Moderne Makromodeller

Jens Jakob Nordvig-Rasmussen & Nikolaj Malchow-Møller

Marts 2002

1 Generelle ligevægtsmodeller

1.1 Introduktion

IS-LM-modellen er den basale keynesianske model inden for økonomi. Modellen består af en række sammenhænge mellem centrale *makro*økonomiske variable. Dvs en model for det samlede forbrug, den samlede indkomst, de samlede investeringer osv. i økonomien. Et eksempel på en central makroøkonomisk sammenhæng kunne være sammenhængen mellem samlet forbrug og samlet indkomst (som er lig den samlede produktion):

$$C = \overline{C} + c(1-t)Y \tag{1}$$

Ovenstående makro-sammenhæng kaldes forbrugsfunktionen og udtrykker sammenhængen mellem den samlede indkomst i samfundet og det samlede forbrug i samfundet.

1.2 Moderne makroøkonomisk teori

Den moderne makroøkonomiske teori vil gerne undgå at postulere sådanne makrosammenhænge, uden at de kan understøttes af et mikroøkonomisk grundlag.

Grundidéen er, at den økonomiske teori skal baseres på et såkaldt mikrofundament. Herved forstås, at en økonomisk (makro) teori udledes på baggrund af de enkelte agenters adfærd.

Principielt ønsker man altså at modellere de enkelte agenters økonomiske adfærd.

1.2.1 Typer af agenter

Hvad er en agent? En agent er den mindste økonomiske enhed, som man med rimelighed kan analysere isoleret. Typisk opererer man med to typer af agenter: Husholdninger og virksomheder. En tredje agent kunne være den offentlige sektor.

Man kunne måske synes, at det var mere logisk at modellere den enkelte persons adfærd, men det er ofte problematisk, idet det ikke umiddelbart er muligt at analysere de enkelte medlemmer af en familie isoleret, idet familien har fælles økonomi.

1.2.2 Typer af adfærd

I analysen af de enkelte agenter koncentrerer vi os om de økonomiske beslutninger og den økonomiske adfærd.

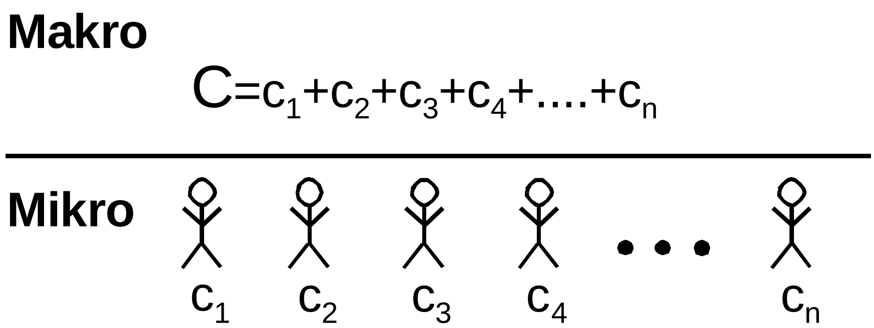
For husholdningerne er vi interesserede i aspekter som:

- Forbrug/opsparing
- Arbejdsudbud/Mængde af fritid
- Valg af uddannelsesniveau

For virksomhederne er vi interesserede i aspekter som:

- Produktionsstørrelse
- Investeringer
- Efterspørgsel efter arbejdskraft
- Forskningsomfang

Ved at undersøge adfærden på mikroniveau får vi en begrundelse for vores makroteori. Makroteorien understøttes af agenternes adfærd på mikroniveau. Vi siger at makroteorien har et mikrofundament. Tankegangen er illustreret i nedenstående figur.



C betegner aggregeret forbrug i økonomien. c_1 betegner det som agent nr. 1 forbruger, c_2 betegner det som agent nr. 2 forbruger osv. Det samlede forbrug beregnes som summen af de n agenters forbrug.

1.2.3 Modellering af agenternes adfærd

Hvis vi ser på den enkelte husholdning og ønsker en model for den økonomiske adfærd, er det klart, at en økonomisk model hurtigt vil blive uhyre kompleks. Eksempelvis er rækken af faktorer, som influerer på den enkelte husholdnings samlede forbrug, nærmest uendelig. Lad os springe direkte til den type af modeller, der anvendes i økonomi. Tankegangen er nok mest intuitiv i forbindelse med virksomhederne, så lad os starte med dem:

Model for virksomheder Den grundlæggende antagelse er, at virksomhederne vælger adfærd ud fra profitmaksimering. Vi antager altså at virksomhedens økonomiske adfærd kan udledes ud fra virksomhedens ønske om at opnå den størst mulige profit. Matematisk formulerer man et profitmaksimeringsproblem, og løsningen til dette er den optimale (profitmaksimerende) adfærd for virksomheden. Det kunne eksempelvis dreje sig om:

- Den optimale produktionsstørrelse
- Det optimale investeringsomfang
- Den optimale indsats af arbejdskraft

Den typiske økonomiske model for en virksomhed er således baseret på rationel optimerende adfærd.

Model for husholdninger Tilsvarende ønsker vi at opstille en model for husholdningerne, så vi kan bestemme disses optimale adfærd. I denne forbindelse er der ikke på samme måde noget oplagt grundlag for et maksimeringsproblem. Mens det med rimelighed kan antages, at en privat virksomhed til en vis grad træffer sine beslutninger med henblik på at opnå størst mulig profit, så er der ikke en ækvivalent målsætning for en husholdning. Som løsning på dette problem anvender man inden for økonomi begrebet nytte (utility). Dette er et abstrakt begreb, som bruges i modeller, der skal beskrive forbrugeres adfærd. Man taler om nytten af forbrug, nytten af fritid osv. Nytten kan opfattes som et slags mål for velfærd - et mål for tilfredshed/glæde. I økonomien modellerer man den enkelte agents (husholdnings) adfærd ved at antage, at adfærden kan udledes ud fra nyttemaksimering. Matematisk opstiller man et maksimeringsproblem, og løsningen til dette problem er den optimale adfærd for husholdningen.

Det kunne eksempelvis dreje sig om:

- Den optimale opsparing
- Det optimale forbrug
- Den optimale arbejdstid/fritid

Den typiske økonomiske model for en husholdning er i lighed med den økonomiske model for en virksomhed baseret på rationel, optimerende adfærd.

1.2.4 Fra mikromodel til makromodel

Når vi har opstillet (mikro) modeller for virksomhedernes og husholdningernes adfærd, er næste skridt at forsøge at bruge dette til at sige noget om den samlede økonomis opførsel. I denne forbindelse skal man være opmærksom på, at de enkelte agenters opførsel påvirker hinanden. For eksempel: Hvis alle i økonomien ønsker en kort arbejdstid vil virksomhederne mangle arbejdskraft. Derfor vil de være villige til at tilbyde en forholdsvis høj løn og ved en højere løn vil folk være villige til at arbejde mere. Virksomhedernes efterspørgsel efter arbejdskraft påvirker derfor lønnen og lønnen påvirker husholdningernes udbud af arbejdskraft. Der er et kompliceret samspil mellem agenternes adfærd, og ved at se på den enkelte agent isoleret får man et ufuldstændigt billede.

Når vi analyserer den samlede økonomi, er der nødt til at være overensstemmelse mellem de enkelte agenters beslutninger. Det giver ikke mening at se på en situation hvor virksomhederne bruger en masse arbejdskraft i produktionen, mens husholdningerne har valgt en kort arbejdsuge og derfor kun arbejder lidt. For at lave en meningsfuld analyse må vi arbejde med en konsistent model - en model hvor der er overensstemmelse mellem alle agenternes adfærd. Ofte arbejder man med begrebet generel ligevægt. Herved menes, at vi ser på en situation med ligevægt i alle markeder. Grundlæggende drejer det sig om, at de udbudte mængder er lig de efterspurgte mængder, og at alle markeder skal være i ligevægt samtidigt. For at sikre en generel ligevægtssituation må man antage nogle variable tilpasser sig. Typisk antager vi i disse modeller at priserne tilpasser sig[1]. Da der er et samspil mellem de enkelte markeder, og da de enkelte agenter deltager i flere forskellige markeder samtidig kan det være teknisk meget kompliceret at finde den generelle ligevægt for den samlede økonomi

[1] I IS-LM-modellen var det produktion og rente som tilpassede sig for at skabe ligevægt.

(sidst i disse noter gives et eksempel på opstilling og løsning af en generel ligevægtsmodel).

Principielt er der derfor to trin i opstillingen af en makromodel med mikrofundament:

1) Opstilling af model for adfærd på mikroniveau

2) Løsning for generel ligevægt

Dette er den principielle fremgangsmåde. Bemærk dog at dette let bliver uhyre kompliceret, selvom den model, vi har anvendt for mikro-adfærden, allerede er meget simplificeret. Hvis der er 2.500.000 forskellige husholdninger og dertil et stort antal virksomheder vil den makroøkonomiske model være overordentlig kompliceret. Opstilling og løsning af modellen vil være en umulig opgave.

Derfor er man af tekniske/matematiske årsager nødt til at forenkle yderligere. Man kan inddele husholdningerne i grupper og kun modellere et mindre antal forskellige husholdninger og tilsvarende for virksomhederne. Den mest drastiske forenkling er at arbejde med kun én agent i hver sektor (husholdningssektor og virksomhedssektor). Man siger, at man arbejder med en såkaldt repræsentativ husholdning og én repræsentativ virksomhed. Selvom det umiddelbart virker underligt at modellere en hel økonomi ved hjælp af en repræsentativ husholdning og en repræsentativ virksomhed, er denne fremgangsmåde meget udbredt - også i moderne økonomisk forskning.

Der anvendes således i vid udstrækning forenklende antagelser. På mikroniveau har vi en meget forenklet model af de økonomiske agenters adfærd og for at overføre mikroteorien til makroniveau bruger vi igen en række forsimplende antagelser vedrørende antallet af agenter og deres forskellighed (heterogenitet). Alligevel vil det ofte ikke være muligt at løse selv disse forenklede modeller matematisk. Derfor anvender man en computer til at simulere en løsning.

1.3 Et eksempel på en generel ligevægtsmodel

Lad os illustrere de ovenfor skitserede principper med en stiliseret generel ligevægtsmodel.

1.3.1 Modellens antagelser

Agenter Der er to typer af agenter: husholdninger og virksomheder. Vi gør den drastiske (men almindelige) antagelse, at der kun er én husholdning og kun én virksomhed[2]. Vi antager at agenterne er rationelle i den forstand,

[2]Bemærk, at selvom der rent teknisk kun er en agent i hver sektor, så ønsker vi at opfatte modellen som en abstrakt beskrivelse af en økonomi med mange agenter i hver

at de udviser optimerende adfærd.

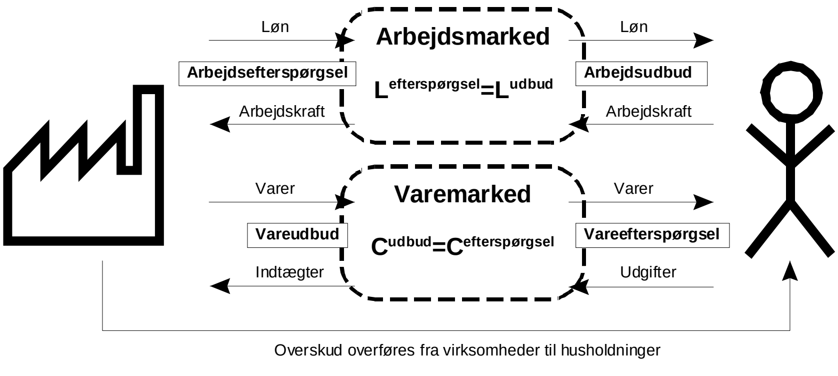
Varer og produktionsfaktorer

- Der er kun én vare i økonomien. Dette er selvfølgelig en grov forenkling. Men vi opfatter forbrugsvaren som samlet forbrug i økonomien.
- Der er ligeledes kun én produktionsfaktor i økonomien. Dvs virksomhederne anvender udelukkende arbejdskraft i deres produktion. Dvs der ses bort fra maskiner og andre ikke menneskelige produktionshjælpemidler (betegnes som kapital i økonomi) .
- Der er kun en type arbejdskraft.

