Rapportopgaver

Forord

I forbindelse med indførelsen af prøveform c) til mundtlig eksamen i matematik kom der i læreplanerne krav om, at ”*en betydelig del af eksamensspørgsmålene skal være udformet således, at det er muligt at inddrage gennemførte emne- og projektforløb med tilhørende elevrapporter*”.

Nedenfor følger til inspiration 16 eksempler på rapportopgaver/temaopgaver. Opgaveeksemplerne er autentiske i den forstand, at de er benyttet i matematikundervisningen i gymnasiet eller hf – evt. i en lidt ændret udgave. Den eneste undtagelse er opgaven *Skatteberegning*, der er hentet fra undervisningsvejledningen i hf C, hvor den står som paradigmatisk eksempel 202. Men bortset fra dette eksempel er der ikke tale om nogen officiel blåstempling af opgaveeksemplerne.

For hver af de 16 tema- og rapportopgaver følger først selve opgaveformuleringen, dernæst forskellige kommentarer og til sidst et eksempel på et eksamensspørgsmål, hvor den pågældende rapport inddrages. I nogle tilfælde spiller rapporten kun en mindre rolle i eksamensspørgsmålet, i andre udgør den stort set hele eksaminationsgrundlaget.

Der er talrige muligheder for emne- og projektforløb, der munder ud i udarbejdelsen af en rapport, og de her gengivne eksempler er på ingen måde udtømmende. Vi har blot ønsket at vise nogle eksempler inden for forskellige emner og niveauer og med forskellige krav til arbejdsform og omfang.

Allerede fra reformen i 2005 har der på hf været krav om, at matematikrapporter skal indgå i undervisningen. Yderligere inspiration til dette arbejde kan derfor findes i afsnittene om matematikrapporter i undervisningsvejledningerne til hf (hf C: afsnit 3.f, hf B: afsnit 3.g).

Tak til de kolleger, der har stillet deres opgaveformuleringer til rådighed for arbejdet med denne lille samling.

3. april 2009, Ulla Stampe Jakobsen og Erik von Essen

Indhold

Kort introduktion med niveau

Geometri
(Retvinklet trekant, både teori og anvendelser, C-niveau)

Trigonometri
(Triangulering, historisk perspektiv, 1.g)

Vækstmodeller
(Lineær og eksponentiel vækst, overblik og modellering, 1.g, alle niveauer)

Potens- og eksponentialfunktioner
(Geometrisk opfattelse af funktioner, eksperimentel tilgang, A- og B-niveau)

Andengradspolynomiet: toppunktsformlen
(Tre beviser for toppunktsformlen, ræsonnement og formidling, A- og B-niveau)

Statistik
(Deskriptiv statistik med indsamlede data, regneark, 1.g, alle niveauer)

Binomialfordeling og binomialtest
(Teori og eksperiment, A- og B-niveau)

Differentialregning
(Definition af differentialkvotient, begrebsforståelse og ræsonnement, A- og B-niveau)

Anvendelse af differential- og integralregning
(Fortolkning og optimering, anvendelser, B-niveau)

Vandure
(Differentialligninger, modellering og beregninger, A-niveau)

Kolesterolniveauet i mennesker
(Anvendelse af differentialligninger, A-niveau)

Rumgeometri – skalarproduktet
(Teori: fra 2 til 3 dimensioner, A-niveau)

Opsparing og lån
(Hverdagsøkonomi, supplerende stof på hf C)

Skatteberegning
(Hverdagsøkonomi, supplerende stof på hf C, fra hf-vejledningen)

Det skrå kast – om at skyde til måls
(Anvendelse af differentialregning, samarbejde med fysik, A- og B-niveau)

Logaritmer og pH
(Logaritmer: teori og anvendelser, samarbejde med kemi, A-niveau)

Geometri

1. Eksempler på beregninger i retvinklede trekanter

a) Giv et eksempel på en beregning vha. Pythagoras sætning.
b) Giv et eksempel på beregning vha. sinus.
c) Giv et eksempel på beregning vha. cosinus.
d) Giv et eksempel på beregning vha. tangens.

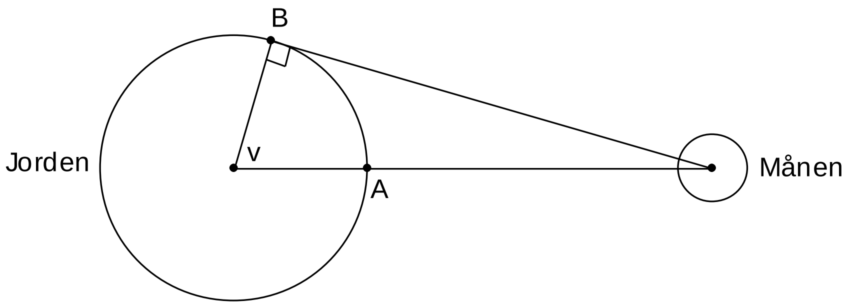
Mindst ét af eksemplerne skal være beregning af en vinkel.

2. Anvendelser i astronomi

Afstanden til Månen

Figuren nedenfor viser Jorden og Månen. To observatører A og B på Jorden er placeret, så Månen står lodret over A, når B netop kan se Månen i horisonten. Vinkel v kan måles til 89,05°. Jordens radius er 6378 km.

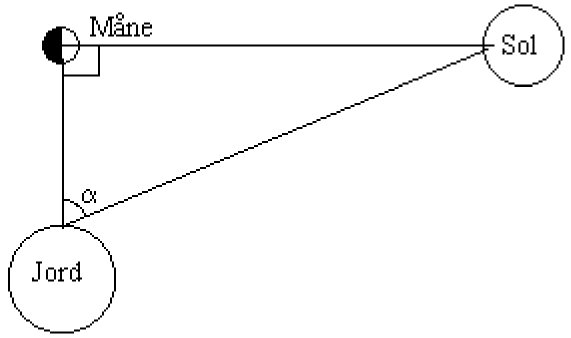
a) Beregn afstanden mellem Jorden og Månen (dvs. afstanden fra centrum til centrum).



Afstanden til Solen

Figur 2 viser en måling af vinklen mellem retningen til Månen og retningen til Solen, når der er halvmåne. Vinklen er målt til 89,85°.

b) Beregn afstanden mellem Jorden og Solen. (Benyt bl.a. resultatet fra a).)



Solens diameter

c) Benyt ensvinklede trekanter til at forklare den bestemmelse af Solens diameter, som I har udført i fysik.

