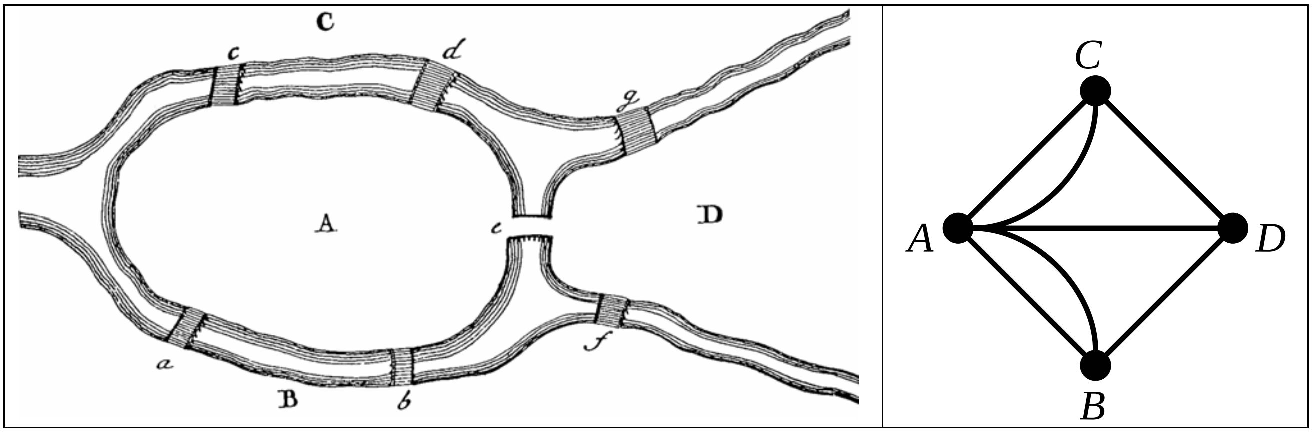
Eksempel 163:

Eksempel på matematisk tekst: Broerne i Königsberg

Königsberg var en by i Østpreussen. I dag hedder den Kaliningrad og er en del af Rusland. I 1700-tallet opstod problemet om, hvorvidt man kan foretage en vandring i byen, således at hver bro krydses netop en gang, og således at vandringen slutter, hvor den begyndte.
Broerne er vist i nedenstående tegning til venstre. Til højre vises en skematisk figur af broerne, en såkaldt graf.



Grafen består af fire punkter, der repræsenterer de fire landområder til venstre, samt syv kurver (der kaldes kanter), der repræsenterer de syv broer, der skal krydses netop en gang. Hvis man eksperimenterer lidt, finder man hurtigt ud af, at man ikke kan foretage den ønskede vandring. Men hvordan kan man bevise det? Det elegante svar blev givet af den berømte matematiker og fysiker Leonhard Euler (1707-1783). Lad os fokusere på et område i bykortet eller (hvilket er det samme) et punkt f.eks. D i grafen. Lad os nu antage, at vi kan foretage den ønskede vandring. Hver gang vi gennemløber en kant, sætter vi en pil på kanten, der viser, hvilken retning vi går. Umiddelbart efter at vi går ind til punktet D, går vi ud fra punktet D. Heraf følger let, at antallet af indgående pile til D må være det samme som antallet af udgående pile fra D, dvs. at det samlede antal kanter, der støder ind til D, er lige. Men i grafen, der illustrerer de Königsbergske broer, har nogle (ja faktisk alle) punkter et ulige antal tilstødende kanter, eller som man også udtrykker det: de har ulige valens. Man kan altså ikke foretage den ønskede vandring.
Problemet kan generaliseres: Man kan spørge, om kanterne i en hvilken som helst sammenhængende graf kan gennemløbes, således at hver kant gennemløbes netop en gang, og således at man slutter i samme punkt, som man startede. Vi har set, at en nødvendig betingelse for, at dette kan lade sig gøre, er, at alle punkter har lige valens. Den betingelse er faktisk også tilstrækkelig. Dette resultat opfattes som starten på den matematiske disciplin, der kaldes grafteori, og det indgår som en ingrediens i mange resultater. Et eksempel er det kinesiske postbuds problem. Et postbud starter på posthuset i en given by og skal omdele post i alle gader. Ruten skal tilrettelægges, så den samlede vandring bliver kortest mulig. Dette problem kan løses i praksis selv for meget store byer, og i løsningen indgår løsningen til de Königsbergske broers problem.
Den handelsrejsendes problem består i at gennemløbe en given graf, så alle punkter besøges mindst en gang. Problemet minder om det kinesiske postbuds problem og dermed også om de Königsbergske broers problem, idet man her blot skal gennemløbe alle punkter i stedet for alle kanter. Da der i almindelighed er færre punkter end kanter, kunne man tro, at den handelsrejsendes problem typisk er lettere end de Königsbergske broers problem. Det forholder sig ganske modsat.
Prøv f.eks. at gennemløbe et skakbræt med en springer så hvert felt gennemløbes mindst en gang og springeren flytter så få gange som muligt og vender tilbage til udgangspunktet. Det mindste antal træk er 64; men de fleste vil bruge lang tid på at finde løsningen.

Det er et vigtigt uløst problem at forstå og udarbejde effektive metoder til at løse den handelsrejsendes problem, mens det kinesiske postbuds problem er fuldstændigt afklaret. Dette illustrerer det fascinerende fænomen, at løste og uløste matematiske problemer kan ligge meget op ad hinanden formuleringsmæssigt. Disse og andre grafteoretiske problemer er beskrevet i nedennævnte artikel.

Artiklen er skrevet af Professor Carsten Thomassen, Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet. Citeret fra:
http://www.mip.sdu.dk/mat2000/PostkortMatematik/broer.html

Yderligere læsning:

C.Thomassen, *Broer, skak og netværk*, Naturens Verden 10 (1992)388-393.