Markeder Der er to markeder i økonomien. På det ene marked - arbejdsmarkedet - efterspørger virksomhederne arbejdskraft, og husholdningerne udbyder arbejdskraft. På det andet marked - varemarkedet - efterspørger husholdningerne forbrugsgoder, og virksomhederne er udbydere af forbrugsgoder (bemærk, at eftersom der er kun én vare er der kun ét varemarked).

Ejerforhold Husholdningerne ejer virksomhederne (er aktionærer). Dette indebærer, at et eventuelt overskud (profit) i virksomhederne overføres til husholdningerne.

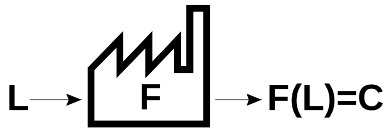
Kredsløbet i økonomien er illustreret i nedenstående figur:



sektor. Kun én producerende virksomhed vil normalt være ensbetydende med en monopolsituation. Men i denne sammenhæng opfatter vi den repræsentative virksomheds adfærd som værende dækkende for hele virksomhedssektorens adfærd i en virksomhedssektor med mange virksomheder og dermed ikke en monopolsituation.

1.3.2 Agenternes optimering

Virksomhederne Virksomhederne omdanner ved deres produktion arbejdskraft til varer, som husholdningerne kan købe og forbruge.



Produktionsfunktionen er en matematisk beskrivelse af den teknologi der anvendes i produktionsprocessen. Lad os antage følgende produktionsfunktion:

$$F(L) = \frac{1}{\beta}L^{\beta}, \quad 0 < \beta < 1 \tag{2}$$

Produktionsfunktionen er voksende i L. Jo mere arbejdskraft der anvendes, jo større bliver produktionen. β er en parameter, som udtrykker effektiviteten i produktionen. Betingelsen $0 < \beta < 1$ sikrer, at efterhånden som indsatsen af arbejdskraft øges, bliver den marginale gevinst ved at øge indsatsen af arbejdskraft mindre. Overskuddet/profitten i virksomheden, som betegnes Π, er givet ved:

$$\Pi = P\frac{1}{\beta}L^{\beta} - WL \tag{3}$$

P er prisen på de producerede varer og $\frac{1}{\beta}L^{\beta}$ er mængden af det producerede. P$\frac{1}{\beta}L^{\beta}$ er således salgsindtægterne. W er den løn, der betales for arbejdskraft, og L er mængden af arbejdskraft, der anvendes. WL er således de samlede lønomkostninger (og de totale omkostninger, idet der ikke er andre produktionsfaktorer). Profitten bestemmes altså som salgsindtægter fratrukket omkostninger. Den optimale adfærd for virksomheden bestemmes ved at maksimere profitten med hensyn til indsatsen af arbejdskraft:

$$\max_{L} P\frac{1}{\beta}L^{\beta} - WL \tag{4}$$

Førsteordensbetingelsen bliver:

$$\frac{d(P\frac{1}{\beta}L^{\beta} - WL)}{dL} = PL^{\beta-1} - W = 0 \tag{5}$$

Hvis vi isolerer L i denne ligning, har vi den optimale indsats af arbejdskraft for virksomheden som en funktion af løn og pris.

$$L^{efterspørgsel} = \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \tag{6}$$

Bemærk at efterspørgslen afhænger af W/P, som er reallønnen (pengeløn divideret med prisniveau). Når reallønnen er høj, er det dyrt at bruge arbejdskraft, og efterspørgslen vil derfor være lille (matematisk ses det, at L^{efterspørgsel} er aftagende i W/P ved at bemærke, at eksponenten er negativ). Svarende til den optimale arbejdsefterspørgsel i (6) vil der være et optimalt produktionsniveau, som fås ved at indsætte L^{efterspørgsel} i produktionsfunktionen, (2):

$$F(L^{efterspørgsel}) = \frac{1}{\beta}\left(\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right)^{\beta} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} = C^{udbud} \tag{7}$$

Produktionen er lig den udbudte mængde af varer

Overskuddet ved dette produktionsniveau findes ved at indsætte (6) og (7) i (3):

$$\Pi = P\frac{1}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} - W\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \tag{8}$$

Husholdningerne Nyttefunktionen er en matematisk funktion, som beskriver den nytte husholdningen får ud af forbrug af varer, C, og af at holde fri, R. R er mængden af fritid inden for en given tidsperiode - eksempelvis et år. Der er en negativ sammenhæng mellem arbejde og fritid. Hvis man arbejder meget bliver der ikke tid til meget fritid - vi får derfor en lille R-værdi. Hvis vi antager, at der maximalt er $\overline{R}$ tidsenheder til rådighed inden for tidsperioden, og at arbejdstiden betegnes L, har vi:

$$R = \overline{R} - L \tag{9}$$

Grundlaget for husholdningernes optimering er nyttefunktionen:

$$U(C, R) = C^{\alpha}R^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{10}$$

Nyttefunktionen kan specificeres på mange måder. Fælles for disse er dog, at de opfylder, at nytten er voksende i forbrug og fritid, men at marginalnytten er aftagende (matematisk analyseres dette ved at finde førsteordens- og andensordensafledede). α er en parameter, som er bestemmende for husholdningens vægtning af forbrug i forhold til fritid. Hvis α er høj, betyder det, at husholdningen lægger stor vægt på forbrug og mindre vægt på fritid.

Når husholdningen maksimerer sin nytte, kan den ikke blot forbruge uendeligt meget og holde uendeligt meget fri. Der er nødt til at være overensstemmelse mellem den indkomst, husholdningen har, og det forbrug husholdningen har, da det er ikke muligt at låne i denne model. Husholdningen får indkomst fra arbejde og fra udbytte på de aktier, den har i virksomheden. Husholdningen bruger sin indkomst på forbrug - at købe en bestemt mængde, C, af forbrugsgodet. Disse restriktioner kan sammenfattes i en såkaldt budgetbegrænsning:

$$PC = WL + \Pi \tag{11}$$

P er prisen på forbrug, C er mængden af forbrug. PC er derfor omkostningen til forbrug. W er lønnen, L er arbejdstiden. WL er derfor lønindkomsten. Π er kapitalindkomsten, udbyttet fra de aktier som husholdningen ejer. Og da der kun er en virksomhed og en husholdning får husholdningen hele virksomhedens profit.

Husholdningen ønsker at maksimere nyttefunktionen under hensyntagen til budgetrestriktionen. Matematisk har vi følgende maksimeringsproblem:

$$\begin{aligned} & \max_{C,R} C^{\alpha} R^{1-\alpha} \qquad (12) \\ ubb. \qquad & PC = W(\overline{R} - R) + \Pi \end{aligned}$$

Et sådant maximeringsproblem kan løses ved hjælp af en Lagrange-funktion eller ved indsættelse af bibetingelsen i objektfunktionen. Lagrangefunktionen er givet ved:

$$\mathcal{L}(C, R, \lambda) = C^{\alpha} R^{1-\alpha} - \lambda(PC - W(\overline{R} - R) - \Pi) \tag{13}$$

hvor λ er lagrangemultiplikatoren svarende til budgetbegrænsningen. Førsteordensbetingelserne bliver:

$$\frac{d\mathcal{L}(C, R, \lambda)}{dC} = \alpha C^{\alpha-1} R^{1-\alpha} - \lambda P = 0 \tag{14}$$

$$\frac{d\mathcal{L}(C, R, \lambda)}{dR} = (1-\alpha) C^{\alpha} R^{-\alpha} - \lambda W = 0 \tag{15}$$

$$\frac{d\mathcal{L}(C, R, \lambda)}{d\lambda} = PC - W(\overline{R} - R) - \Pi = 0 \tag{16}$$

Kombineres (14) og (15) fås:

$$\alpha C^{\alpha-1}R^{1-\alpha}\frac{1}{P} = (1-\alpha)C^{\alpha}R^{-\alpha}\frac{1}{W} \tag{17}$$

Dette kan omskrives til:

$$C = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{W}{P}R \tag{18}$$

Førsteordensbetingelsen for lagrangemultiplikatoren, (16), kan omskrives til:

$$R = \overline{R} - \frac{1}{W}(PC - \Pi) \tag{19}$$

Indsætter vi dette udtryk for R i (18) fås:

$$C = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{W}{P}\left(\overline{R} - \frac{1}{W}(PC - \Pi)\right) \tag{20}$$

Isolerer vi C i denne ligning får vi:

$$C = \alpha\left(\frac{W}{P}\overline{R} + \frac{\Pi}{P}\right) = C^{efterspørgsel} \tag{21}$$

Denne ligning udtrykker husholdningens optimale forbrugsvalg som en funktion af reallønnen, maksimal fritid og den reale profit i virksomheden.Vi kan nu finde den optimale mængde fritid ved at indsætte (21) i (18) og isolere for R:

$$R = (1-\alpha)\left(\overline{R} + \frac{\Pi}{W}\right) = R^{efterspørgsel} \tag{22}$$

Dette er det optimale valg af fritid som funktion af, maksimal fritid, profit og løn. Svarende til dette niveau for fritid er det optimale arbejdsudbud givet ved:

$$L^{udbud} = \overline{R} - R^{efterspørgsel} = \alpha\overline{R} - (1-\alpha)\frac{\Pi}{W} \tag{23}$$

Fra virksomhedernes maksimering kender vi profitten. Den reale profit, $\frac{\Pi}{P}$, er givet ved:

$$\begin{aligned}
\frac{\Pi}{P} &= \frac{P\frac{1}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} - W\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}}{P} \\
&= \frac{1}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} - \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \\
&= \frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \qquad (24)
\end{aligned}$$

Forholdet mellem profit og løn er givet ved:

$$\begin{aligned}
\frac{\Pi}{W} &= \frac{P\frac{1}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} - W\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}}{W} \\
&= \left(\frac{W}{P}\right)^{-1}\frac{1}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} - W\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \\
&= \frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \qquad (25)
\end{aligned}$$

Udtrykket for den reale profit kan nu anvendes i $C^{efterspørgsel}$:

$$\begin{aligned}
C^{efterspørgsel} &= \alpha\left(\frac{W}{P}\overline{R} + \frac{\Pi}{P}\right) \\
&= \alpha\frac{W}{P}\overline{R} + \alpha\frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \qquad (26)
\end{aligned}$$

Udtrykket for forholdet mellem profit og løn kan anvendes i L^{udbud} :

$$\begin{aligned}
L^{udbud} &= \alpha\overline{R} - (1-\alpha)\frac{\Pi}{W} \\
&= \alpha\overline{R} - (1-\alpha)\frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \qquad (27)
\end{aligned}$$

Vi har nu udledt udbud og efterspørgsel på varemarkedet og på arbejdsmarkedet. De fundne udtryk er som følger:

$$C^{efterspørgsel} = \alpha\frac{W}{P}\overline{R} + \alpha\frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \quad (28)$$

$$C^{udbud} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \quad (29)$$

$$L^{efterspørgsel} = \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \quad (30)$$

$$L^{udbud} = \alpha\overline{R} - (1-\alpha)\frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \quad (31)$$

1.3.3 Markedsligevægt

Vi har nu udledt den optimale adfærd. Næste trin er at se på markedsligevægt. For at udbud kan være lig efterspørgsel, så må priserne tilpasse sig. Dvs vi antager at W og P justerer sig indtil ligevægten er opnået.