3. Vinkelsummen i en polygon

a) Bevis, at vinkelsummen i enhver firkant er 360°. (Opdel firkanten i to trekanter).
b) Bevis, at vinkelsummen i enhver femkant er 540º. (Opdel igen i trekanter ud fra en vinkelspids).
c) Hvor stor er vinkelsummen i en sekskant?
d) Hvor stor er vinkelsummen i en 117-kant?
e) Hvor stor er vinkelsummen i en n-kant?

4. Endnu et bevis

Forklar et af jeres bogs beviser på side ….. (efter eget valg).

Rapportopgaven er benyttet i grundforløbet i en 1.g på C-niveau. Den træner eleverne i at håndtere simple geometriske problemstillinger, både rent teoretiske problemer og i anvendelsessammenhæng.

Eleverne har indledningsvis arbejdet i smågrupper i undervisningstiden. Resten af arbejdet har været hjemmearbejde, og de har afleveret individuelle besvarelser.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Geometri
Gør rede for sinus, cosinus og tangens i retvinklede trekanter.
Giv et eksempel på en konkret anvendelse heraf, gerne fra din rapport om geometri.

Trigonometri

Emneforløb: Geometri som model for virkeligheden

Opgaven går ud på følgende:
Spørgsmål af typen ”Hvor højt er bjerget?”, ”Hvor langt væk er skibet?” har vi allerede arbejdet med i afsnittet ”Hvor højt, hvor langt væk, hvor stort?” i B1 grundbogen s. 34-39 samt øvelser.
Det spørgsmål som I nu skal arbejde med er spørgsmålet af typen ”Hvor stor er afstanden mellem 2 byer?”. I skal i forbindelse med dette spørgsmål fordybe jer i modelproblematikken og sætte problemet i et historisk perspektiv.

I skal arbejde i grupper (3-4 i hver gruppe) og hver gruppe skal besvare nedenstående problemformulering som skal afleveres **d. 7 november**

Som hjælp til besvarelse af problemformuleringen SKAL hver grupper også lave opgaverne 1 og 2
(Det der skal afleveres er en besvarelse af problemformuleringen hvor besvarelsen af opgaverne 1 og 2 er integreret. Jeg ønsker en sammenhængende besvarelse og ikke en besvarelse hvor I har svaret isoleret på hver enkelt opgave)

Problemformulering:
Hvornår og hvordan opmålte man Danmark? Hvilke metoder blev anvendt? Hvilke problemer var der ved metoderne? Hvilke problemer var der ved at udføre de nødvendige målinger? Hvorfor var det nødvendigt at opmåle Danmark, og hvilken betydning fik opmålingerne?

Opgave 1.
Spørgsmål hørende til artiklen af Tinne Hoff Kjeldsen ”landmåling og korttegning”
i B1 grundbogen s. 40-46.

1) Hvem gav anledning til at opmåling af Danmark blev påbegyndt? Hvem var Thomas Bugge og hvem var Casper Wessel? Hvad var deres matematiske indsats?
2) En landmåler er citeret for at klage over en række problemer ved at udføre opmålingen. Hvilke problemer nævner han? Hvad er hans navn?
3) Hvad er triangulering?
4) Hvad er et korts målestoksforhold?
5) Hvad er en basislinje? Hvor lå den basislinje man benyttede ved den første kortlæggelse af Danmark vha. triangulering og hvor lang var denne basislinje?
6) Hvordan målte man vinklerne ved den trigonometriske opmåling af Danmark?

Opgave 2.
Beskriv hvordan du vil opstille en model for, hvordan man rent praktisk gør, når man benytter triangulering til at kortlægge f.eks. Sømosen i Herlev. Se vedhæftet luftfoto af Sømosen. Hvad skal måles og hvad skal beregnes? Hvilke usikkerheder er der? Find omkredsen af Sømosen på jeres kort.
I skal ud fra luftfotoet og vha. triangulering lave et kort over søen (I må gerne se bort fra de mange øer der er i søen).
I skal lave kortet i målestoksforhold 2:1 (Luftfotoet er taget fra www.krak.dk).

Temaopgaven er lavet af 1.g elever, der har valgt B-niveau.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Trigonometri
Bevis sinusrelationerne og gør rede for anvendelsen af disse i triangulering.
Inddrag din rapport om *Geometri som model af virkeligheden*.

Vækstmodeller

1. Lineær vækst

1.a Teori

Skriv en kort teoretisk redegørelse, der giver svar på nedenstående spørgsmål:

- Hvad er en lineær funktion?
- Hvad fortæller tallene a og b om funktionen $f(x) = ax + b$?
- For hvilke a er funktionen henholdsvis voksende/aftagende/konstant?
- Hvordan bestemmes a og b ud fra to punkter på grafen?

1.b Modelopstilling ud fra talmateriale: Indiens befolkning

Datamateriale nr. 1 på bilaget skal behandles. Følgende punkter skal indgå i behandlingen:

- Graftegning
- Begrundelse for at udviklingen kan karakteriseres som (tilnærmelsesvis) lineær
- Bestemmelse af a og b
- En prognose (forudsigelse) ved hjælp af modellen
- I 2003 var Indiens befolkningstal 1049,7 mio. Sammenlign med modellen: er den lineære vækst fortsat?

2. Eksponentiel vækst

2.a Teori

Skriv en kort teoretisk redegørelse, der giver svar på nedenstående spørgsmål:

- Hvad er en eksponentiel udvikling?
- Hvad fortæller tallene a og b om funktionen $f(x) = b \cdot a^x$?
- For hvilke a er funktionen henholdsvis voksende/aftagende/konstant?
- Hvordan bestemmes a og b ud fra to punkter på grafen?
- Hvad er det smarte ved et enkeltlogaritmisk koordinatsystem?
- Hvad er fordoblingskonstanten/halveringskonstanten, og hvordan bestemmes den?

2.b Modelopstilling ud fra talmateriale: Kinas BNP pr. indbygger

Datamaterialet på bilaget skal behandles. Følgende punkter skal indgå i behandlingen:

- Graftegning, både i et almindeligt koordinatsystem og i et enkeltlogaritmisk
- Begrundelse for at udviklingen kan karakteriseres som (tilnærmelsesvis) eksponentiel
- Bestemmelse af et funktionsudtryk for modellen
- Bestemmelse af den årlige vækstrate
- Bestemmelse af fordoblingstiden

- En prognose vha. modellen (fx: Hvor stort er BNP pr. indbygger i Kina i 2020, hvis denne udvikling fortsætter?)

3. Modelopstilling

Vælg ét af de øvrige datamaterialer (nr. 3-6). Undersøg, om en lineær eller en eksponentiel model passer bedst. Gennemfør en behandling som i pkt. 1.b eller 2.b ovenfor.

