)\cdot y^\alpha - f(x)\cdot y && \Leftrightarrow \text{ (ganger med } y^{-\alpha}\text{)} \\ y'\cdot y^{-\alpha} &= g(x) - f(x)\cdot y\cdot y^{-\alpha} && \Leftrightarrow \\ y'\cdot y^{-\alpha} &= g(x) - f(x)\cdot y^{1-\alpha} && (**) \end{aligned}$$

Vi bemærker nu: $\left(y^{1-\alpha}\right)' = (1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}\cdot y'$

Inspireret heraf ganger vi (**) igennem med $(1-\alpha)$, idet vi bemærker, at $(1-\alpha) \neq 0$:

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\cdot y'\cdot y^{-\alpha} &= (1-\alpha)\cdot g(x) - (1-\alpha)\cdot f(x)\cdot y^{1-\alpha} && \Leftrightarrow \\ \left(y^{1-\alpha}\right)' &= (1-\alpha)\cdot g(x) - (1-\alpha)\cdot f(x)\cdot y^{1-\alpha} && \Leftrightarrow \\ \left(y^{1-\alpha}\right)' &= -(1-\alpha)\cdot f(x)\cdot y^{1-\alpha} + (1-\alpha)\cdot g(x) \end{aligned}$$

Substituér: $z = y^{1-\alpha}$:

$$z' = -(1-\alpha)\cdot f(x)\cdot z + (1-\alpha)\cdot g(x)$$

Dette er en lineær 1. ordens differentialligning, og vi kunne derfor nu opskrive den fuldstændige løsning hertil. Den formel, vi når frem til, er imidlertid så klodset og lidet oplysende, at vi i stedet løser differentialligningen herfra i hvert konkret tilfælde.

Første konklusion om Bernouillis differentialligning

Ligningen $y' = g(x)\cdot y^{\alpha} - f(x)\cdot y$, hvor $\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$, løses i det generelle tilfælde efter følgende opskrift:

1. Indfør substitutionen $z = y^{1-\alpha}$.
2. Løs den lineære 1. ordens differentialligning $z' = -(1-\alpha)\cdot f(x)\cdot z + (1-\alpha)\cdot g(x)$.
3. Substituér tilbage og find $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.
4. Bestem definitionsmængden for y. Bemærk, at selv om vi i omskrivningerne ovenfor har forudsat $y \neq 0$, så kan det godt tænkes, at vi i tilfældet $\alpha > 0$ får udvidet definitionsmængden til også at omfatte tal, der giver $y = 0$.

ØVELSE 2

Før vi ser vi nogle eksempler og øvelser i relation til det generelle tilfælde, vil vi betragte specialtilfældet, hvor $f(x)$ og $g(x)$ er konstanter, henholdsvis b og a.

1. Vis at vi i så fald får $y' = ay^{\alpha} - by \Leftrightarrow z' = (1-\alpha)\cdot \alpha - (1-\alpha)\cdot b\cdot z$, hvor $z = y^{1-\alpha}$.
2. Anvend løsningsformlen for denne type differentialligning til at bestemme den fuldstændige løsning:

$$z = c\cdot e^{-(1-\alpha)bx} + \frac{a}{b}$$

Gennem øvelse 2 har vi argumenteret for:

Anden konklusion om Bernouillis differentialligning

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = ay^{\alpha} - by$, hvor $\alpha \neq 0$ og $\alpha \neq 1$,
findes som løsningen til

$$y^{1-\alpha} = c\cdot e^{-(1-\alpha)bx} + \frac{b}{a} \vee y = 0.$$

EKSEMPEL 1

Løs differentialligningen $y' = y + y^3$.
Vi bemærker, at dette er en Bernouilli-differentialligning med konstante koefficienter og med $\alpha = 3$. Så kan vi simpelthen indsætte i formlen i 2. konklusion med $a = 1$, $b = -1$ (idet vi kalder den uafhængige variabel for t):

$$y^{1-3} = c \cdot e^{-(1-3)\cdot(-1)t} + \frac{1}{-1} \vee y = 0 \Leftrightarrow y^{-2} = c \cdot e^{-2t} - 1 \vee y = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{c \cdot e^{-2t} - 1}} \vee y = -\sqrt{\frac{1}{c \cdot e^{-2t} - 1}} \vee y = 0$$

Definitionsmængden bestemmes:

$$c \cdot e^{-2t} - 1 > 0 \Leftrightarrow c \cdot e^{-2t} > 1 \Leftrightarrow e^{-2t} > c$$

Dvs. kun positive c-værdier er mulige. For en given c-værdi får vi $e^{-2t} > c \Leftrightarrow t < \frac{1}{2}\ln(c)$,
så $Dm(f) = \left]-\infty; \frac{1}{2}\ln(c)\right[$

ØVELSE 3

Undersøg grafens forløb for $t \to \infty$ og for $t \to \frac{1}{2}\ln(c)$, og skitser det grafiske forløb.