Den realløn, der giver ligevægt i arbejdsmarkedet bestemmes ved at indsætte udbud lig efterspørgsel:

$$\begin{aligned}
L^{udbud} &= L^{efterspørgsel} \quad \Updownarrow \\
\alpha\overline{R} - \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} &= \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \quad \Updownarrow \\
\alpha\overline{R} &= \frac{\beta+1-\beta-\alpha+\alpha\beta}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \quad \Updownarrow \\
\frac{W}{P} &= \left(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha+\alpha\beta}\overline{R}\right)^{\beta-1} \quad (32)
\end{aligned}$$

Den realløn, der giver ligevægt i varemarkedet bestemmes:

$$\begin{aligned}
C^{efterspørgsel} &= C^{udbud} \quad \Updownarrow \\
\alpha\frac{W}{P}\overline{R} + \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \quad \Updownarrow \\
\alpha\overline{R} &= \frac{1-\alpha(1-\beta)}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \quad \Updownarrow \\
\frac{W}{P} &= \left(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha+\alpha\beta}\overline{R}\right)^{\beta-1} \quad (33)
\end{aligned}$$

Det ses, at det er den samme realløn, der skaber ligevægt i både arbejdsmarked og varemarked. Ved denne realløn er økonomien i generel ligevægt. Agenterne udviser rationel optimerende adfærd og alle markeder "clearer" - der er overensstemmelse mellem udbud og efterspørgsel. Dvs ingen agenter har incitament til at ændre adfærd, og da der er overensstemmelse mellem udbud og efterspørgsel, er der ingen mekanismer, som trækker i retning af ændrede priser[3].

[3] Bemærk, at vi ikke kan bestemme andet end relative priser i økonomien. Det er således reallønnen, der er afgørende. $\frac{W}{P} = \frac{100}{10} = \frac{1000}{100} = 10$. En løn på 100 og en pris på 10 svarer fuldstændig til en løn på 1000 og en pris på 100.

2 Fra GE-model til CGE-model

Modellen fra forrige afsnit var et eksempel på en meget simpel generel ligevægtsmodel (GE-model). Imidlertid illustrerede den udmærket princippet i de mekanismer, der kendetegner generelle ligevægtsmodeller: Udbuds- og efterspørgselsfunktioner udledes fra optimeringsproblemer, og ved hjælp af ligevægtsbetingelser for de involverede markeder findes ligevægtspriser og -mængder.

I det følgende vil vi kort skitsere, hvorledes den simple model kan udvides i forskellige retninger. Dette vil lede os over i de såkaldte "Computable General Equilibrium (CGE)"-modeller, som er kvantitative/numeriske udgaver af store GE-modeller. Disse modeller er de nye konkurrenter til de traditionelle kvantitative makromodeller som SMEC og ADAM.

2.1 Eksempler på udvidelser af den simple GE-model

Den simple GE-model kan udvides i mange forskellige retninger, fx på husholdningssiden, på virksomhedssiden eller ved inddragelse af andre typer af agenter, fx en offentlig sektor. Vi vil i dette afsnit gennemgå nogle af disse muligheder.

2.1.1 Husholdninger

En umiddelbar udvidelse af modellen er naturligvis at introducere flere husholdninger med forskellige nyttefunktioner og budgetbegrænsninger. Dette bevirker, at modellen kan anvendes til at analysere fordelingsmæssige spørgsmål eller betydningen af befolkningens sammensætning for den økonomiske situation.

En yderligere mulighed ville være at gøre modellen dynamisk og lade agenterne/husholdningerne have en given levetid, fx T perioder. I stedet for at maksimere deres nytte i en enkelt periode, som i den simple GE-model, skal de da i stedet maksimere deres samlede nytte over de T perioder. Hvis vi antager, at den samlede nytte for de T perioder kan skrives som summen af nytterne i de enkelte perioder, så skal agenterne nu maksimere:

$$V = \sum_{t=1}^{T} U_t(C_t, R_t) \tag{34}$$

hvor U_t er nytten i periode t, som afhænger af forbruget og fritiden i periode t: C_t og R_t.

Ved at gøre modellen dynamisk kan man give husholdningerne mulighed for at låne og opspare mellem de forskellige perioder. Dette vil afspejles i deres budgetbegrænsinger, hvor rådighedsbeløbet i én periode i princippet vil afhænge af forbrugs- og arbejdsbeslutninger i alle andre perioder. Modellen må i så fald også indeholde et eller flere kapitalmarkeder, hvorigennem opsparing og lån kan formidles, fx et marked for obligationer.

Dynamiske modeller vinder stadig stigende udbredelse inden for økonomi, idet observerede økonomiske fænomener synes at indeholde tydelige intertemporale (dynamiske) aspekter, som man kun kan gøre sig håb om at fange i modeller, der eksplicit inkorporerer tidsaspektet i den økonomiske adfærd. Fx er investeringsbeslutninger typisk ikke kun afhængige af økonomiske forhold i indeværende periode men i høj grad også af forventninger til fremtiden.

Vi skal senere, i den matematiske del af kurset, se nærmere på nogle af de tekniske aspekter ved dynamiske modeller.

2.1.2 Virksomheder

På virksomhedssiden kan man ligeledes introducere flere typer af virksomheder med forskellige profitmaksimeringsproblemer. Og også her kan en dynamisk struktur synes relevant og bidrage til modellens kompleksitet.

En anden udvidelsesmulighed er at bryde med antagelsen om perfekt konkurrence i den simple GE-model fra forrige afsnit. Der antog vi, at virksomheden tog prisen for givet, når den maksimerede profitten, dvs den så sig ude af stand til at påvirke prisen via sit udbud. Denne antagelse afspejler en underliggende antagelse om, at den modellerede virksomhed kun er repræsentativ for mange konkurrerende virksomheder, som alle producerer (næsten) ens produkter. I en sådan situation kan den enkelte virksomhed ikke gøre sig håb om at påvirke prisen ved at ændre sin udbudte mængde. Men i mange tilfælde er denne antagelse ikke særlig realistisk. Der er mange produkter, som kun produceres af en enkelt eller få virksomheder, fx mærkevarer. Vi taler da om en monopol- eller en oligopolsituation. Hvis vi ønsker at indarbejde dette i vores model, kan vi ændre virksomhedens profitmaksimeringsproblem, således at der tages højde for, at virksomheden kan påvirke prisen, og at den gør dette under hensyntagen til, at det påvirker efterspørgslen efter dens produkter.

Vi kan også introducere (fysisk) kapital i modellen, således at virksomhederne ved at investere i kapital kan højne produktiviteten af arbejdskraft. Med andre ord, produktionsfunktionen kommer til at afhænge af kapital såvel som af arbejdskraft. Og vi kan da modellere en anden type af virksomheder, som producerer denne kapital.

2.1.3 Andre typer af agenter

Vi kan også udvide modellen ved at indføre nye typer af agenter. Eksempelvis kan vi introducere en fagforening. En fagforening ønsker som regel både høje (reale) lønninger og høj beskæftigelse. Da disse to målsætninger ikke er umiddelbart forenelige, kan man antage, at den søger at maksimere en objektfunktion (nyttefunktion), som afhænger både af reallønnen og beskæftigelsen. Fx kunne den maksimere den samlede reale lønsum i økonomien. Hvis vi endvidere antager, at fagforeningen har monopol på lønfastsættelse, så vil den vælge den nominelle løn, W, som maksimerer dens objektfunktion under hensyntagen til, at (real) lønnen påvirker efterspørgslen efter arbejdskraft og dermed beskæftigelsen. Dvs når fagforeningen fastsætter lønnen, er den opmærksom på det eksisterende "trade-off" mellem løn og beskæftigelse. Formelt kan dens maksimeringsproblem derfor skrives:

$$\underset{W}{Max} U(W/P, L) \qquad ubb \qquad L = L^{efterspørgsel}(W/P) \tag{35}$$

En offentlig sektor er et andet eksempel på en ny type agent. I det følgende afsnit vil vi gå lidt mere i dybden med, hvorledes den simple model kan udvides med en offentlig sektor.

2.2 Den simple GE-model med en offentlig sektor

I dette afsnit vil vi illustrere, hvorledes den simple GE-model kan udvides med en offentlig sektor, som opkræver skatter og anvender indtægten herfra til offentligt forbrug.

Man kan vælge at modellere den offentlige sektor som en agent, der maksimerer en given objekt- eller nyttefunktion under hensyntagen til en budgetbegrænsing (det offentlige budget). Dette kræver, at man formulerer en "rimelig" nyttefunktion for den offentlige sektor, en nyttefuntion som på en eller anden vis afspejler velfærden (eller det politikerne forstår ved den) i samfundet.

Alternativt kan man vælge at lade den offentlige sektor være karakteriseret ved en given (postuleret) adfærdsrelation. Dette bryder med idéen om, at den modellerede adfærd skal have rod i et optimeringsproblem, men det kan forsvares ved et argument om, at der ikke ligger en decideret nyttemaksimerende adfærd bag det offentlige forbrug, men at dette snarere er resultatet af en kompliceret politisk proces, som det vil være for omfattende at forsøge at modellere[4].

[4] Et lignende argument kan naturligvis fremføres i forbindelse med husholdningernes adfærd.

Vi vil her vælge den sidste fremgangsmåde og antage en helt simpel adfærd for den offentlige sektor, nemlig at (værdien af) det offentlige forbrug, $P \cdot G$, bestemmes af skatteindtægterne, som er givet som en andel af den samlede lønindkomst, $W\left(\overline{R}-R\right)$:

$$PG = t \cdot W\left(\overline{R}-R\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad G = \frac{t \cdot W\left(\overline{R}-R\right)}{P} \tag{36}$$

Skattesatsen, t, er en eksogen variabel og kan opfattes som et politisk instrument i modellen. Det offentlige forbrug, G, bestemmes endogent via (36), og det kan derfor ikke styres direkte i denne model men kan påvirkes indirekte via t.

Ved at introducere offentlig forbrug samt skat i modellen ændres en række af modellens andre relationer også. Umiddelbart påvirkes husholdningens budgetbegrænsing, idet skatten mindsker nettoindkomsten. Endvidere vil det være naturligt at antage, at husholdningen også har nytte af det offentlige forbrug. Husholdningens nye maksimeringsproblem kan eksempelvis være:

$$\begin{array}{ll} \underset{C,R}{Max} & C^{\alpha}R^{1-\alpha}G^{\gamma} \\ ubb. & PC = (1-t)W\left(\overline{R}-R\right) + \Pi \end{array} \tag{37}$$

hvor G indgår i husholdningens nyttefunktion, og værdien af dens forbrug, PC, skal svare til dens samlede nettoindkomst.

Selvom husholdningen har nytte af det offentlige forbrug, så ser den sig ikke i stand til at påvirke dette[5]. Dvs den tager G for givet, når den maksimerer sin nytte med hensyn til C og R. Maksimeringsproblemet i (37) giver nu anledning til en ny efterspørgselsfunktion for forbrug og en ny udbudsfunktion for arbejdskraft:

$$C^{efterspørgsel} = \alpha\left(\frac{(1-t)W}{P}\overline{R} + \frac{\Pi}{P}\right) \tag{38}$$

$$L^{udbud} = \overline{R} - R^{efterspørgsel} = \alpha\overline{R} - (1-\alpha)\frac{\Pi}{(1-t)W} \tag{39}$$

Virksomhedens profitmaksimerinsproblem ændres ikke umiddelbart, idet kun løn*indkomsten* beskattes. Virksomheden har derfor stadig de samme udbuds- og efterspørgselsfunktioner.

[5] Selvom G afhænger af den samlede lønindkomst, jf (36), så antager vi, at husholdningen ikke ser sig i stand til at påvirke G via dens arbejdsudbud. Dette skyldes antagelsen om, at husholdningen blot er repræsentativ for en stor mængde af husholdninger. I en sådan situation vil den enkelte husholdnings arbejdsudbud kun have en forsvindende indflydelse på de samlede skatteindtægter og dermed på det offentlige forbrug.