Bilag til matematikrapport om vækstmodeller

1. Indiens befolkning

År	1965	1970	1975	1980
Befolkningstal (mio.)	495,7	555,0	620,5	687,0

Kilde: Danidas hjemmeside www.udviklingstal.dk.

x = antal år efter 1965
y = befolkningstal (mio. mennesker)

2. Kinas bruttonationalprodukt (BNP) pr. indbygger

År	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2003
BNP pr. indbygger (US $)	135	173	269	364	603	856	1067

Kilde: Danidas hjemmeside www.udviklingstal.dk.

x = antal år efter 1975
y = BNP pr. indbygger (US $)

3. Guatemalas befolkning

År	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
Mio. indbyggere	2,96	3,42	3,97	4,62	5,35	6,24	7,26	8,40

Kilde: Christiansen m.fl.: Verden i tid og tal. Gyldendal 1986.

4. Antal elever på danske efterskoler

År	1970	1980	1990	2000	2004
Antal elever	6178	10 406	16 921	21 500	24 100

Kilde: Politiken, 16. september 2004.

5. Spædbørnsdødeligheden i Danmark

Spædbørnsdødeligheden angiver, hvor mange promille der døde inden for det første leveår.

År	1933	1938	1943	1948	1953	1958	1963	1968	1973
Spædbørnsdødelighed	71,4	60,0	48,4	37,8	27,4	23,0	19,6	15,4	11,5

Kilde: Danmarks statistik.

6. Antal tankstationer i Danmark.

År	1975	1980	1985	1990	1995
Antal tankstationer	5205	4397	3622	3031	2647

Kilde: Oliebranchens Fællesrepræsentation, 1996.

Rapportopgaven er benyttet i en 1.g på B-niveau, men kan (med beskedne justeringer) også benyttes på C- og A-niveau. Den kan hjælpe eleverne til at få et bedre overblik over de to vækstmodeller og deres egenskaber, og den træner dem i modellering af givne data.

En væsentlig del af arbejdet er foregået i grupper i undervisningstiden, men eleverne skulle aflevere individuelle rapporter. Modelopstillingerne er foretaget ved hjælp af Excel, men kan naturligvis også klares på andre måder.

En anden mulighed kunne være at opdele arbejdet i to mindre rapporter, en for hver vækstmodel. Eventuelt kunne også potenssammenhæng inddrages, både teoretisk og med modelopstilling.

Inspiration til rapportopgaver eller temaopgaver inden for dette emne kan desuden bl.a. findes i hæftet *Vækst*, Matematiklærerforeningen, 2005.

To eksempler på eksamensspørgsmål:

Lineære funktioner og modeller.
Gør rede for graf og regneforskrift for en lineær funktion.
Du skal specielt komme ind på hældningskoefficienten og på, hvordan man bestemmer den.
Inddrag rapporten *Vækstmodeller*.

Vækstmodeller
Gør kort rede for den lineære vækstmodel og for den eksponentielle vækstmodel.
Gør rede for modelopstilling ud fra et talmateriale, gerne med udgangspunkt i din rapport om vækstmodeller.

Oplæg til rapport om potens- og eksponentialfunktioner

I skal arbejde sammen i grupper á 3 personer, og hver gruppe skal aflevere én rapport, som skal være skrevet i Word med passende brug af formeleditor. Rapporten skal indeholde en besvarelse af nedenstående punkter.
Næste modul skal vi arbejde med s. 89-97 i Gyldendals Grundbog B1, som er lektie til denne dag.
De næste 2 moduler bruges til, at grupperne arbejder med rapporten.

1. Giv en beskrivelse af eksperimenterne (s.194-196 i B1), I foretog med x^a og a^x, og angiv hvilke konklusioner, I nåede frem til.
   Rapporten skal indeholde de grafer fra eksperimenterne, som I arbejdede med. Graferne skal
   overføres fra Voyage 200 til Word ved hjælp af TI Connect.

2. Giv et bevis for, hvordan man ud fra to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ på grafen for eksponentialfunktionen $f(x) = b \cdot a^x$ kan bestemme a og b.

3. Giv et bevis for, hvordan man ud fra to punkter $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$ på grafen for potensfunktionen $f(x) = b \cdot x^a$ kan bestemme a og b.

4. Regn opgave 2009, 2014, 2016, 2025 fra Arbejdsbog B1.

Formålet med rapporten er at udvikle den geometriske opfattelse af ligninger og funktioner og at opøve evnen til at undersøge en given problemstilling gennem eksperimenter, generalisering og efterprøvning. Den er benyttet på B-niveau.

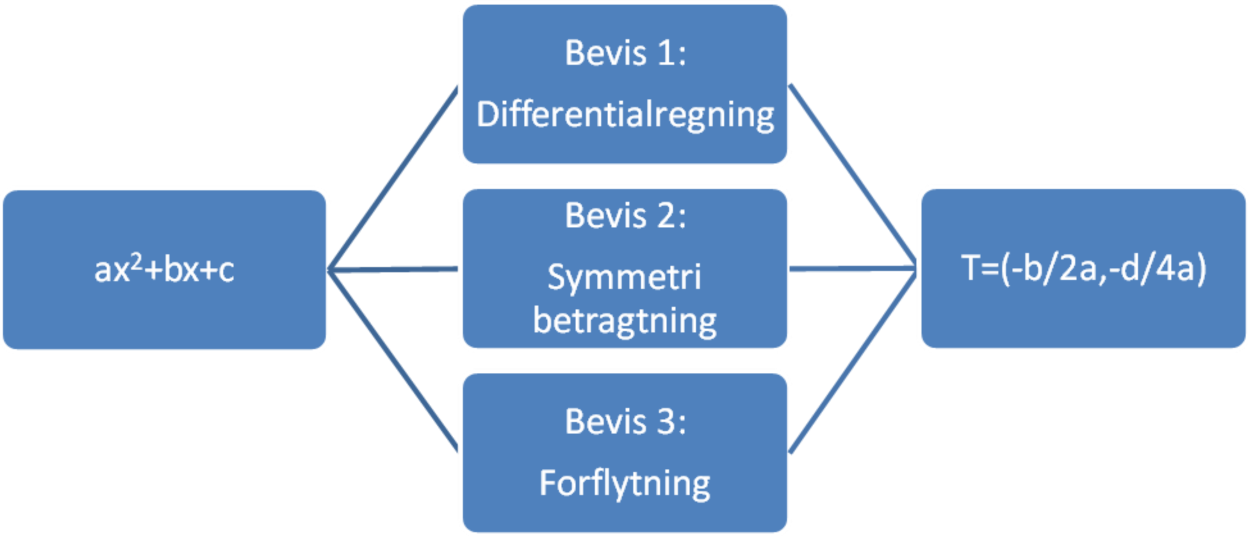
To eksempler på eksamensspørgsmål:

Eksponentialfunktioner
Gør rede for graf og regneforskrift for en eksponentialfunktion.
Du skal specielt komme ind på fremskrivningsfaktoren og på, hvordan man bestemmer den.
Inddrag temaopgaven om potens- og eksponentialfunktioner.