EKSEMPEL 2

Bestem den løsning til differentialligningen $y' = 3y^{0,5} - 0,5y$, hvis graf går gennem punktet $P(0,4)$.
Før vi går i gang, registrerer vi lige, at $y^{0,5}$ kun har mening for $y \geq 0$.
Vi bemærker, at det er en Bernouilli-differentialligning med $a = 3$, $b = 0,5$, $\alpha \neq 0,5$, og vi indsætter:

$$y^{1-0,5} = c \cdot e^{-(1-0,5)\cdot 0,5t} + \frac{3}{0,5} \vee y = 0 \Leftrightarrow y^{0,5} = c \cdot e^{-0,25t} + 6 \vee y = 0$$

Punktet $P(0,4)$ fortæller, at den søgte løsning ikke kan være $y = 0$. Indsæt (0,4):

$4^{0,5} = c \cdot e^{0} + 6$, hvoraf vi får $c = -4$

Indsæt c:

$$y^{0,5} = -4 \cdot e^{-0,25t} + 6$$

y findes nu ved at kvadrere; men derved regner vi ikke længere ensbetydende, så Dm fastlægges på dette sted:

$y \geq 0$ kræver, at $-4 \cdot e^{-0,25t} + 6 > 0$

Ved at løse denne ulighed får vi $t \geq -\frac{\ln(1,5)}{0,25}$ eller $t \geq -4\ln(1,5)$

Tilnærmet får vi $t \geq -1,62$.

Konklusionen bliver derfor, at den søgte løsning er $y = \left(-4 \cdot e^{-0,25t} + 6\right)^2$, $t \in \left[-1,62; \infty\right[$.

ØVELSE 4

Undersøg grafens forløb for $t \to \infty$ og for $t \to -4\ln(1,5)$, og skitser det grafiske forløb.

EKSEMPEL 3

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$\left(1-x^2\right)\cdot y' - x\cdot y = x\cdot y^2$ i strimlen $-1<x<1$

Vi begynder med at omskrive, så vi kan genkende det som en Bernouilli-differentialligning (hvorfor må vi gøre det?):

$$y' = \frac{x}{1-x^2}\cdot y^2 + \frac{x}{1-x^2}\cdot y$$

Vi bemærker, at ligningen nu har samme form som (*), hvor:

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2},\ g(x)=-\frac{x}{1-x^2}, \text{ og } \alpha=2$$

Vi følger første konklusion og substituerer $z=y^{1-\alpha}=y^{1-2}=y^{-1}$, og får

$$z' = -(1-2)\cdot\frac{-x}{1-x^2}\cdot z + (1-2)\cdot\frac{x}{1-x^2} \Leftrightarrow z' = -\frac{x}{1-x^2}\cdot z - \frac{x}{1-x^2} \qquad (***)$$

Vi får nu brug for formlen til løsning af lineære 1. ordens differentialligninger:

Samtlige løsninger til differentialligningen

$y' = f(x)\cdot y + g(x)$,

hvor *f* og *g* er tilfældige kontinuerte funktioner, er funktionerne med forskriften:

$y = c\cdot e^{F(x)} + e^{F(x)}\cdot\int g(x)\cdot e^{-F(x)}\ dx$

hvor *c* er en konstant, og *F* er en stamfunktion til *f*.

ØVELSE 5

For at løse denne lineære differentialligning (***) skal vi således først finde en stamfunktion $F(x)$ til funktionen

$$-\frac{x}{1-x^2}$$

Vis at $F(x)=\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)=\ln\left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ (evt. på nær en konstant).

Hvorfor er der ingen problemer i at opskrive $\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, dvs. $\sqrt{1-x^2}$?