Men ligevægtsbetingelsen for varemarkedet ændres til:

$$C^{udbud} = C^{efterspørgsel} + G \tag{40}$$

idet udbuddet af varer skal dække både privat og offentlig efterspørgsel. Ligevægtsbetingelsen for arbejdsmarkedet er stadig givet ved:

$$L^{efterspørgsel} = L^{udbud} \tag{41}$$

Den nye ligevægtsreal løn kan nu findes ud fra (40) eller (41) ved indsættelse af de relevante udtryk:

$$\begin{aligned}
L^{efterspørgsel} &= L^{udbud} && \Leftrightarrow \\
\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} &= \alpha\overline{R} - (1-\alpha)\frac{\Pi}{(1-t)W} && \Leftrightarrow \\
\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} &= \alpha\overline{R} - (1-\alpha)\frac{\frac{1-\beta}{\beta}\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}}{(1-t)} && \Leftrightarrow \\
\alpha\overline{R} &= \left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta(1-t)} + 1\right]\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} && \Leftrightarrow \\
\frac{W}{P} &= \left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta(1-t)\overline{R}} + \frac{1}{\alpha\overline{R}}\right]^{1-\beta} && \qquad (42)
\end{aligned}$$

Ligevægtsreallønnen i (42) kan da indsættes i efterspørgsels- og udbudsfunktionerne for at finde ligevægtsmængderne. Fx bliver ligevægtsmængden af arbejdskraft (ved indsættelse af (42) i udtrykket for $L^{efterspørgsel}$):

$$L^{ligevægt} = \left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta(1-t)\overline{R}} + \frac{1}{\alpha\overline{R}}\right]^{-1} \tag{43}$$

I denne udvidede model kan man analysere virkningen af en ændring i skattesatsen. Det ses umiddelbart af (42) og (43), at reallønnen vil stige og indsatsen af arbejdskraft falde, hvis skattesatsen stiger. Dermed vil også produktionen og det samlede forbrug falde. Dette skyldes, at når skatten er høj, så har husholdningen mindre incitament til at arbejde, den vil da vælge at arbejde og forbruge mindre og i stedet holde mere fri. Det er også disse mekanismer, som ligger til grund for den efterhånden berømte Laffer-kurve.

På tilsvarende vis kan vi beregne ligevægtsmængderne af fritid, produktion samt privat og offentligt forbrug. Dette giver os mulighed for at beregne husholdningens nytte direkte. Ved at indsætte ligevægtsudtrykkene for fritid samt privat- og offentligt forbrug i nyttefunktionen kan vi få husholdningens nytte udtrykt som en funktion af skattesatsen. Det giver os mulighed for direkte at gå ind og beregne nytteeffekter (eller velfærdseffekter) af ændringer i skattesatsen.

2.3 CGE-modeller

"Computable General Equilibrium" modeller, eller CGE-modeller, er i princippet blot kvantificerede (numeriske) udgaver af store og komplicerede GE-modeller. I de rent analytiske modeller som ovenfor, hvor parametrene blot er repræsenteret ved bogstaver og ikke numeriske størrelser, kan vi ikke altid bestemme fortegnene (og aldrig størrelserne) af effekterne af indgreb. Ved at bestemme numeriske værdier af parametre og eksogene variable i modellen får vi entydige, omend ikke nødvendigvis pålidelige, effekter af indgreb.

Når man bygger en CGE-model starter man med en stor GE-model med en masse ligninger, parametre, endogene og eksogene variable. Dernæst kalibreres modellen, dvs man bestemmer værdier af parametre og eventuelle eksogene variable. Dette gøres ved at vælge værdierne således, at modellen kan generere værdier af de endogene variable, der svarer til de observerede (faktiske) værdier af disse variable i et givet år. Lad os tage et eksempel:

Antag at modellen indeholder følgende efterspørgselsfunktion:

$$C = c(1-t)Y \tag{44}$$

I (44) er c en parameter, medens skattesatsen, t, kan opfattes som en eksogen variabel. Værdien af parameteren c fastlægges da ved at tage de observerede værdier af C, Y og t for det år, fx 1998, som anvendes til kalibreringen. Hvis fx. $C = 500$ (mia. kr.), $Y = 1000$ og $t = 0,3$, så bliver c kalibreret til:

$$c = \frac{C}{(1-t)Y} = \frac{500}{0,7 \cdot 1000} = \frac{5}{7} \tag{45}$$

Når man kalibrerer en model går man på en måde "baglæns". Man tager de observerede værdier for et givet år af de variable, som modellen efterfølgende skal bruges til at beregne, og indsætter dem i modellens ligninger og anvender dem til at finde værdierne af modellens parametre. Imidlertid vil det ikke altid være muligt at løse for alle parameterværdier, fx hvis antallet af parametre overstiger antallet af ligninger i modellen. Da må man fastlægge nogle af parameterværdierne ud fra anden information, evt andre studier, hvor tilsvarende parametre indgår.

Efter endt kalibrering kan modellen løses for de endogene variable, typisk ved hjælp af en computer, og den skulle nu gerne generere værdier af de endogene variable, som svarer til dem, der blev anvendt ved kalibreringen. Derefter kan man iværksætte en følsomhedsanalyse af den kalibrerede model, hvor man ændrer en smule på de forskellige parameterværdier og undersøger, hvor meget det påvirker værdierne af de endogene variable. Hvis værdierne af de endogene variable er meget følsomme overfor ændringer i parameterværdierne er modellen ikke særlig robust, og en eventuel efterfølgende analyses resultater må derfor betragtes med en vis skepsis. Alternativt kan man forsøge at respecificere modellen, så større robusthed opnås.

Den kalibrerede model kan nu anvendes til dens egentlige formål, som er at analysere virkninger af ændringer i eksogene variable og/eller parametre. Fx kan man analysere effekterne af en ændring i skattesatsen eller i andre politiske instrumenter.

Fordelene ved disse modeller sammenlignet med de traditionelle makromodeller er, at de bygger på et mikroøkonomisk fundament, som tillader en høj detaljeringsgrad, hvis dette ønskes. Dvs modellerne er teoretisk mere velfunderede. Ved at basere modellerne på optimerende adfærd sikrer man sig, at de fokuserer på den del af den økonomiske aktivitet, som kan forklares som værende drevet af økonomiske incitamenter. Vi er ikke interesserede i at forklare et observeret økonomisk fænomen som et resultat af specifikke forhold/omstændigheder. Vi ønsker derimod at forklare (dele af) fænomenet ud fra generelle underliggende økonomiske mekanismer. Derfor pålægges analyserne diciplin ved at basere dem på antagelser om optimerende adfærd. Spørgsmålet er blot, om det er den rigtige disciplin man pålægger.

Derudover giver CGE-modellerne mulighed for direkte at sammenligne agenternes nytte under alternative politiske indgreb, som skitseret i forrige afsnit.

Ulemperne ved modellerne er primært den måde, de kalibreres på. Man antager i realiteten en model, og så ”skruer” man på parametrene indtil den giver os det rigtige produkt. Men blot fordi en model kan generere de rigtige værdier i basisåret, så fortæller det os intet om dens anvendelighed i forbindelse med analyser af forskellige økonomiske indgreb.

2.3.1 Danske CGE-modeller

I det følgende vil nogle af de store danske CGE-modeller kort blive nævnt. I de senere år har udarbejdelsen af CGE-modeller i Danmark for alvor taget fart med projekterne i Danmarks Statistik, Erhvervsministeriet og Det økonomiske Råds Sekretariat som nogle af de mest kendte[6].

DREAM Danmarks Statistik er ved at udarbejde Danish Rational Economic Agents Model (DREAM). Denne model er dynamisk og fokuserer på arbejdsmarkedet, løndannelsen samt uddanelses- og skatteforhold. Den har indbygget en avanceret husholdningsstruktur, således at den kan tage hensyn til demografiske forhold. Modeldokumentation kan findes på internetadressen: http://www.dst.dk.

Modellen er blevet anvendt i Det økonomiske Råds seneste rapport til analyse af aldringsproblemet i Danmark. Rapporten kan findes på internetadressen: http://www.dors.dk/rapp/index.htm. Desuden bliver modellen anvendt i den kommende finansredegørelse.

GESMEC GESMEC, som er en statisk CGE-model tilhører Det Økonomiske Råds Sekretariat. Den er blevet anvendt til at regne på forskellige politiske indgrebs indvirkning på den danske CO_2-emmision og har desuden været brugt til at beregne konsekvenserne for Danmark af en liberalisering af EU's landbrugspolitik.

Når man betragter miljømæssige aspekter som fx udledningen af CO_2, så må det formodes, at virksomhedernes adfærd er en central størrelse. Det er den, man forsøger at påvirke med de forskellige afgifter. CGE-modellerne har den fordel, i forhold til de traditionelle makromodeller, at de eksplicit modellerer den økonomiske incitamentsstruktur. På den måde er der større mulighed for, at man fanger noget af den adfærd, som bestemmer CO_2-emmisionen, end hvis man anvender en traditionel makromodel baseret på sammenhænge mellem variable på makroniveau og uden en egentlig incitamentsstruktur.

MobiDK MobiDK er erhvervsministeriets CGE-model (eller CGE-projekt). Modellen er foreløbig statisk og er primært rettet mod at analysere virkningerne af dansk erhvervspolitik. Modellen er beskrevet nærmere på internetadressen: http://www.gams.com/projects/dk/mobidk.htm.

[6]Se endvidere Toke W. Petersen (1997): "Introduktion til CGE-modeller", som findes på internetadressen: http://www.dst.dk, for en mere udførlig gennemgang af de forskellige danske CGE-modeller.

3 Økonomiske teoriretninger

3.1 Introduktion

Vi har gennemgået "Traditionelle makromodeller" og "Moderne makromodeller". Hvordan kan disse forskellige modeller placeres inden for de forskellige økonomiske "skoler"? Nedenfor vil vi først forsøge en historisk opdeling. Dernæst vil vi forsøge en opdeling ud fra flere forskellige kriterier. Og sluttelig vil vi diskutere behandlingen i den traditionelle lærebog[7].

3.2 Historisk opdeling

Nedenfor er den historiske udvikling i den økonomiske teori forsøgt skitseret. Figuren viser en kronologisk udvikling i den økonomiske teori.

Figuren skal dog ikke opfattes for bogstaveligt. Flere forskellige skoler kan sagtens eksistere samtidig og de angivne årstal kan diskuteres. Efter krisen i 1970'erne har splittelsen inden for makrøkonomi været så udtalt, at det ikke er muligt at angive en dominerende skole.

De første økonomer benævnes klassikerne og har ikke umiddelbart andet til fælles end deres historiske placering før 1870. Efter 1870 er det den neoklassiske skole, der er dominerende. Kodeordene er ligevægt og marginalisme. Den neoklassiske skole mente i overvejende grad, at økonomien i sig selv var i stand til at skabe efficiente allokeringer, og derfor skulle det offentlige blande sig mindst muligt.

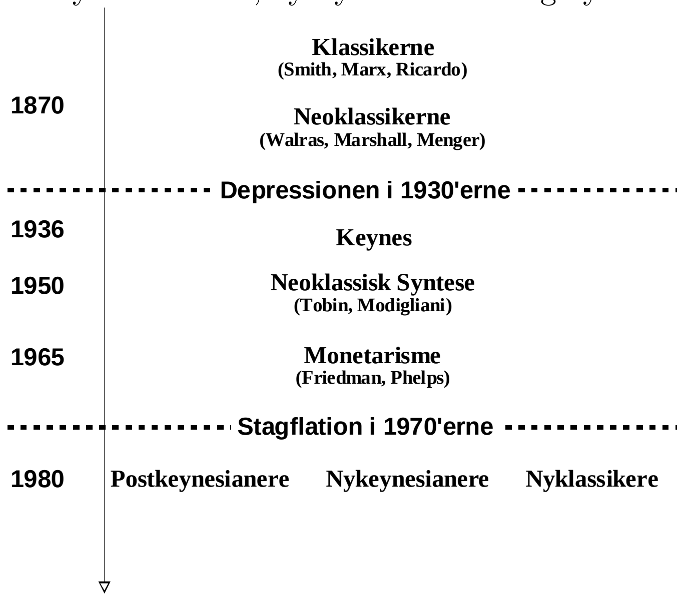
Med depressionen i 1930'erne blev det tydeligt, at markedsøkonomien ikke var ufejlbarlig. Keynes beskrev i sine teorier markedsøkonomiens svagheder og argumenterede for det gavnlige i en aktiv økonomisk politik.