Potensfunktioner
Gør rede for graf og regneforskrift for en potensfunktion.
Du skal specielt komme ind på a og b og på, hvordan man bestemmer disse størrelser.
Inddrag temaopgaven om potens- og eksponentialfunktioner.

Toppunktsformlen

Toppunktsformlen kan naturligvis bevises:



Arbejdet
I skal med baggrund i arbejdet med toppunktsformlen lave et projekt.
Projektets fokus skal I selv bestemme, men den overordnede ramme er toppunktsformlen.
I skal altså selv lave problemformuleringen …
… og I skal selv besvare den i jeres rapport.

Projektet laves parvis.

Indhold:
Opstil en problemformulering med udgangspunkt i dit arbejde med toppunktsformlen
Bearbejd problemformuleringen og fremlæg dette skriftligt
Omfanget skal ca. svare til 15 minutters mundtlig præsentation.

Problemformuleringen bliver også grundlag for et eksamensspørgsmål.

Projektet er benyttet i 2.g, både på B-niveau og på A-niveau på B-niveau. Eleverne trænes i ræsonnement og formidling.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Andengradspolynomiet
Du skal redegøre for de vigtigste problemstillinger i dit projekt *Toppunktsformlen*.
I redegørelsen skal du komme ind på mindst ét bevis for toppunktsformlen.

Projekt Statistik: Databehandling

Mål:

I skal lære at indsamle og håndtere data fra virkeligheden. I skal vise, at I kan beherske en statistisk behandling af datamaterialet, herunder beherskelse af Excel. I skal til sidst vise at I kan formidle konklusioner vedrørende den statistiske undersøgelse i et klart sprog.

Krav:

- I arbejder sammen i 3-4 personers grupper.
- Alle skal være med til det hele. – Ikke noget med at uddelegere opgaverne mellem jer.
- I skal mundtligt i fællesskab fremlægge projektets indhold (brug overhead eller computer).

Tidsplan:

Tirsdag d. 17. april: Indsamling af datamateriale. Strukturering
Tirsdag d. 24. april: Databehandling i Excel.
Onsdag d. 25. april: Konklusioner og sammenligning. Øve mundtlig fremlæggelse
Fredag d. 27. april: Mundtlig fremlæggelse

Indhold:

Ud fra jeres datamateriale, skal I afgøre om jeres observationer skal behandles som grupperede observationer eller som ikke grupperede observationer. I skal derefter gennemgå en behandling af materialet, hvor I ender ud med relevante histogrammer/søjlediagrammer, sumkurver og boksplot. Ud fra disse kurver og diagrammer skal I formulere et eller flere budskaber som I ønsker at formidle.
(Husk: Når I sammenligner jeres diagrammer og kurver skal de have samme inddelinger)

Hver gruppe arbejder med hver deres emne: Telefoni, indtægter, udgifter, alkohol og transport.

Rapportopgaven er lavet af en 1.g klasse, der har valgt B-niveau, men den kan bruges i 1.g på alle niveauer. Eleverne lærer at indsamle data og behandle dem i Excel. Derudover trænes mundtlig formidling.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Statistik

Gør rede for statistikprojektet i din gruppe. Du skal bl.a. komme ind på kumuleret frekvens, kvartiler, boksplot og middelværdi.

Matematikrapport om binomialfordeling og binomialtest

Gør kort rede for binomialfordelingen – gerne ud fra et eksempel. K(n,r) regnes for kendt. Du skal komme ind på begreberne antalsparameter og sandsynlighedsparameter.

Beskriv eksperimentet nedenfor, og giv en vurdering af klassens resultat.

Kan man smage forskel på Carlsberg og Tuborg?

Ved hjælp af en såkaldt *triangel-test* vil vi forsøge at afgøre, om det er muligt at smage forskel på Carlsberg og Tuborg. Denne test er meget brugt ved levnedsmiddel-undersøgelser. Hver deltager får udleveret tre kodede prøver, hvoraf to er ens og en er forskellig fra de andre (dvs. to glas med Tuborg og ét glas med Carlsberg eller omvendt to glas med Carlsberg og ét glas med Tuborg). Efter at have smagt på prøverne skal hver person udpege den prøve, der er forskellig fra de to andre prøver.

Vi vil beskrive eksperimentet med en *binomiel* model, idet vi indfører en stokastisk variabel X :

$$X = \text{antal rigtige svar}$$

og antager, at X er binomialfordelt med antalsparameter n og sandsynlighedsparameter p.

Vi opstiller den *hypotese*, at der ingen forskel er på Carlsberg og Tuborg, dvs. at sandsynlighedsparameteren p i binomialfordelingen er $\frac{1}{3}$.

Hypotese : $p = \frac{1}{3}$.

Spørgsmålet er nu, om vi på basis af vore observationer vil tro på hypotesen eller ej dvs. om vi vil acceptere eller forkaste hypotesen.
Hvis hypotesen skulle være sand, ville vi forvente en observeret værdi af X på $n \cdot \frac{1}{3}$.
Vi vil forsøge at afgøre, om den observerede værdi af X ser sandsynlig ud i dette lys.
Dette gøres ved at finde *p-værdien* eller *testsandsynligheden,* der angiver sandsyn-ligheden for at observere noget, der er mere eller lige så "ekstremt" som det, vi rent faktisk observerede, under forudsætning af, at hypotesen er sand.

Hvis *p-værdien* er lille, tror vi ikke på hypotesen. Hypotesen forkastes.
Hvis *p-værdien* er stor, tror vi på hypotesen. Hypotesen accepteres.

Grænsen sættes typisk ved 0,05 = 5%.

Eksempel

Eksperimentet blev udført til et matematiklærermøde med 31 deltagere. Her svarede 15 af deltagerne rigtigt. Hvis hypotesen skulle være sand, ville vi have forventet omkring $31 \cdot \frac{1}{3} \approx 10$ rigtige svar.

For at afgøre, om vi kunne forkaste hypotesen (at Carlsberg og Tuborg smager ens), udregnede vi *p-værdien* $= P(X \geq 15)$, idet vi antog, at X var binomialfordelt med parametre n=31 og p= $\frac{1}{3}$.

p-*værdi* = $P(X \geq 15) =$ ______________________________

Kunne hypotesen forkastes? _________________

Hvor mange rigtige svar skulle der i dette tilfælde til for at forkaste hypotesen (begrund dit svar) ?