Anvend nu løsningsformlen på (***):

$$z = c\cdot e^{\ln\left(\left(1-x^2\right)^{0,5}\right)} + e^{\ln\left(\left(1-x^2\right)^{0,5}\right)}\cdot\int -\frac{x}{1-x^2}\cdot e^{-\ln\left(\left(1-x^2\right)^{0,5}\right)}\ dx \quad \Leftrightarrow$$

$$z = c\cdot\left(1-x^2\right)^{0,5} + \left(1-x^2\right)^{0,5}\cdot\int -\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{0,5}}\ dx \quad \Leftrightarrow$$

$$z = c\cdot\left(1-x^2\right)^{0,5} + \left(1-x^2\right)^{0,5}\cdot\int -\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\ dx$$

ØVELSE 6

Vis at løsningen bliver $z = c \cdot \left(1 - x^2\right)^{0,5} - 1$

Ved at substituere tilbage får vi endelig $y = \dfrac{1}{c \cdot \left(1 - x^2\right)^{0,5} - 1}$.

c fastlægges af et givet punkt (en begyndelsesbetingelse).
Dm bliver en del af intervallet $]-1;1[$ og fastlægges ved hjælp af punktet.

ØVELSE 7

Bestem den endelige forskrift og definitionsmængde for en løsning, hvis graf går gennem *P*(0,2). Samme spørgsmål med punktet *Q*(–0.5,5).

ØVELSE 8

Begynd med at fastlægge områderne, hvor vi kan regne, i de følgende opgaver.

1. Bestem den fuldstændige løsning til $y' = y - y^3$.
2. Bestem den fuldstændige løsning til $y' = \dfrac{4y}{x} + x\sqrt{y}$.
3. Bestem den fuldstændige løsning til $y' + y = xy^3$.
4. Bestem den løsning til $y' + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}$, der opfylder $y(1) = 2$.
5. Bestem den løsning til $xy' + y = (xy)^{\frac{3}{2}}$, der opfylder $y(1) = 4$.
6. Bestem den fuldstændige løsning til $y' - \dfrac{3}{x}y = \dfrac{3}{x}y^{\frac{2}{3}}$.

Matematiske fiskerimodeller

De første matematiske fiskerimodeller blev skabt i Storbritannien i 50'erne. Målet med modellerne var at regne sig frem til, hvordan man på længere sigt får den størst mulige fangst.

Man så på hver fiskeart for sig (kaldes en én-arts-model) og var således ikke opmærksom på, at der kunne være et samspil mellem de forskellige fiskebestande. Man gik således ud fra, at en regulering af fiskeriet på en bestand ikke havde afsmittende virkning på andre bestande.

Først i 70'erne begyndte danske fiskeribiologer med kendskab til matematik at sætte spørgsmålstegn ved denne antagelse. Ved brug af matematiske modeller skabte de en model af Nordsøen, den såkaldte *Nordsømodel*.

Vi skal i det følgende se på en matematisk én-arts-model.

Definitioner

$N(t)$ = antal fisk til tidspunktet t

$w(t)$ = vægten af en enkelt fisk til tidspunktet t

Bertalanffys ligning

Vi husker, at $w'(t)$ angiver den hastighed, hvormed vægtændringen foregår til tidspunktet t. Bertalanffy opstillede følgende model for vægtændringen:

$$w'(t) = h \cdot \left(w(h)\right)^{\frac{2}{3}} - k \cdot w(t),$$

hvor h og k er positive tal. Begrundelse for denne model findes i bilaget om Bertalanffy-modellen.

<u>ØVELSE 9</u>

Argumentér for at Bertalanffys ligning er en Bernouilli-ligning, og vis at den fuldstændige løsning til ligningen er

$$w(t) = \left(-\tfrac{h}{k} \cdot e^{-\frac{1}{3}kt} + \tfrac{h}{k}\right)^3 \qquad \text{eller} \qquad w(t) = \left(\tfrac{h}{k}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3,$$

når vi antager, at $w(t) = 0$ til tidspunktet $t = 0$ (fisken vejer ikke meget til at begynde med).

<u>ØVELSE 10</u>

Gør rede for at grafen for w har en vandret asymptote når $t \to \infty$.

Prøv at tegne grafen for w når $\left(\tfrac{h}{k}\right)^3 = 5$ i hvert af tilfældene $k = 0{,}4$, $k = 0{,}8$ og $k = 1{,}2$

Vi vender nu tilbage til $N(t)$ (antallet af fisk til tidspunktet t) og antager, at fiskebestanden ikke er udsat for fiskeri.

<u>ØVELSE 11</u>

Argumentér for at $N(t)$ må opfylde

$$N'(t) = -a \cdot N(t),$$

hvor a er den brøkdel af fiskene, der dør pr. tidsenhed.
Bestem herefter $N(t)$.

<u>ØVELSE 12</u>

Lad $B(t)$ være den samlede fiskemængde til tidspunktet t. Argumentér for at

$$B(t) = N(t) \cdot w(t),$$

hvor $N(t)$ er antal fisk til tiden t, og $w(t)$ er gennemsnitsvægten af en fisk til tiden t.