Efter Anden Verdenskrig var der en høj grad af konsensus inden for makroøkonomi. De keynesianske synpunkter smeltede sammen med de ældre neoklassiske teorier og dannede den neoklassiske syntese. Der var en stærk tro på den offentlige sektor som en stabiliserende mekanisme i markedsøkonomien. Efterhånden opstod der dog et monetaristisk modspil til den Neoklassiske Syntese. Monetaristerne fokuserede på den monetære side af økonomien og argumenterede for det ønskelige i en mere passiv offentlig sektor.

Med stagflationen i 1970'erne fik den traditionelle keynesiansk inspirerede teori (neoklassisk syntese) alvorlige problemer. Den keynesianske økonomiske teori, ifølge hvilken lavkonjunkturer kunne undgås gennem ekspansiv finanseller pengepolitik, viste sig utilstrækkelig. Trods gentagne indgreb vedblev

[7] E. Alhøj og T. Otkjær (1994). *Samfundsøkonomi*, Columbus.

arbejdsløsheden med at stige sammen med inflationen. Dette blev startskuddet til udviklingen af en række forskellige skoler inden for makroøkonomi: Postkeynesianismen, nykeynesianismen og nyklassicismen.



Selvom der tydeligvis eksisterer forskelle blandt moderne økonomer og moderne økonomiske modeller, så er der ikke en skarp opdeling. Overgangen er meget flydende: En nyklassisk model kan godt have keynesianske elementer, og en nykeynesiansk model kan rumme mange nyklassiske elementer.

Dette brogede billede skyldes, at en økonomisk teori kan klassificeres på mange forskellige måder. Det er derfor muligt, at en model kan være postkeynesiansk i én henseende, men nyklassisk i en anden henseende.

3.3 Flere dimensioner i grupperingen

Neden for er angivet nogle af de vigtige dimensioner i grupperingen af økonomiske teorier:

- Aksiomatisk fundering
- Formalisme
- Forventninger
- Ligevægt
- Markedernes effektivitet

- Intertemporal struktur

Økonomiske teorier adskiller sig ved den *aksiomatiske fundering*, dvs i hvor høj grad den økonomiske model understøttes af et aksiomatisk mikrofundament. Er alle relationer udledt ved nytte- og profitmaksimering således, at modellen har et strengt mikroøkonomisk/aksiomatisk fundament. Eller er modellen udelukkende formuleret på makroniveau uden et mikroøkonomisk grundlag.

Økonomiske teorier adskiller sig ved graden af *formalisme.* Er det en strengt matematisk teori eller en mere intuitiv verbal teori.

Økonomiske teorier adskiller sig ved antagelser om *forventningsdannelsen* i økonomien. Har agenterne rationelle forventninger, eller tilpasser forventningerne sig kun trægt til ændrede økonomiske forudsætninger.

Økonomiske teorier adskiller sig ved anvendelsen af *ligevægtsbegreb.* Anvendes der et generelt ligevægtsbegreb, så man kun analyserer situationer, hvor alle markeder simultant er i ligevægt. Eller anvendes et svagere ligevægtbegreb (partiel ligevægt).

Økonomiske teorier adskiller sig ved synet på *markedernes funktionsmåde.* Antager man, at markederne er i stand til effektivt at allokere ressourcerne, eller antager man, at markederne er imperfekte eller præget af ustabilitet.

Økonomiske teorier adskiller sig ved den *intertemporale struktur.* Herved menes teoriens behandling af tid. Er det en statisk model, som kun kan analysere en statisk ligevægt, eller er det en dynamisk model, som kan beskrive økonomiens udvikling og tilpasning over tid (jf. den dynamiske AD-AS-model).

De moderne økonomiske teorier (postkeynesianisme, nykeynesianisme og nyklassicisme) lægger alle vægt på at have et solidt mikrofundament. Og udviklingen går i retning af større grad af formalisme (anvendelse af matematiske formuleringer) inden for alle teoriretninger. Men hvad adskiller så de forskellige teoriretninger inden for moderne økonomisk teori?

Den postkeynesianske skole tror ikke på, at markedsmekanismen konstant er i stand til at skabe en optimal ligevægt i økonomien. De institutionelle rammer for økonomien er under konstant forandring og økonomien justerer sig hele tiden. Ligevægt er derfor et abstrakt begreb, som ikke har meget med virkeligheden at gøre. Realistiske økonomiske modeller forsøger derfor at inddrage de skiftende institutionelle rammer i analysen, idet disse har stor indflydelse på den økonomiske virkelighed. Det anses ikke som noget alvorligt problem at anvende partielle ligevægtsmodeller.

Den nykeynesianske skole ser generelle ligevægtmodeller som den bedste form for modellering. Men da dette er teknisk meget kompliceret, kan partielle ligevægtsmodeller bruges som en begyndelse. Den nykeynesianske skole bygger på et mikrofundament: De makroøkonomiske sammenhænge er udledt på grundlag af agenternes optimering på mikroniveau. Der fokuseres på imperfektioner i markederne og disses betydning for økonomiens funktionsmåde.

Den nyklassiske skole anvender helst kun generelle ligevægtsmodeller. Man ønsker et strengt aksiomatisk grundlag: Et mikrofundament med rationelle, optimerende agenter. Der opereres ofte med perfekt konkurrence, som indebærer, at markederne fungerer meget effektivt.

3.4 Diskussion af de gennemgåede modeller

3.4.1 Den traditionelle makromodel (IS-LM)

- Ren makromodel, intet mikrofundament
- Løs matematisk formulering (skærer akserne, kun en approksimation)
- Statisk model (kun én periode), dvs ingen eksplicit antagelse om forventninger
- Partiel ligevægt (mangler udbudsside/arbejdsmarked)
- Ingen eksplicit antagelse om konkurrenceforhold på markederne

Denne model kan nok bedst placeres i den keynesianke/neoklassiske syntese rubrik.

AD-AS-modellen I forbindelse med AD-AS-modellen kan man gøre modellen mere eller mindre (neo)-klassisk ved at ændre på AS-kurvens hældning. Hvis AS-kurven er helt flad, så svarer det til konstante priser, og vi har den traditionelle keynesianske IS-LM-model, hvor produktionen udelukkende bestemmes af efterspørgslen. Efterhånden som hældningen på AS-kurven bliver større, bliver modellen mere (neo)-klassisk, og med en helt lodret AS-kurve bliver produktionen udelukkende bestemt på udbudssiden. Dermed har efterspørgselsfremmende politik ikke nogen virkning på produktionsniveauet.

3.4.2 Den moderne makromodel (GE)

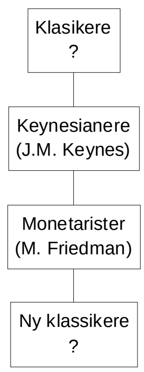
- Mikrofundament
- Mere præcis matematisk formulering
- Statisk model (kun én periode), dvs ingen eksplicit antagelse om forventninger

- Generel ligevægt (simultan ligevægt på vare- og arbejdsmarked)
- Der antages fuldkommen konkurrence (virksomhederne kan ikke påvirke priserne)

Der er tale om en generel ligevægt-model med fuldkommen konkurrence. Faktisk en strengt walrasiansk model i den forstand, at vi har perfekt konkurrence på alle markeder. Så måske placeres den bedst som nyklassisk. Modellen kan drejes i nykeynesiansk retning ved at indføre imperfektioner i markederne (eksempelvis monopoler) eller arbejde med tilpasningsomkostninger, således at produktionen ikke kan tilpasse sig frit i forbindelse med indgreb.

3.5 Lærebogens gruppering

Med udgangspunkt i "Samfundsøkonomi" (jf. ovenstående fodnote) kan lærebogens fremstiling af de økonomiske teoriretninger summeres på følgende måde:



3.5.1 Klassikere

Klassikerne beskrives som dem "før Keynes". Det er uklart, hvem det drejer sig om, men det er en type af økonomer, som tror blindt på markedskræfternes effektivitet, og som mener, at man ikke skal gribe forstyrrende ind i økonomien.

3.5.2 Keynesianere

Keynesianere beskrives som efterspørgselsorienterede. I modsætning til klasikerne mener keynesianerne ikke, at markedsøkonomien i sig selv er i stand til at skabe en optimal ligevægt. Der er derfor behov for en aktiv regering, som kan skabe den nødvendige efterspørgsel for at sikre fuld beskæftigelse og for at udjævne konjunkturbevægelserne. Finanspolitikken er det foretrukne instrument.

3.5.3 Monetarister

Monetaristerne står i modsætning til keynesianerne. De mener ikke, det offentlige bør eller kan gribe grundlæggende ind i økonomien. Efterspørgselsfremmende politik er ikke effektiv på lang sigt. Det er mindre klart, om efterspørgselsfremmende pollitik kan virke på kort sigt. Pengepolitikken er i centrum.

3.5.4 Ny-klassikere

En videreudvikling af den monetaristiske skole. Agenterne antages at være rationelle. Der lægges i lighed med klassikerne vægt på markedskræfternes effektivitet. Det offentlige har en meget lille rolle i den økonomiske politik.

3.5.5 Konklusion

Opdelingen i lærebogen fanger således en del centrale aspekter. Men i forbindelse med moderne makroteorier er det nødvendigt at inddrage flere dimensioner for at lave en meningsfuld gruppering. Dette kræver dog en del meget abstrakte begreber, som umiddelbart er vanskelige at konkretisere.

4 Dynamiske Modeller

Formålet med denne del af kurset er at give en introduktion til nogle af de matematiske teknikker, der anvendes i forbindelse med dynamiske økonomiske modeller. Som nævnt tidligere vinder dynamiske modeller stadig større indpas i økonomisk teori, idet mange observerede økonomiske fænomener synes at indeholde tydelige intertemporale (dynamiske) aspekter.

Et simpelt dynamisk optimeringsproblem vil i det følgende blive opstillet i både diskret og kontinuert tid. Vi vil løse den kontinuerte version af problemet, medens løsningen af problemet i diskret tid vil være overladt som en opgave til læseren.

4.1 En simpel dynamisk model i diskret tid[8]

Vi forestiller os en økonomi, som kun består af én repræsentativ agent (Robinson) og én type af varer (kokosnødder), som enten kan forbruges (spises) eller anvendes som kapital i produktionen (plantes). Ved starten af periode 0 er økonomien (øen) udstyret med K_0 enheder kapital (kokosnødder). I løbet af periode 0 producerer disse kapitalenheder $f(K_0)$ nye enheder, hvor

$$f(K_0) = K_0^{\gamma} \tag{46}$$

er økonomiens produktionsfunktion (en beskrivelse af teknologien for dyrkning af kokosnødder). Desuden vil $(1-\delta)K_0$ af de oprindelige K_0 kapitalenheder kunne anvendes igen efter produktionen (de kokosnødder man kan grave op i god behold). Dvs δK_0 af kapitalenhederne afskrives/går tabt under produktionen. De oprindelige K_0 enheder vil derfor give agenten

$$f(K_0) + (1-\delta)K_0 = K_0^{\gamma} + (1-\delta)K_0 \tag{47}$$

enheder ved afslutningen af periode 0.

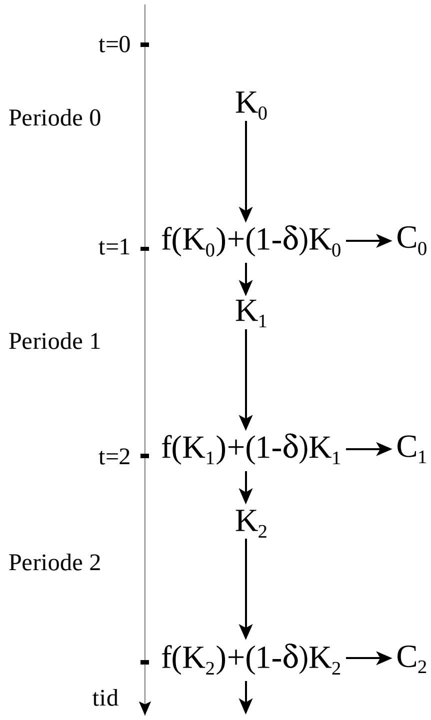
Ved afslutningen af perioden skal den repræsentative agent vælge, hvor mange af disse $f(K_0) + (1-\delta)K_0$ kapitalenheder (kokosnødder) han vil forbruge (spise) nu, C_0, og hvor mange han vil investere (plante), K_1. Den investerede mængde, K_1, bliver da lig periode 1's startkapital. Med andre ord, de $f(K_0) + (1-\delta)K_0$ enheder skal fordeles mellem C_0 og K_1.