Ved test af hypoteser er der risiko for at begå fejl, idet man fejlagtigt kan komme til at forkaste en sand hypotese (kaldes fejl af type I) eller at acceptere en falsk hypotese (kaldes fejl af type II). Bemærk, at p-værdien netop udtrykker sandsynligheden for at begå en fejl af type I.

___

Resultat af klassens undersøgelse :

klasse :

antal deltagere :

antal rigtige svar :

p-værdi :

konklusion :

___

Temaopgaven er stillet til en 2.g klasse på A-niveau, men kan lige så godt bruges på B-niveau. Testen: ”Kan man smage forskel på Carlsberg og Tuborg?” blev foretaget i slutningen af et modul; resten var hjemmeopgave.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Statistik og sandsynlighed
Gør kort rede for binomialfordelingen.
Gør rede for undersøgelsen af, om man kan smage forskel på Carlsberg og Tuborg.

Inddrag gerne din rapport om emnet.

Rapport om differentialregning

Rapporten tæller som en aflevering.
Gør dig umage med at lave nogle gode tegninger, der viser, at du har forstået teorien.

1.
Forklar med tegninger og egne ord hvad der forstås ved *funktionstilvækst*. Du skal redegøre for alle størrelserne der indgår i udtrykket $\Delta y = f(x_0+h)-f(x_0)$.

2.
Forklar med tegninger og egne ord hvad der forstås ved en *sekant* og en *tangent* til en graf.

3.
Forklar med tegninger og egne ord hvordan man bestemmer en *sekanthældning*, og redegør for hvordan den hænger sammen med *differenskvotient*. Hvad er for øvrigt en *differens* og hvad er en *kvotient*?

4.
Forklar med tegninger og egne ord hvordan man bestemmer en *tangenthældning*, og redegør for hvordan den hænger sammen med *differentialkvotient*. Du skal redegøre for udtrykket

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to f'(x_0) \quad \text{for} \quad h \to 0$$

5.
Forklar med egne ord hvad man anvender differentialregning til og hvorfor det er vigtigt.

6.
Beregn ved hjælp af *3-trinsreglen* $f'(2)$ for funktionen med forskriften

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

Redegør for hvilke af grafregnerens værktøjer du specielt benytter til beregningerne.

7.
Beregn ved hjælp af *3-trinsreglen* $f'(x_0)$ i et vilkårligt punkt x_0 for funktionen med forskriften

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$

8.
Beregn $f'(-0.5)$ og $f'(1)$ ved hjælp af udtrykket for $f'(x)$, som du har udledt i **7**.
Tegn grafen for $f(x) = x^3 - 3x - 1$ og giv en geometrisk fortolkning af $f'(-0.5)$ og $f'(1)$.

Rapportopgaven er benyttet i 2.g på B-niveau (men kan også bruges på A-niveau) i det indledende arbejde med differentialregning. Fokus er på begrebsforståelse og ræsonnement.

Der kan både arbejdes individuelt og i grupper.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Differentialregning
Gør rede for begreberne differenskvotient og differentialkvotient.
Inddrag din rapport om differentialregning.

Anvendelse af differential- og integralregning

1. Beregning og fortolkning af differentialkvotient

Giv mindst to eksempler (fra forskellige fagområder) på, hvordan differentialkvotienten af en funktion kan fortolkes. Du kan hente inspiration på side ….. i bogen og i gamle opgaver.

Opgave 1. Bakteriekoloni
I et laboratorieforsøg undersøges udviklingen i en bakteriekoloni. Udviklingen kan beskrives ved modellen

$$f(t) = \frac{9560}{1 + 4{,}6 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}09 \cdot t}}$$

hvor $f(t)$ er antallet af bakterier, og t er antal timer efter forsøgets start.

a) Bestem $f'(t)$.
b) Bestem $f'(10)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller om bakteriekoloniens udvikling.
c) Hvornår voksede bakteriekolonien hurtigst, og hvor mange bakterier var der på dette tidspunkt?

2. Optimering

Gør kort rede for, hvordan differentialregning kan anvendes til løsning af optimerings-problemer. Du kan hente inspiration på side ….. i bogen og i gamle opgaver.

Opgave 2. Biltrafik over smal bro
I en trafikanalyse indgår følgende model for antallet $f(v)$ af biler, der pr. minut kan passere en smal bro:

$$f(v) = \frac{17 \cdot v}{0{,}008 \cdot v^2 + 0{,}2 \cdot v + 4}$$

hvor v (km/time) er den fart, bilerne kører med.

a) Bestem $f'(v)$.
b) Hvor hurtigt skal bilerne køre, for at flest biler kan passere broen pr. minut?

3. Beregning og fortolkning af integral

Giv mindst to eksempler (fra forskellige fagområder) på, hvordan arealet under en graf kan fortolkes. Du kan hente inspiration på side ….. i bogen og i de udleverede opgaver om dette emne.

Opgave 3. Oliefelt
Udvindingen af olie fra et bestemt oliefelt kan for perioden 1965 – 1990 med god tilnærmelse beskrives ved modellen

$$f(t) = -0{,}006 \cdot t^2 + 0{,}12 \cdot t + 1{,}8$$

hvor t er antal år efter 1965, og $f(t)$ er den årlige udvundne oliemængde (mio. ton pr. år).

a) Bestem $\int_0^{25} f(t)\,dt$.

b) Hvad fortæller dette tal om olieudvindingen?

Rapportopgaven er benyttet på B-niveau ved afslutningen på arbejdet med differential- og integralregning. Den giver eleverne lejlighed til at samle op på anvendelsesmulighederne for den elementære differential- og integralregning og på nogle fortolkninger af differentialkvotient og bestemt integral.

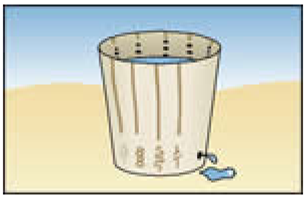
Arbejdet er påbegyndt i undervisningstiden, men størstedelen er foretaget som individuelt hjemmearbejde.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Differentialregning
Gør kort rede for begrebet differentialkvotient.
Gør rede for sammenhængen mellem monotoniforholdene for en differentiabel funktion f og fortegnet for f'.
Giv et eksempel på anvendelse af differentialkvotient, gerne fra din rapport om *Anvendelse af differential- og integralregning*.

Vandure

Et miniprojekt med differentialligninger.



Vandet blev taget til
hjælp af ægypterne,
når tiden skulle måles.

