

Eksempel 131:

Er det sandt? Er det altid sandt? Kan det bevises?

– en række eksempler på matematisk ræsonnement og bevis.

Formål: At styrke elevernes forståelse af det matematiske ræsonnement ved at de selv arbejder med en række interessante problemstillinger.

Forløb: Der udvælges nogle af nedenstående emner – evt. vælger eleverne efter en kort præsentation at arbejde med forskellige emner.

Produkt: Der skrives små rapporter om de beviser, de har arbejdet med. Undervejs eller ved afslutningen blandes eleverne, så de præsenterer stoffet for hinanden.

Tidsforbrug: Fra få timer til et længere forløb, afhængig af hvor mange emner, man tager op. Holdet kan også vælge af og til at vende tilbage til nogle af denne type emner.

Emner:

A. Polyedre.

1. Historien om de regulære polyedre fortælles. Pythagoras kendte de fire, Hippasus fandt det femte, dodekaedret i 400-tallet. Euklid beviste, der kun var fem. Naturfilosofferne knyttede dem til de fire elementer – og dodekaedret knyttedes så til »æteren« De opskrev »kemiske reaktioner«, hvor polyedrenes antal af overflader indgik som i et reaktionsskema.

2. Hvorfor er der kun fem? Først diskuteres gradtallet for en vinkel i en p -kantet polygon, både med taleksempler og med opstilling af formlen: $v = \frac{(p-2) \cdot 180^\circ}{p}$. Dernæst diskuteres det

mulige gradtal i et hjørne af polyederet, hvor q polygoner mødes, og det indsås, at vinkelsummen her må være $q \cdot v$, samt at der så må gælde: $q \cdot v < 360^\circ$. Ud fra dette udledes:

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$. Både p og q må være mindst 3. Prøv nu mulighederne.

3. Vi tæller antal hjørner h , antal flader f og antal kanter k og opstiler et skema:

type	h	f	k	(udregn)

Måske er der elever, der kan se et mønster?

4. Euler har lagt navn til polyedersætningen; men allerede Descartes kendte den. Eleverne kan arbejde med forskellige typer beviser og dernæst præsentere det for hinanden, f.eks.:
 - Vandstandsbeviset, se f.eks. Vagn Lundsgård: den geometriske dimension s. 31-35.
 - Nettet på en kugleflade – se f.eks. Kristensen og Rindung, 1964, kap VI
 - Lakatos bevis fra Proofs and Refutations
 - Lærerinspiration kan yderligere hentes i Polya: Mathematics and Plausible Reasoning, kap 3.
5. Betragt polyedre med huller. Diskutér hvorfor beviser fra før ikke holder.
6. Præsenter Keplers opfattelse af de regulære polyedres rolle i solsystemets opbygning. Evt. kan dette læses i en oversættelse af Keplers egen præsentation. En lille projektopgave kunne være at finde forholdet mellem radius i en kugle uden om og en kugle indeni en terning (kubus)

B. Tal og printal

1. Sum af to lige tal eller to ulige tal er lige. Produktet af ... Gælder dette altid? Hvorfor? Kan det bevises?
2. Præsenter 3-reglen, 98-reglen og evt. 11-reglen for division. Gælder de altid? Hvorfor? Kan det bevises?
3. Tag et trecifret tal, hvor første og sidste ciffer er forskellige, f.eks. 361. Skriv det i modsat rækkefølge, dvs. 163 og udregn differensen mellem det største og det mindste af tallene. Her er det 198. Skriv dette i modsat rækkefølge, dvs. 891 og udregn summen. Det giver 1089. Prøv et andet eksempel. Hvad er på spil her? Kan vi matematisk redegøre for dette?
4. Hvis et tal ender på 2, går 2 op. Hvis et tal ender på 5, går 5 op. Hvis et tal ender på N går N op – eller ... Hvornår gælder dette? Hvordan argumenteres? Lad N være flercifret. Kald N magisk, hvis det har den egenskab, at det går op i et tal, hvis sidste ciffer er N . F.eks. går 25 op i 725 osv. 25 er magisk. Hvilke tal er magiske? Dette forløb kan udvides til en egentlig karakteristik af disse tal ved f.eks. at følge den linje, Davis og Hersch lægger i *Mathematical Experience*, s. 223-28.
5. Alle bøger er udstyrede med 10-cifrede ISBN-numre, f.eks. er Penguin-udgaven af ovennævnte bog udstyret med nummeret: 0-14-013474-3. Der er 4 »kategorier«: første kategori (0) koder for landet, anden kategori (14) for forlaget, tredje kategori er forlagets kode for bogen, og sidste kategori med cifret 3 er et kontrolciffer. Det er nemlig indrettet således, at 11 altid går op i det tal, man udregner ved at gange ISBN-nummerets cifre med henholdsvis 1, 2, 3, 4 osv. og så lægge tallene sammen. Dvs 11 går op i:
 $1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3$. Det sidste ciffer sørger altid for det. Find nogle andre bøger og check påstanden. (Hvids det sidste ciffer hedder X , betyder dette tallet 10).
6. Ved hjælp af ISBN-koden kan man altid finde en given bog i store databaser. Men hvorfor laver man koden således? Det gør man af følgende grund: Hvis man taster et ciffer galt ind, kan det faktisk opdages. Hvis det rigtige ciffer er $abcde\dots$, og man f.eks. i stedet for b har indtastet $b + x$, så vil maskinen både fortælle, at der er noget galt, og samtidig automatisk rette indtastningen til det rigtige. Hvordan kan den det? Det hænger på tallet 11. Byttes om på to cifre, vil maskinen også kunne afsløre dette. ISBN-koden er et eksempel på en et-fejlsrettende kode og kan antyde, hvorledes datamængder på en cd-plade bliver oversat korrekt, trods mange fejl på skiven.
7. Præsenter Goldbachs formodning og tilrettelæg et forløb efter linjen i Polyas: *Mathematics and Plausible Reasoning*, kapitel 1.

C. Tårnet i Hanoi

Eleven prøver selv at argumentere for hvor mange træk, der kræves for at flytte tårnet i Hanoi. Der kan hentes inspiration i Martin Gardners: *Morsom matematik*, s. 65-69.

D. Sandsynlighedsteoretiske paradokser

1. Der præsenteres paradokser med betingede sandsynligheder som historien om de to geder og den nye bil bag de tre døre. Eller sandsynligheden for at en modspiller i et kortspil har to es-er: Hvis han meddeler, han har spar es, er sandsynligheden for, at han har endnu et es så større, mindre eller den samme, som den var, hvis vi ikke fik den oplysning?
2. Der præsenteres paradokser, der blot fortæller uventede ting, som f.eks. fødselsdagsparadokser. Eleverne undersøger evt. i et antal klasser, om det virkelig gælder på deres skole.
3. Der præsenteres paradokser, der i en eller anden forstand er uløselige, som f.eks. Skt. Petersborg-paradokset. Dette findes beskrevet i enhver bog om sandsynlighedsregning.