Den mængde, som vælges til periode 1's startkapital, K_1, vil da i løbet af periode 1 vokse til $f(K_1) + (1-\delta)K_1$ enheder (kokosnødderne plantes og

[8] Mere generelle udgaver af denne model kan bla findes i D. Romer (1996): "Advanced Macroeconomics", McGraw-Hill og R.J. Barro & X. Sala-i-Martin (1995): "Economic Growth", McGraw-Hill.

høstes), som da skal fordeles mellem forbrug i periode 1, C_1, og investering til næste periode, K_2.

Denne problemstilling gentager sig periode efter periode, og strukturen i problemet kan derfor skitseres således:



Men hvordan afgør agenten, hvor stor en mængde han vil forbruge nu, og hvor stor en mængde han vil investere? Hvis han vælger at forbruge relativt meget i periode 0, så vil der være mindre tilovers til investering, og dermed vil den fremtidige mængde kapital blive mindre. Dette vil give mindre forbugsmuligheder i kommende perioder. Derfor er beslutningen i hver periode i princippet en afvejning af nutidigt forbrug over for fremtidige forbrugsmuligheder.

Fordelingen mellem forbrug og investering i hver periode finder agenten ved at maksimere sin intertemporale nyttefuntion, som antages at afhænge af forbruget i indeværende og alle fremtidige perioder. Dvs hans samlede nytte er en funktion af $C_0, C_1, C_2, ...$ Et eksempel på en sådan nyttefunktion:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^{t+1} \cdot u(C_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta} \right)^{t+1} \cdot \frac{1}{\alpha} C_t^{\alpha} \qquad ; \quad 0 < \alpha < 1, \; \beta > 0 \tag{48}$$

$u(C_t)$ er nytten af det, der forbuges i slutningen af periode t, dvs til tidspunkt $t+1$, jf figuren ovenfor. For at udtrykke den nutidige værdi af denne nytte, diskonteres den med faktoren $\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+1}$. Det svarer nøjagtig til den måde, man diskonterer en fremtidig indtægt/betaling med faktoren $\left(\frac{1}{1+rente}\right)^{t+1}$, hvis den først falder om $t+1$ perioder, og man ønsker at beregne dens værdi i dag. β, kaldes agentens subjektivediskonteringsfaktor. Vi kan fortolke β som agentens vægtning af nutidigt forbrug i forhold til fremtidigt forbrug. Jo lavere β des mere værdsætter agenten fremtidigt forbrug. I grænsetilfældet, $\beta = 0$, vægter agenten forbrug i alle perioder lige højt. Den samlede nytte, U, er lig med summen af alle de tilbagediskonterede periodenytter.

Hver periodes nyttefunktion $u(C_t) = \frac{1}{\alpha}C_t^{\alpha}$ har strengt aftagende marginalnytte, $u'(C_t) = C_t^{\alpha-1}$, idet den 2. afledte af $u(C_t)$ er strengt negativ. Endvidere går marginalnytten mod uendelig, når C_t går mod nul. Derfor vil agenten altid vælge at sprede sit forbrug over alle perioder, han vil vælge $C_t > 0$ for alle t. Dermed vil han også være nødt til at investere i hver periode. Spørgsmålet er nu, hvor meget der investeres i hver periode og dermed, hvorledes forbruget og mængden af kapital udvikler sig over tid.

Når agenten maksimerer sin nyttefunktion, gør han det under den begrænsing, at i hver periode skal summen af det han forbruger, C_t, og det han investerer, K_{t+1}, svare til den mængde kapital han har til rådighed. Dvs han skal overholde følgende budgetbegrænsning:

$$C_t + K_{t+1} = K_t^{\gamma} + (1-\delta)K_t \qquad ; \quad t = 0, 1, 2, ... \tag{49}$$

Formelt kan vi derfor skrive agentens optimeringsproblem som:

$$\begin{aligned}
&\underset{C_0, C_1, ...}{Max} && \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+1} \cdot \frac{1}{\alpha} C_t^{\alpha} && (50)\\
&ubb && C_t + K_{t+1} = K_t^{\gamma} + (1-\delta)K_t \qquad ; \quad t = 0, 1, 2, ... && (51)\\
& && C_t \geq 0 \qquad ; \quad t = 0, 1, 2, .. && (52)\\
& && K_t \geq 0 \qquad ; \quad t = 1, 2, .. && (53)\\
& && K_t = K_0 \qquad ; \quad t = 0 && (54)
\end{aligned}$$

hvor (52) og (53) sikrer, at der ikke kan vælges negative værdier af forbrug og kapital, medens (54) fortæller os, at den initiale kapitalmængde, K_0, er eksogent givet.

Det er overladt som en opgave til læseren at løse optimeringsproblemet i (50)-(54). Da det ofte er mere bekvemt at arbejde med optimeringspoblemer i kontinuert tid, vil vi i det efterfølgende formulere og løse det tilsvarende optimeringsproblem i kontinuert tid.

4.2 Modellen i kontinuert tid

Den kontinuerte version af optimeringsproblemet kan fortolkes som den situation, hvor forbrugs- og investeringsbeslutninger foretages kontinuerligt og ikke kun ved afslutningen af hver periode. Til ethvert tidspunkt skal agenten bestemme fordelingen af produktionen mellem forbrug og investering. Formelt lader vi det kontinuerte optimeringsproblem være givet ved:

$$\underset{C(t)}{Max} \quad \int_0^\infty e^{-\beta t}\frac{1}{\alpha}C(t)^\alpha dt \tag{55}$$

$$ubb \quad \overset{\bullet}{K}(t) = K(t)^\gamma - \delta K(t) - C(t) \tag{56}$$

$$C(t) \geq 0 \tag{57}$$

$$K(t) \geq 0 \tag{58}$$

$$K(0) = K_0 \tag{59}$$

Bemærk, at vi nu anvender notationen $C(t)$ og $K(t)$ for at adskille de kontinuerte variable fra de diskrete variable. $C(t)$ er forbrug til tidspunkt t (reelt er det forbruget til tidspunkt t opgjort per tidsenhed). Tilsvarende er $\frac{1}{\alpha}C(t)^\alpha$ nytten til tidspunkt t, som også kaldes "øjebliksnytten". Den samlede nytte udregnes som integralet over de tilbagediskonterede øjebliksnytter, hvor $e^{-\beta t}$ er den kontinuerte diskonteringsfaktor[9]. $\overset{\bullet}{K}(t)$ er den afledte af $K(t)$ med hensyn til t, dvs ændringen i kapitalens størrelse til tidspunkt t. Sammenhængen mellem budgetbetingelsen i (56) og den i (51) ses måske bedre, hvis sidstnævnte omskrives til:

$$\begin{aligned} C_t + K_{t+1} &= K_t^\gamma + (1-\delta)K_t \qquad \Leftrightarrow \\ K_{t+1} - K_t &= K_t^\gamma - \delta K_t - C_t \end{aligned} \tag{60}$$

Når vi skal løse problemet i (55)-(59) benytter vi os af "Pontryagin's Maximum Principle":

[9] Sammenhængen mellem den kontinuerte og den diskrete diskonteringsfaktor er givet ved følgende relation: $\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+1} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t}dt = \frac{1}{\beta}$

4.3 Pontryagin's Maximum Principle

Lad os kort ridse ideen i "Pontryagin's Maximum Principle" op.[10] Betragt følgende mere generelle maksimeringsproblem:

$$\underset{y(t)}{Max} \quad \int_0^\infty f\left[t, x(t), y(t)\right] dt \tag{61}$$

$$ubb \quad \overset{\bullet}{x}(t) = g\left[t, x(t), y(t)\right] \tag{62}$$

$$x(0) = x_0 \tag{63}$$

$$\lim_{T\to\infty} x(T) \geq 0 \tag{64}$$

Bemærk, at bortset fra at bibetingelserne (57) og (58) er mere restriktive end (64), så kan optimeringsproblemet fra (55)-(59) skrives på formen i (61)-(64).

Hamilton-funktionen hørende til problemet i (61)-(64) er givet ved:

$$H(\lambda, t, x, y) = f(t, x, y) + \lambda g(t, x, y) \tag{65}$$

Og førsteordensbetingelserne for maksimeringsproblemet er da som følger:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \tag{66}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\overset{\bullet}{\lambda} \tag{67}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \overset{\bullet}{x} \tag{68}$$

samt en transversalitetsbetingelse, som udspringer af bibetingelsen i (64):

$$\lim_{T\to\infty} \lambda(T) \geq 0 \quad og \quad \lim_{T\to\infty} x(T)\lambda(T) = 0 \tag{69}$$

Førsteordensbetingelserne[11] kan typisk løses for nogle differentialligninger i x og y, hvis dynamik derefter kan analyseres i et fasediagram.

[10] Mere uddybende fremstillinger af "the Hamiltonian approach" findes i fx P.J. Lambert (1985): "Advanced Mathematics for Economists", Blackwell.

[11] Førsteordensbetingelserne samt transversalitetsbetingelsen er nødvendige men ikke altid tilstrækkelige betingelser. Imidlertid, hvis fx f og g begge er konkave i x og y, da er de tilstrækkelige betingelser.

4.4 Løsning af modellen

Som nævnt har vores optimeringsproblem i (55)-(59) nogle ekstra bibetingelser i forhold til maksimeringsproblemet i (61)-(64). Vi vælger dog indtil videre at se bort fra disse ekstra betingelser og løser derfor følgende problem:

$$\begin{aligned}
&\underset{C(t)}{Max} && \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{1}{\alpha} C(t)^{\alpha} dt && (70)\\
&ubb && \overset{\bullet}{K}(t) = K(t)^{\gamma} - \delta K(t) - C(t) && (71)\\
& && K(0) = K_0 && (72)\\
& && \lim_{T\to\infty} K(T) \geq 0 && (73)
\end{aligned}$$

Betingelserne om at $K(t)$ og $C(t)$ skal være ikke-negative i alle perioder vil blive inddraget igen senere, når vi skal analysere modellens dynamik.

Hamilton-funktionen hørende til problemet i (70)-(73) er da givet ved:

$$H(\lambda, t, K, C) = e^{-\beta t} \frac{1}{\alpha} C^{\alpha} + \lambda \left[K^{\gamma} - \delta K - C \right] \tag{74}$$

hvor tidsindeks er udeladt af hensyn til overskueligheden. Vi får således følgende førsteordensbetingelser:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial C} &= e^{-\beta t} C^{\alpha - 1} - \lambda = 0 && (75)\\
\frac{\partial H}{\partial K} &= \lambda \left[\gamma K^{\gamma - 1} - \delta \right] = -\overset{\bullet}{\lambda} && (76)\\
\frac{\partial H}{\partial \lambda} &= K^{\gamma} - \delta K - C = \overset{\bullet}{K} && (77)
\end{aligned}$$

samt en transversalitetsbetingelse:

$$\lim_{T\to\infty} \lambda(T) \geq 0 \quad og \quad \lim_{T\to\infty} K(T)\lambda(T) = 0 \tag{78}$$

Ligesom med de ekstra bibetingelser, vil vi indtil videre se bort fra transversalitetsbetingelsen.[12]

[12] Transversalitetsbetingelsen sikrer i princippet at (nutids)værdien af kapital skal gå mod nul. Hvis den ikke er overholdt ($\lim K(T)\lambda(T) > 0$), så kan det fortolkes som, at der ophobes værdifuld kapital i det lange løb. Agenten kan da øge sin nytte ved i stedet for at forbruge noget af denne kapital. Derfor vil et brud på transversalitetsbetingelsen være inoptimalt.