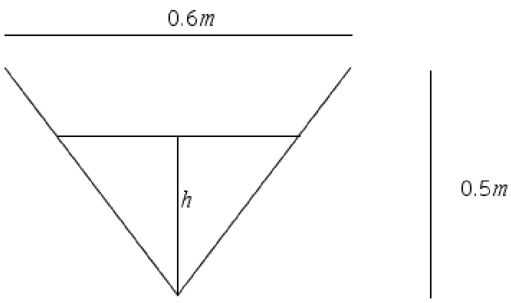
I oldtiden brugte man mange steder vandure til tidsmåling. Et hul i bunden af en krukke gjorde, at vandet kunne løbe stille ud. Men da vandet ikke løber lige hurtigt hele tiden, er det lidt af et problem, hvordan man sætter mærker inde i krukken, så man aflæse klokkeslettet.

I skal nu prøve at løse opgaven for krukker med tre forskellige faconer. Og til sidst skal I bestemme, hvilken facon krukken skal have, for at højden af vandet falder lige meget pr. tidsenhed.

Vi skal bruge følgende sætning fra fysik:

"Torricellis udstrømningslov" siger, at når væske strømmer ud af et hul i en beholder, så er den hastighed v, hvormed det løber ud, givet ved ligningen $v = k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

En kegleformet beholder



Øvelse 1: Bestem vandets rumfang V som funktion af højden h.

Øvelse 2: Bestem et udtryk for $\frac{dV}{dt}$

Hvis hullets tværsnitsareal er A ses nu, der i et lille tidsrum dt strømmer et rumfang ud, der kan skrives dV = A·v·dt. Indsættes v fra Torricellis udstrømningslov, fås nu (og vi sætter et – på, da vandets rumfang jo bliver mindre):

$$dV = -A \cdot k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot dt$$

$$\frac{dV}{dt} = -A \cdot k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Indsættes nu jeres resultat fra øvelserne fås:

$$\frac{9\pi}{25} \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt} = -A \cdot k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$\frac{dh}{dt} = -A \cdot k \cdot \frac{25}{9\pi} \cdot h^{-2} \cdot \sqrt{2 \cdot h \cdot g} = -C \cdot h^{-\frac{3}{2}}$$

Nu indrettes hullet i vanduret, så det er fyldt kl. 0.00, og således at det bliver tømt på præcis 24 timer.

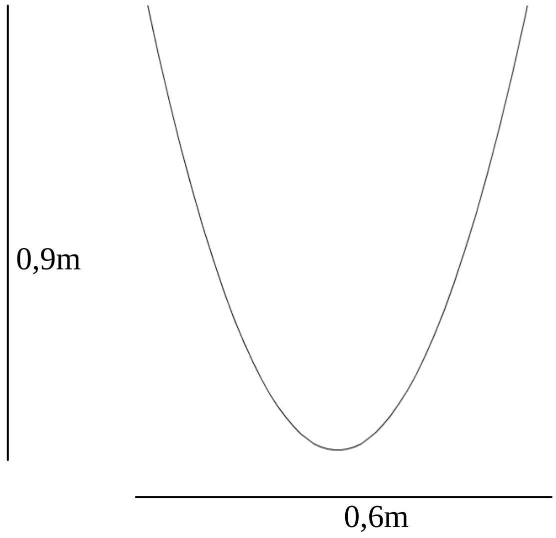
Øvelse 3:

a) Løs differentialligningen, idet også konstanten C bestemmes.
b) Lav en tabel over, hvor højt vandet står hver hele time.

Cylinderformet krukke
Nu gentages hele proceduren, men med en cylinderformet krukke med højde 0,8 m og radius 0,4 m.

1. Bestem rumfanget V som funktion af højden h.
2. Opstil differentialligningen.
3. Løs den, og lav en tabel over vandets højde ved hver hele time.

Parabelformet krukke.
Nu gentages hele proceduren, men for en krukke, hvis tværsnit har form som en parabel. Højden er 0,9m, og diameteren foroven er 0,6m.



4. Bestem rumfanget V som funktion af højden h. (her skal I bruge integralregning)
5. Opstil differentialligningen.
6. Løs den, og lav en tabel over vandets højde ved hver hele time.

Sidste opgave.
Hvilken form skal krukken have, for at vandhøjden falder proportionalt med tiden?

Hjælpespørgsmål:

1. Forestil jer, at I først tegner grafen for en funktion $f(x) = x^n$, så krukken ligger ned. Hvad er rumfanget som funktion af vandhøjden h? (Brug integralregning).

2. Opstil differentialligningen på samme måde som før.

3. Hvordan skal differentialligningen se ud, hvis højden skal falde proportionalt med tiden?
   Udnyt dette til at bestemme n.

Besvarelsen skal udformes som et kapitel i en lærebog om differentialligninger.

Rapportopgaven er benyttet i en 3.g klasse på A-niveau.

Andre ideer til rapportopgaver med opstilling og analyse af differentialligningsmodeller kan bl.a. findes i *Modeller i Derive*, Matematiklærerforeningen, 2004 og i *Eksperimentel matematik*, Matematiklærerforeningen, 2007.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Differentialligninger
Gør rede for løsning af udvalgte differentialligninger.
Gør rede for dit projekt om vandure.

Matematikrapport om differentialligninger

”Kolesterolniveauet i mennesker”

I skal arbejde i grupper 3 og 3.

I skal ligesom sidst skrive rapporten på computer og sørge for, at alle i gruppen får et eksemplar.

Rapporten skal indeholde en grundig gennemgang af teorien for løsningen af differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$$

og løsningen af opgaverne i ”Kolesterolniveauet i mennesker” nedenfor.

Kolesterolniveauet i mennesker.

Høje kolesterolniveauer i blodet har vist sig at være en risikofaktor for hjertesygdomme. Kolesterol produceres i leveren og bruges i opbygningen af cellemembraner, og det absorberes også fra føde, som indeholder mættede fede syrer. Det gennemsnitlige indhold af kolesterol i blodet er ca. 200 mg/dl (i USA).

Man har opstillet en matematisk model for kolesterolniveauet hos et menneske. Kolesterolniveauet betragtes som en funktion af det naturlige kolesterolniveau, kolesterolindtaget og omsætningen af kolesterol i kroppen.
Den opstillede model er flg.

$$\frac{dC}{dt} = k_1 \cdot (L - C) + k_2 \cdot E \qquad (1)$$

hvor

- t er tiden (i dage)
- $C(t)$ er kolesterolniveauet (i mg/dl) til tiden t
- L er det naturlige kolesterolniveau, som vil forekomme, hvis personen fik en kost, som ikke indeholder fede syrer
- E er kolesterolindtagelsen (i mg/dag)
- k_1 er en parameter, som måler, hvor hurtigt kroppen reagerer på afvigelser i kolesterolniveauet fra det naturlige kolesterolniveau
- k_2 er en parameter, som måler hastigheden, hvormed kroppen producerer kolesterol fra mad, som er indtaget

(alle størrelserne varierer fra person til person)

Hvad er enheden for $\frac{dC}{dt}$?