<u>ØVELSE 13</u>

I øvelse 11 så vi, at $N(t)$ må opfylde

$$N'(t) = -a \cdot N(t),$$

hvor a er den brøkdel af fiskene, der dør pr. tidsenhed.
Tallet a består af et bidrag fra naturlig død M og et bidrag fra fiskeriet f, så ligningen kan forfines til

$$N'(t) = -(M + f) \cdot N(t),$$

hvor M er den brøkdel af fiskene, der pr. tidsenhed dør naturligt, og f er fiskeriintensiteten, dvs. den brøkdel af fiskene, der pr. tidsenhed fanges (f er f.eks. 0,2 eller 20%). Ved at løse ligningen får vi

$$N(t) = k \cdot e^{-(M+f)t}$$

Denne ligning gælder, fra og med vi begynder at fiske. Lad os antage, at vi først begynder at fiske efter t_c år, dvs. efter at årgangen har nået en vis størrelse. Før vi begynder at fiske, udvikler antallet af fisk sig efter udtrykket

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-Mt},$$

hvor N_0 angiver antallet af nyklækkede fisk (f.eks. 2 millioner).

Vis at $k = N_0 \cdot e^{f \cdot t_c}$.

Ud fra øvelse 5 finder vi ved indsættelse

$N(t) = N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t}$, der er gyldig for $t > t_c$, hvor

t_c er det tidspunkt, vi begynder at fange fisk af årgangen (f.eks. når fiskene er 2 år gamle),
N_0 er antallet af nyklækkede fisk, som »starter« årgangen (f.eks. 2 millioner),
t regnes ud fra »fødslen« af denne årgang,
M er de brøkdel af fiskene, der pr. tidsenhed dør naturligt, og
f er fiskeintensiteten, dvs. den brøkdel af fiskene, der pr. tidsenhed fanges.

Vi fandt tidligere, at den enkelte fisks vægt kunne beskrives ved

$$w(t) = \left(\tfrac{h}{k}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{1}{3}kt}\right)^3,$$

samt at tallet $w_\infty = \left(\tfrac{h}{k}\right)^3$ er den maksimale vægt for den pågældende fiskeart (den asymptotiske grænse for $w(t)$). k er en proportionalitetskonstant fra »nedbrydningsleddet« ved differentialligningen for $w(t)$).

Sættes de to udtryk ind, får vi følgende:

$$B(t) = w_\infty \cdot N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{3}kt}\right)$$

Den samlede biomasse og den samlede fangst

Vi antager, at alle årgangene har samme startværdi N_0. Et bestemt år indeholder Nordsøen fisk fra mange årgange: 1 år gamle, 2 år gamle, …, T år gamle, hvis vi siger, at denne type fisk højst bliver T år i alt. Den samlede biomasse af denne fiskeart er således summen af alle årgangenes bidrag. Fangsten sker med en intensitet på f. Fiskenes årgange er spredt mellem hinanden, så vi fanger samme andel af alle årgange ældre end t_c.

ØVELSE 14

Argumentér for, at den samlede fangst Y er givet ved

$Y = f \cdot \int_{t_c}^{T} B(t)\, dt$, dvs. $Y = f \cdot \int_{t_c}^{T} w_\infty \cdot N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot e^{-(M+f)t} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{3}kt}\right) dt$

ØVELSE 15

Indsæt følgende konstanter: $f = 1$, $t_c = 2$, $T = 16$, $w_\infty \cdot N_0 = 10^6$, $k = 1{,}5$, $M = 0{,}1$.

1. Vis: $\left(1 - e^{-0{,}5 \cdot t}\right)^3 = 1 - 3 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t} + 3 \cdot e^{-t} - e^{-1{,}5 \cdot t}$
2. Indsæt dette og beregn integralet ved hjælp af stamfunktioner:

Vis: $Y = 10^6 \cdot e^2 \cdot \left[-\frac{1}{1{,}1} \cdot e^{-1{,}1 \cdot t} + \frac{3}{1{,}6} \cdot e^{-1{,}6 \cdot t} - \frac{3}{2{,}1} \cdot e^{-2{,}1 \cdot t} + \frac{1}{2{,}6} \cdot e^{-2{,}6 \cdot t} \right]_2^{16}$

3. Udregn Y for disse værdier af konstanterne.

ØVELSE 16

Tilsvarende kan det vises med bogstaver:

$$Y = f \cdot w_\infty \cdot N_0 \cdot e^{f \cdot t_c} \cdot \left[-\frac{e^{-(f+M)t}}{f+M} + \frac{3 \cdot e^{-\left(f+M+\frac{1}{3}k\right)t}}{f+M+\frac{1}{3}k} - \frac{3 \cdot e^{-\left(f+M+\frac{2}{3}k\right)t}}{f+M+\frac{2}{3}k} + \frac{e^{-(f+M+k)t}}{f+M+k} \right]_{t_c}^{T}$$