(75)-(77) kan nu løses for to førsteordens differentiallligninger i C og K. Først differentieres (75) med hensyn til t, hvilket giver os:

$$-\beta e^{-\beta t}C^{\alpha-1} + (\alpha-1)e^{-\beta t}C^{\alpha-2}\dot{C} = \dot{\lambda} \tag{79}$$

Derefter indsættes (75) og (79) i (76):

$$\begin{aligned} \gamma K^{\gamma-1} - \delta &= -\frac{-\beta e^{-\beta t}C^{\alpha-1} + (\alpha-1)e^{-\beta t}C^{\alpha-2}\dot{C}}{e^{-\beta t}C^{\alpha-1}} \qquad \Leftrightarrow \\ \gamma K^{\gamma-1} - \delta &= \beta + (1-\alpha)\frac{\dot{C}}{C} \qquad (80) \end{aligned}$$

Vi har da to differentialligninger, (77) og (80), i C og K. Disse kan også skrives:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= K^{\gamma} - \delta K - C \qquad (81) \\ \frac{\dot{C}}{C} &= \frac{\gamma K^{\gamma-1} - \delta - \beta}{1-\alpha} \qquad (82) \end{aligned}$$

Desuden har vi stadig vores initiale betingelse $K(0) = K_0$, transversalitetsbetingelsen, (78), samt de ekstra bibetingelser om ikke-negative værdier af C og K.

4.5 Analyse af modellens dynamik

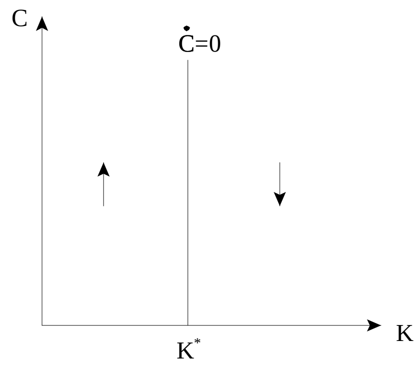
For givne startværdier af K og C fortæller differentialligningerne i (81) og (82) os, hvorledes K og C vil udvikle sig over tid. Det er derfor oplagt at analysere disse ligninger nærmere for at undersøge modeløkonomiens egenskaber. Lad os i første omgang betragte dem separat.

4.5.1 Dynamikken i C

(82) beskriver dynamikken/udviklingen i variablen C. Det fremgår af (82), at $\dot{C} = 0$, dvs C er konstant, når:

$$\begin{aligned} &\gamma K^{\gamma-1} - \delta - \beta = 0 \qquad \Leftrightarrow \\ &K = \left(\frac{\delta+\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (83) \end{aligned}$$

Lad os betegne denne kapitalværdi K^*. Dynamikken i C kan da indtegnes i følgende fasediagram:



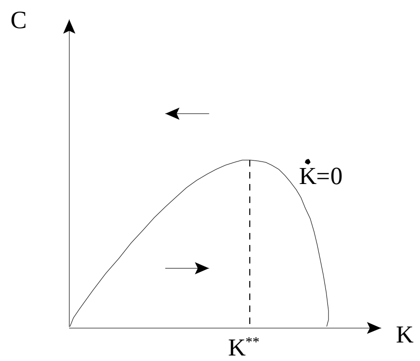
Af (82) fremgår det, at når $K < K^*$, da vil $\dot{C} > 0$, idet C er positiv. Og det omvendte er tilfældet, når $K > K^*$. Dette giver os pilene i ovenstående diagram, som indikerer dynamikken i C.

4.5.2 Dynamikken i K

(81) giver os K's dynamik. Hvis vi sætter $\dot{K} = 0$, får vi:

$$C = K^\gamma - \delta K \tag{84}$$

hvilket giver os følgende kurve i K-C-diagrammet, hvor K er konstant:



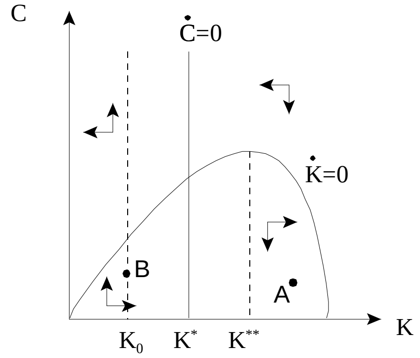
Kurven har toppunkt i K^{**} givet ved:

$$\begin{aligned} \gamma K^{\gamma-1} - \delta = 0 \qquad & \Leftrightarrow \\ K^{**} = \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} > K^* & \end{aligned} \tag{85}$$

Og pilene i diagrammet er fundet ved at betragte (81). Når $C > K^\gamma - \delta K$, dvs når vi befinder os i punkter over kurven, da vil $\dot{K}$ være negativ, og omvendt når vi befinder os under kurven.

4.5.3 Den samlede dynamik

De to ovenstående fasediagrammer kombineres nu i ét diagram.



Dette diagram viser os, hvorledes C og K vil udvikle sig fra et givet punkt, dvs for givne startværdier af C og K. Punktet S er det eneste punkt, hvor både C og K er konstante. Dvs hvis økonomien er i punkt S, så forbliver den der. Dette punkt kaldes derfor "Steady State".[13] Hvis vi derimod starter i fx punktet A, så vil økonomien ende i en situation, hvor C til sidst bliver negativ, hvilket ikke er en holdbar/mulig situation. Men heldigvis er det også kun startværdien af K, som er givet udefra, og punkt A kan derfor udelukkes som et muligt startpunkt, idet værdien af C i punktet A ikke kan være optimalt valgt. Spørgsmålet er nu, om vi på denne måde og for enhver startværdi af K kan bestemme (d)en tilhørende (optimale) værdi af C ud fra diagrammet ved hjælp af de ekstra bibetingelser (og transversalitetsbetingelsen), som vi indtil videre har set bort fra. Når først vi har den tilhørende startværdi af C, så giver fasediagrammet os den efterfølgende udvikling i C og K.

Lad os fx betragte startværdien K_0 i diagrammet. Kan vi da finde ud af, hvilken C-værdi agenten vælger? Alle C-værdier på den stiplede linie igennem K_0, som ligger over $\dot{K} = 0$ linien kan umiddelbart udelukkes, idet de implicerer, at økonomien før eller siden havner i en situation, hvor $K < 0$, hvilket bryder med en af bibetingelserne. En sådan C-værdi kan derfor ikke være løsningen. Tilsvarende vil C-værdier under, men tæt på, $\dot{K} = 0$ linien kunne udelukkes, eftersom $\dot{K}$ vil være relativt lille i disse punkter, jf (81), og økonomien derfor vil krydes $\dot{K} = 0$ linien, før den rammer $\dot{C} = 0$ linien. Og man vil derfor igen havne i en uholdbar situation på sigt, hvor $K < 0$. Endvidere kan vi udelukke punkter nederst på den stiplede linie, idet $\dot{C}$ der

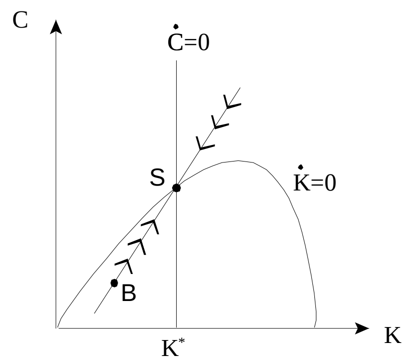
[13] Der findes faktisk to andre punker, hvor både C og K er konstante: Punktet $(K, C) = (0, 0)$ samt punktet $(K, C) = (K^{***}, 0)$.

vil være relativt lille, jf (82), hvilket betyder, at økonomien vil krydse $\dot{C} = 0$ linien først og havne i en situation med negativ (ikke-positiv) C på sigt.[14] Da vores funktionsudtryk er kontinuerte, findes der præcis ét kritisk punkt, B, på den stiplede linie, hvorfra økonomien vil bevæge sig mod punktet S. Fra alle punker over B vil man bevæge sig mod en situation med negativ K, og fra alle punkter under B vil man bevæge sig mod en situation med negativ (ikke-positiv) C. Det er endvidere let at kontrollere, at forløbet startende i B overholder de ekstra bibetingelser samt transversalitetesbetingelsen. Det sidstnævnte ses ved at bemærke, at vi fra (75) har:

$$e^{-\beta t}C^{\alpha-1} = \lambda \tag{86}$$

Så når C går mod en konstant som i punktet S, så vil λ gå mod nul, og transversalitetsbetingelsen, (78), vil derfor være opfyldt.

Tilsvarende ræssonementer gælder for alle andre startværdier af K. Vi kan derfor indtegne en "saddelpunktssti" i diagrammet, som for enhver startværdi af K, dvs for enhver værdi af K_0, angiver den tilhørende optimale startværdi af C, dvs den værdi af C som er konsistent med agentens nyttefunktion, hans budgetbegrænsing samt de øvrige bibetingelser.Og alle de efterfølgende værdier af K og C findes da på saddelpunktsstien på vej mod steady state. På sigt vil økonomien derfor altid ende op i Steady State.[15]



[14] Teknisk set bliver C aldrig negativ, idet $\dot{C} = C\frac{\gamma K^{\gamma-1}-\delta-\beta}{1-\alpha}$. Så når først C når nul, så forbliver den der. Men som omtalt i begyndelsen kan det aldrig være optimalt at have forbrug lig med nul til noget tidspunkt, og derfor kan vi udelukke forløb, der konvergerer mod en situation med $C = 0$. Formelt udelukkes sådannne forløb af vores transversalitetsbetingelse, idet $C = 0$ implicerer at λ bliver uendelig, jf (75).

[15] Et mere formelt bevis for eksistensen af en saddelpunktssti findes i C. Azariadiz (1993): "Intertemporal Macroreconomics", Blackwell. Her analyseres modellens dynamiske egenskaber ved at linearisere de to differentiallligninger omkring steady state værdien og derefter undersøge dette lineære systems karakteristiske ligning.

4.6 Opgaver: Dynamiske modeller

1. Undersøg egenskaberne af nyttefunktionen:

$$u(C_t) = \frac{1}{\alpha} C_t^{\alpha} \tag{87}$$

   Dvs find første- og andenordensafledte og grænsen af den førsteordensafledte for C gående mod nul og uendelig. Kan du give det en økonomisk fortolkning?

2. Bestem steady state værdierne af K og C i ovenstående model (ligning (81) og (82)). Hvad afhænger de af? Kan du give dem en økonomisk fortolkning?

3. Løs modellen i diskret tid. Dvs løs (50) og (51) ved opstilling af Lagrangefunktion for to 1. ordens differensligninger i C og K, opstil et fasediagram og analyser dynamikken.

4. I GE-modellen med offentlig sektor fandt vi ligevægtsreallønnen samt ligevægtsmængden af arbejdskraft. Find ligevægtsmængderne af fritid, privat forbrug og offentligt forbrug. Indsæt derefter ligevægtsudtrykkene for arbejdskraft samt privat og offentligt forbrug i husholdningens nyttefunktion, så du får husholdningens nytte udtrykt som en funktion af skattesatsen, t. Hvordan afhænger nytten af t? Kan du forklare dette økonomisk?

5. Antag at der indføres en offentlig sektor i den dynamiske model ovenfor. Den offentlige sektor beskatter produktionen med skattesatsen τ og transfererer den herved opnåede indkomst tilbage til agenten. Det betyder at agentens bibetingelse ændres til:

$$\overset{\bullet}{K}(t) = (1-\tau)K(t)^{\gamma} - \delta K(t) - C(t) + T \tag{88}$$

   hvor $T = \tau K(t)^{\gamma}$ er overførslen fra det offentlige til agenten. Umiddelbart kan det virke som om, at dette ikke ændrer modellen, idet hele skatten transfereres tilbage til agenten. Men førsteordensbetingelser ændres faktisk, eftersom agenten opfatter T som eksogen, når han løser sit optimeringsproblem. Det skyldes som tidligere antagelsen om, at agenten er repræsentativ for en stor gruppe af agenter, hvor den enkelte agent kun kan påvirke de offentlige indtægter og dermed de offentlige transfereringer minimalt.