Hvad er enheden for k_1?

Hvad er enheden for k_2?

Nu betragter vi et enægget tvillingepar (af hankøn). De må have det samme naturlige kolesterolniveau – det sættes her til L =140 mg/dl, og de samme parametre, som her sættes til k_1 =0,1 og k_2 =0,05.
De er 20 år (og bor hjemme hos deres forældre), og vi går ud fra, at de på det tidspunkt har den samme daglige kolesterolindtagelse på E =80 mg/dag.

Opstil differentialligningen, der opfylder ovenstående betingelser.

Den ene flytter nu hjemmefra, og sund mad er så ikke det, der prioriteres højst. Hans daglige kolesterolindtagelse er nu E =250 mg/dag.

Opstil differentialligningen, der opfylder de nye betingelser.
Reducér differentialligningen, så den er af typen $\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$.
Find ligevægtspunktet (der hvor $\frac{dC}{dt} = 0$) og giv en vurdering af, hvornår kolesterolniveauet aftager eller vokser.

Vi antager, at hans kolesterolniveau er 180 mg/dl den dag, han flytter.

Løs differentialligningen og skitsér grafen for løsningen – kommentér!

Hvis han fortsætter i f.eks. et år med at spise på den måde, hvad vil hans kolesterolniveau så være (ca.)?

Den anden af tvillingerne vælger at blive boende hjemme.

Antag, at hans kolesterolniveau er 180 mg/dl den dag, hans bror flytter.

Opstil differentialligningen, der opfylder hans betingelser og bestem løsningen.

Hvad vil hans kolesterolniveau være efter et år (ca.)?

Som vi har set i det foregående kan differentialligningen (1), skrives på formen

$$\frac{dC}{dt} = k_1 \cdot M - k_1 \cdot C = k_1 \cdot (M - C) \qquad (2)$$

Find M udtrykt vha. L, E, k_1 og k_2.

L, E, k_1 og k_2 er alle positive (dog kan E godt være 0) – hvorfor?
Kan man sige noget om M's fortegn?
Udregn værdien af M for hver af tvillingerne.

Løs ligningen (2) og bestem $\lim_{t \to \infty} C(t)$. Hvad er betydningen af denne grænseværdi?

Temaopgaven er lavet på A-niveau og træner bl.a. skriftlig formidling af teori. Derudover ses anvendelse af differentialligninger. Opgaven er inspireret af projekt nr. 8 i *Modeller i Derive*, Matematiklærerforeningen, 2004.

Eleverne har både fået tid til arbejdet i timerne og lavet noget hjemme.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Differentialligninger

Hovedvægten lægges på løsning af differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = b - ay$$

Du skal inddrage din rapport om *Kolesterolniveauet i mennesker*.

Matematikrapport om rumgeometri – skalarproduktet

Ud fra dit kendskab til skalarprodukt i planen skal du besvare nedenstående vedr. skalarprodukt i rummet.

a) Giv en definition af skalarprodukt i rummet.

b) Bevis flg. sætning:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

3) $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

c) Udled formlen for længden af en vektor i rummet – tegn!

d) Bevis flg. sætning:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Giv et eksempel på anvendelse af formlen.

e) Bevis flg. sætning:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0^\circ \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$

(som også skrives: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$)

f) Bevis flg. sætning:

1) $\vec{a}_b = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$

2) $|\vec{a}_b| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

Giv et eksempel på anvendelse af formlen.

Eleverne er på A-niveau. De får på denne måde en repetition af skalarprodukt i planen samtidig med, at de bliver trænet i skriftlig formidling af teori.

Arbejdsformen har været gruppearbejde (to og to).

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Rumgeometri
Du skal behandle skalarprodukt i rummet.
Inddrag din rapport om emnet.

Opsparing og lån

1. Teori
Lav en oversigt over de vigtigste begreber, formler og metoder inden for rentesregning og annuiteter. Oversigten skal omfatte

a) simpel rentesregning (renteformlen)
b) annuitetsopsparing
c) annuitetslån.

Simpel rentesregning:
2. Farsø Sparekasses ungdomskonto. Se evt. bilag 1 fra www.sparfar.dk.
Rentefoden er 2,75 % p.a., og vi går ud fra, at den holder sig konstant i hele perioden.

a) Hvis din lillesøster indsatte 5.000 kr., da hun fyldte 12 år, hvor meget kan hun så hæve, når hun fylder 18 år?
b) Hvor meget skulle hun have indsat på sin 12 års fødselsdag, hvis hun vil kunne hæve 10.000 kr. på sin 18 års fødselsdag?
c) Hvor mange procent får hun alt i alt i rente på de 6 år?

Annuitetsopsparing:
3. Durup Sparekasses børneopsparing. Se bilag 2 fra www.durupspar.dk.
Igen regner vi med en konstant rentefod i hele perioden.
Lad os se på den situation, hvor et par bedsteforældre opretter en børneopsparing på deres barnebarns 1 års fødselsdag, og på hver fødselsdag til og med den 12. indsætter 3.000 kr.

a) Hvor meget står der på kontoen efter sidste indbetaling (altså på 12 års fødselsdagen)?
b) Hvor stort et beløb kan barnebarnet hæve på sin 19 års fødselsdag?

Annuitetslån:
4. Tilbud på svenske præmieobligationer. Se bilag 3 fra www.dana-invest.dk

a) Bestem den månedlige rentefod (procent med mindst én decimal). Du må prøve dig frem systematisk!
b) Bestem den årlige rentefod for afbetalingshandlen.

5. Tilbud på bærbar PC. Se bilag 4 fra www.laptop4u.dk.

a) Regn efter, at den månedlige rentefod ved afbetaling over 72 måneder er 1,65 %.
b) Hvor stor skulle den månedlige ydelse være, hvis betalingen skulle klares på den halve tid (altså 36 måneder) med samme månedlige rentefod?
c) Bestem den årlige rentefod for afbetalingshandlen. Sammenlign med rentefoden ved køb på afbetaling af de svenske præmieobligationer.

6. Brug af regneark
Benyt Excel til at lave en tabel for opsparingen eller afbetalingen i opgave 3, 4 eller 5 (efter eget valg).

Forslag til yderligere opgaver:

- En eller flere af opgaverne ….. i bogen.

- Find selv et opsparings- eller lånetilbud (i banken, på nettet, i avisen, …), og regn på det.