Vi er interesseret i at finde sammenhængen mellem Y og f, samt mellem Y og t_c. f kan reguleres ved kvoter, antal trawlere osv. t_c kan reguleres ved garnmaskernes størrelse. Overvej dette! Disse to sammenhænge kan vi finde på flere måder. Vælg én af følgende:

ØVELSE 17 (a)

Indtast formlen i din *lommeregner* med *bogstaver* på bogstavernes plads. Læg samme talstørrelser ind på konstanternes plads som i øvelse 15.

Begynd nu at *variere f*: Udregn værdien Y for f = 0,5, 1, 1,5, 2,5, …, 8

Plot igen ind og find den værdi af t_c, der giver bedste resultat.

ØVELSE 17 (b)

Indtast formlen i programmet *MultiMat* med de givne konstanter bortset fra f, der skrives med bogstavet f. Lav *numerisk integration* med varierende f-værdier. Gennemfør så samme procedure som ovenfor. Gentag processen med t_c.

ØVELSE 17 (c)

Udnyt et regneark. Formlen indtastes på lommeregner eller i regneark. Lav nu tabelværdier for f, og beregn de tilsvarende Y-værdier ved hjælp af regnearket. Tegn grafen og find maksimum. Når dette er gjort, kan du prøve at variere de øvrige konstanter og se, om du kan drage nogle konklusioner heraf. Lav derefter det tilsvarende for t_c ved indtastning på lommeregner eller i regneark. Hvad er det bedste rekrutteringsår? Kan du finde et samlet svar? Hvilke værdier af f og t_c vil vi anbefale? Kan du forklare, hvorfor vi ikke får det bedste resultat ved blot at fiske løs?

Vend tilbage til udledningen af modellen. Gennemgå de forskellige antagelse, vi gør undervejs, og giv et skøn på, hvor sikre vi kan være i fastlæggelsen af konstanterne og i vurderingen af, hvordan tingene spiller sammen.

Bilag om Bertalanffys model

Modellering af vægten af en enkelt fisk som funktion af tiden

Lad os betegne vægten af en fisk med m og tiden med t. Vaeksthastigheden af m kan analyseres ved at splitte op i to led:

Tilvækst pr. tid = Ind – Ud,

hvor Ind-leddet er fødeoptagelse pr. tid, og Ud-leddet er udskillelse pr. tid ved forbrænding, tab af affaldsstoffer mm.

Ud-leddet, antager vi, er proportionalt med fiskens masse, dvs.

Ud = $k \cdot m$

Hvorfor er det en rimelig antagelse?

Ind-leddet vedrører fødeoptagelse og antages derfor at være proportionalt med arealet af overfladen af det tarmsystem, hvorigennem føden optages.

En fisk er et tredimensionalt væsen. Rumfanget af en kugle med radius r er givet ved $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, dvs. rumfanget er proportionalt med radius i tredje potens. Rumfanget af en terning er ligeledes proportional med tredjepotensen af dens endimensionale udstrækning. Derfor antager vi nu, at rumfanget af en fisk er proportionalt med den tredje potens af et mål for dens endimensionale udstrækning. Det samme må så også gælde for massen m af en fisk, dvs.

$m = a \cdot r^3$,

hvor a er en konstant, og r er et mål for fiskens endimensionale udstrækning (radius, hvis det var en kuglefisk).

Overfladearealet af en kugle med radius r er givet ved $4 \cdot \pi \cdot r^2$. Det samme forhold gælder for andre flader: Arealet er proportionalt med kvadratet på et mål for fladens endimensionale udstrækning. Derfor antager vi også, at dette gælder for overfladen af tarmsystemet, eller som vi argumenterede for ovenfor: Ind-leddet er proportionalt med kvadratet på et mål for fiskens endimensionale udstrækning (radius hvis det er en kuglefisk):

Ind = $b \cdot r^2$

Vis nu ud fra de to ligninger, at

Ind = $h \cdot m^{\frac{2}{3}}$,

hvor h er en konstant.

Samler vi Ind-leddet og Ud-leddet, får vi væksthastigheden af m til

$$h \cdot m^{\frac{2}{3}} - k \cdot m$$

eller

$$m'(t) = h \cdot m^{\frac{2}{3}} - k \cdot m .$$