   Løs modellen med den nye bibetingelse i (88) (husk at når førsteordensbetingelserne er fundet, så kan udtrykket for T indsættes). Hvordan afhænger steady state værdierne og dynamikken af t? Kan du give det en økonomisk fortolkning?

4.7 Svar: Dynamiske modeller

1. De afledte af nyttefunktionen er:

$$u'(C_t) = C_t^{\alpha-1} \geq 0 \qquad for \quad C_t \geq 0 \tag{89}$$
$$u''(C_t) = (\alpha-1)C_t^{\alpha-2} < 0 \qquad for \quad C_t \geq 0 \tag{90}$$

Dvs nyttefunktionen er konkav i C_t. Det bemærkes, at $u'(C_t)$ går mod uendelig, når C_t går mod nul, og at $u'(C_t)$ er faldende i C_t og går mod nul, når C_t går mod uendelig. Den økonomiske fortolkning er, at marginalnytten af forbrug er stor (uendelig) når forbruget er lille og aftager efterhånden som forbruget stiger. Fattige mennesker har større nytte af en ekstra krone end velhavende mennesker har.

2. Steady state værdien af K er lig K^*, som fra (83) er givet ved:

$$K^{SS} = K^* = \left(\frac{\delta+\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{91}$$

Og steady state værdien af C findes da ved indsættelse af denne værdi for K i (84):

$$C^{SS} = (K^{SS})^{\gamma} - \delta K^{SS} = \left(\frac{\delta+\beta}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - \delta\left(\frac{\delta+\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{92}$$

Det ses, at K^{SS} afhænger negativt af δ, som udtrykker afskrivningsraten. Jo mindre der afskrives des mere attraktivt er det at investere (spare op), og des større steady state værdi af kapital ender man med.. K^{ss} er endvidere aftagende i β, idet en høj værdi af β betyder, at agenten vægter fremtidigt forbrug mindre. Han vil derfor vælge at forbruge mere nu og investere mindre, hvilket giver en lavere steady state værdi af kapital. K^{SS} afhænger ikke entydigt af γ.

K^{SS} bidrager både positivt og negativt til C^{SS}. Det skyldes, at et stort steady state kapitalapparat giver en stor steady state produktion, men samtidig kræver det store kapitalapparat store geninvesteringer, idet afskrivningerne er tilsvarende store. Og geninvesteringerne mindsker den mængde, der er til rådighed til forbrug i steady state.

På trods af sin enkle struktur fanger modellen alligevel flere af de aspekter, der gør sig gældende i forbindelse med opsparingsbeslutninger: Afkast og vægtning af nutidigt i forhold til fremtidigt forbrug. Denne vægtning kan også fortolkes som en usikkerhed på længden af ens liv og dermed forbrugsbehovet i fremtiden.

3. Maksimeringsproblemet er:

$$\begin{aligned}
&\underset{C_0,C_1,\ldots}{Max} && \sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+1}\cdot\frac{1}{\alpha}C_t^{\alpha} && (93)\\
&ubb && C_t+K_{t+1}=K_t^{\gamma}+(1-\delta)K_t \quad ; \quad t=0,1,2,... && (94)\\
& && C_t\geq 0 \quad ; \quad t=0,1,2,.. && (95)\\
& && K_t\geq 0 \quad ; \quad t=1,2,.. && (96)\\
& && K_t=K_0 \quad ; \quad t=0 && (97)
\end{aligned}$$

Hvis vi midlertidigt ser bort fra de tre nederste bibetingelser, kan vi opstille en Lagrange-funktion:

$$L=\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+1}\cdot\frac{1}{\alpha}C_t^{\alpha}-\sum_{t=0}^{\infty}\lambda_t\left[C_t+K_{t+1}-K_t^{\gamma}-(1-\delta)K_t\right] \tag{98}$$

med følgende førsteordensbetingelser for periode t:

$$\frac{\partial L}{\partial C_t}=\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+1}C_t^{\alpha-1}-\lambda_t=0 \tag{99}$$

$$\frac{\partial L}{\partial K_{t+1}}=-\lambda_t-\lambda_{t+1}\left[-\gamma K_{t+1}^{\gamma-1}-1+\delta\right]=0 \tag{100}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t}=C_t+K_{t+1}-K_t^{\gamma}-(1-\delta)K_t=0 \tag{101}$$

samt en transversalitetsbetingelse. Fra (101) får vi den første af to differensligninger:

$$K_{t+1}=K_t^{\gamma}+(1-\delta)K_t-C_t \tag{102}$$

Og fra (99) får vi:

$$\lambda_t=\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+1}C_t^{\alpha-1} \tag{103}$$

og et tilsvarende udtryk må da gælde for λ_{t+1}:

$$\lambda_{t+1} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+2} C_{t+1}^{\alpha-1} \tag{104}$$

Indsættes (103) og (104) i (100) får vi:

$$\begin{aligned} \gamma K_{t+1}^{\gamma-1} + 1 - \delta &= \frac{\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+1} C_t^{\alpha-1}}{\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{t+2} C_{t+1}^{\alpha-1}} \qquad \Leftrightarrow \\ \left(\frac{C_t}{C_{t+1}}\right)^{\alpha-1} &= \frac{\gamma K_{t+1}^{\gamma-1} + 1 - \delta}{1+\beta} \end{aligned} \tag{105}$$

som er den anden differensligning.

Dynamikken analyseres: Sættes $C_{t+1} = C_t = C$ i (105) får vi:

$$K = \left(\frac{\beta+\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{106}$$

Og sættes $K_{t+1} = K_t = K$ i (102) får vi:

$$C = K^\gamma - \delta K \tag{107}$$

Ved hjælp af (106) og (107) kan vi igen opstille et fasediagram, som er stort set magen til det fra den kontinuerte model.

4. Vi havde:

$$\frac{W}{P} = \left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta(1-t)\overline{R}} + \frac{1}{\alpha\overline{R}}\right]^{1-\beta} \tag{108}$$

$$L^{ligevægt} = \left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta(1-t)\overline{R}} + \frac{1}{\alpha\overline{R}}\right]^{-1} \tag{109}$$

Hvilket giver os:

$$\begin{aligned} R^{Ligevægt} &= \overline{R} - \left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta(1-t)\overline{R}} + \frac{1}{\alpha\overline{R}}\right]^{-1} \\ &= \overline{R} - \frac{\alpha\beta(1-t)\overline{R}}{(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)} \\ &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta)\overline{R} + \beta(1-t)\overline{R} - \alpha\beta(1-t)\overline{R}}{(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)} \\ &= \frac{(1-\alpha)\overline{R} + \beta(-t)\overline{R} + \alpha\beta(t)\overline{R}}{(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)} \\ &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta t)\overline{R}}{(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)} \end{aligned}$$

Yderligere får vi for det offentlige og det private forbrug:

$$G^{Ligevægt} = t\left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta(1-t)\overline{R}} + \frac{1}{\alpha\overline{R}}\right]^{-\beta} \tag{110}$$

$$C^{Ligevægt} = \frac{1-t\beta}{\beta}\left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)}{\alpha\beta(1-t)\overline{R}}\right]^{-\beta} \tag{111}$$

Indsættes (109), (110) og (111) i husholdningens nyttefunktion, får vi:

$$\begin{aligned} U &= C^{\alpha}R^{1-\alpha}G^{\gamma} \\ &= \left(\frac{1-t\beta}{\beta}\right)^{\alpha}\left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)}{\alpha\beta(1-t)\overline{R}}\right]^{-\alpha\beta} \cdot \\ &\quad \left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta t)\overline{R}}{(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)}\right]^{1-\alpha} \cdot \\ &\quad t^{\gamma}\left[\frac{(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)}{\alpha\beta(1-t)\overline{R}}\right]^{-\gamma\beta} \\ &= t^{\gamma}\,(1-t\beta)\,[(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)]^{-\beta(\alpha+\gamma)+\alpha-1}\,(1-t)^{\beta(\alpha+\gamma)} \cdot \\ &\quad \left[(\alpha\beta)^{\beta(\alpha+\gamma)}\beta^{-\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\overline{R}^{\beta(\alpha+\gamma)+1-\alpha}\right] \end{aligned} \tag{112}$$

Det er tydeligt at t ikke påvirker U entydigt. Højere t betyder lavere nettoindkomst og dermed mindre forbrug og lavere nytte. Men til gengæld giver skatten anledning til et offentligt forbrug, som påvirker husholdningens nytte positivt. For givne parameterværdier af α, β, γ og $\overline{R}$ kunne man løse numerisk for den værdi af t, som maksimerer husholdningens nytte i (112).

I tilfældet, hvor $\gamma = 0$ reducerer udtrykket i (112) til:

$$\begin{aligned} U &= (1-t\beta)\,[(1-\alpha)(1-\beta)+\beta(1-t)]^{-1-\beta\alpha+\alpha}\,(1-t)^{\beta\alpha} \cdot \\ &\quad \left[(\alpha\beta)^{\beta\alpha}\beta^{-\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\overline{R}^{\beta\alpha+1-\alpha}\right] \end{aligned} \tag{113}$$

Og U er nu entydigt faldende i t. Det skyldes, at husholdningen nu ikke længere har nytte af offentligt forbrug. Skatten er nu udelukkende til gene for husholdningen, den er forvridende.

5. Hamilton-funktionen:

$$H(\lambda, t, K, C) = e^{-\beta t}\frac{1}{\alpha}C^{\alpha} + \lambda\left[(1-\tau)K^{\gamma} - \delta K - C + T\right]$$

med førsteordensbetingelser:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = e^{-\beta t}C^{\alpha-1} - \lambda = 0 \tag{114}$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = \lambda\left[(1-\tau)\gamma K^{\gamma-1} - \delta\right] = -\dot{\lambda} \tag{115}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = (1-\tau)K^{\gamma} - \delta K - C + T = \dot{K} \tag{116}$$

plus en transversalitetsbetingelse. Differentieres (114) får vi:

$$-\beta e^{-\beta t}C^{\alpha-1} + (\alpha-1)e^{-\beta t}C^{\alpha-2}\dot{C} = \dot{\lambda} \tag{117}$$

som sammen med (114) indsættes i (115), hvilket giver os:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{(1-\tau)\gamma K^{\gamma-1} - \delta - \beta}{1-\alpha} \tag{118}$$

som den første differentialligning. Fra (116) får vi den anden differentialligning (med udtrykket for T indsat):

$$\dot{K} = (1-\tau)K^{\gamma} - \delta K - C + \tau K^{\gamma} = K^{\gamma} - \delta K - C \tag{119}$$

Igen analyseres dynamikken: Sættes $\dot{C} = 0$ i (118) får vi:

$$K = \left(\frac{\delta+\beta}{\gamma(1-\tau)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{120}$$

Og sættes $\dot{K} = 0$ i (119):

$$C = K^{\gamma} - \delta K \tag{121}$$

Den eneste ændring i forhold til modellen uden offentlig sektor er, at værdien af K i udtrykket for $\dot{C} = 0$ linien, (120), er faldet. Intuition og dynamik er derfor den samme som tidligere, men steady state mængden af kapital og dermed steady state mængden af forbrug er lavere. Det skyldes, at agenten opfatter det som om, at den marginale indtægt fra kapitalapparatet er blevet mindre, idet en del af den afleveres i skat. Og samtidig opfatter han ikke sin skattebetaling som havende indflydelse på overførslen T, idet han (reelt set) kun er en agent blandt mange, og fordi overførslens størrelse afhænger af den samlede skattebetaling. Det gør det mindre attraktivt at investere, hvilket betyder, at agenten vil vælge at forbruge relativt mere nu og dermed investere mindre, hvilket igen giver et mindre kapitalapparat på sigt (i steady state).