Bilag 1: Farsø Sparekasses ungdomskonto

http://www.sparfar.dk/page116.aspx

Bilag 2: Durup sparekasses børneopsparing

http://www.durupspar.dk/

BØRNEOPSPARING - 4,25%

Med en børneopsparing i Durup Sparekasse kan forældre eller bedsteforældre regelmæssigt indbetale beløb, der vil vokse til en særdeles pæn størrelse, når det skal udbetales til det unge menneske mellem det 14. og 21. år.

Børneopsparingen kan oprettes allerede fra barnets fødsel og til det år hvor barnet fylder 14 år. Der kan indbetales helt op til kr. 3.000,00 årligt og i alt kr. 36.000,00 på kontoen. Opsparingen er bundet i mindst 7 år og det opsparede beløb kan allerede hæves, når barnet fylder 14.

Den forrentning som sparekassen tilbyder er blandt landets bedste, hvilket er et udtryk for, at vi ønsker at give børn og unge et godt fundament til fremtidige dispositioner.

Bilag 3: Tilbud på svenske præmieobligationer

http://www.dana-invest.dk/Bestil%20obligationer.htm

DANA INVEST
FONDSMÆGLERSELSKAB A/S

Dana Invest Fondsmæglerselskab A/S - Bredgade 36B - 1045 København K.

JA TAK - Send mig straks uden omkostninger en købekontrakt med numrene på mine svenske præmieobligationer. Jeg betaler 0,- kr ved modtagelsen og derefter 100,- kr. pr. måned i 48 måneder - i alt 4.800,- kr. (+ porto 40,- kr.)

Kontrolkode:	**Skal udfyldes**
Navn:	
Adresse:	
Post/by:	
Telefon:	

Hvert sæt består af:

1. stk. 2006:1 med gevinster for 72 millioner SE.kr.
1. stk. 2006:2 med gevinster for 84 millioner SE.kr.

Plus gevinstret på:
1 stk. 1999:1 med gevinster for 85,1 millioner SE.kr.
1 stk. 2004:1 med gevinster for 105,8 millioner SE.kr.

Kontantværdien er 2.900,- kr. baseret på børskursen den 1. oktober 2006 (alle handler) inkl. eksp.gebyr.

Bilag 4: Tilbud på bærbar PC

http://www.laptop4u.dk/varer.php?vare=45254

HP Compaq Tablet PC tc4400	
Varenavn:	HP Compaq Tablet PC tc4400
Varenummer:	45254
Pris i DKK:	15395 med moms, (12316 uden moms)
Pris ved leasing i DKK:	400* - Leasing: Pris pr stk pr måned ved leasing i 36 måneder og kun for virksomheder
Pris ved finansiering:	367* - Finansiering: Pris pr måned ved afbetaling over 72 måneder
Producent Varenummer:	RL875AW#ABY
Lagerstatus:	Varen er på lager og kan leveres indenfor 1-2 hverdage

---

Rapportarbejdet er benyttet på C-niveau på hf som en del af arbejdet med det supplerende stof om økonomiske sammenhænge. Holdet har valgt bl.a. at arbejde med annuiteter. Her præsenteres eleverne for en række autentiske opsparings- og lånetilbud, hvor de kan bruge den behandlede teori om rentesregning og annuiteter.

Der er bl.a. blevet benyttet en værkstedstime til arbejdet.

I denne rapportopgave har eleverne ikke selv skullet finde de forskellige aktuelle tilbud, men kun behandle dem. En anden mulighed er at lade eleverne gå på jagt efter passende autentisk materiale, fx på nettet, i lokale pengeinstitutter, i avisannoncer osv. De her benyttede tilbud er ikke mere aktuelle.

Eksempel på eksamensspørgsmål:

Opsparing og lån
Forklar, hvad man forstår ved en annuitetsopsparing og ved et annuitetslån.
Gør rede for formlen for annuitetsopsparing.
Inddrag rapporten *Opsparing og lån*.

Matematikprojekt: skatteberegning

Projektarbejdet skal omfatte: Problemformulering, informationssøgning, bearbejdning af materialet, rapportskrivning. Problemformuleringen skal godkendes af læreren.

Rapporten skal indeholde: problemformuleringen, forklarende tekst om beregning af skat, beregninger med forklaring (og også gerne grafer, evt. med brug af regneark).

I skal udnytte jeres viden om procent- og rentesregning, om lineær sammenhæng og/eller om brug af regneark.

Projektarbejdet udføres i grupper på 3-4 personer.

Et par ideer til problemformuleringen:
- Hvordan udregner man sin forskudsskat?
- Hvordan afhænger skatten af, hvor meget man tjener?
- Hvad er bundskat, mellemskat og topskat, hvordan beregnes de, og hvilken betydning har de?

Skat har hjemmesiden www.skat.dk.

Opgaveformuleringen er hentet fra de paradigmatiske eksempler i undervisningsvejledningen for matematik C på hf. Den indgår som en del af arbejdet med det supplerende stof om økonomiske sammenhænge.

Den konkrete opgaveformulering bliver hurtigt forældet og må naturligvis ajourføres i forhold til den aktuelle skattelovgivning.

Eksempel på eksamensspørgsmål (også fra undervisningsvejledningen):

Procentregning og lineære funktioner
Gør rede for nogle af de vigtigste problemstillinger i projektet *Skatteberegning*.
Du skal bl.a. komme ind på sammenhængen mellem indkomst og skat.

Det skrå kast – om at skyde til måls

Det lodrette kast:
Vi ser på den situation, hvor en genstand (fx en bold) kastes lodret op i luften. Genstandens højde over jorden er en funktion $y(t)$ af tiden *t*. Vi ser bort fra luftmodstand. Genstanden er derfor kun påvirket af tyngdekraften, og dens acceleration er med god tilnærmelse konstant. Tyngdeaccelerationens størrelse er g = 9,82 m/s^2. Vi har således

$$y''(t) = -g$$

Vis, at $y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$ opfylder denne betingelse for en hvilken som helst værdi af v_0 og s_0.
Hvad står v_0 og s_0 for?

Skitsér grafen for $y(t)$, når v_0 = 30 m/s og s_0 = 10 m.
Hvad beskriver grafen?

Find maksimum for $y(t)$.
Til hvilket tidspunkt er den kastede genstand i sin højeste højde?

Se igen på $y(t)$, når v_0 = 30 m/s og s_0 = 10 m.
Sæt $y(t) = 0$, og beregn, hvornår genstanden rammer jorden.
Passer svaret med den skitserede graf ovenfor?
Der er to værdier for *t*. Hvad gør man ved den anden løsning?

Et lodret kast med en bold starter i højden 25 m over jorden med begyndelseshastigheden 15 m/s opad.
Hvor højt over jorden når bolden op?
Hvor lang tid går der, før bolden rammer jorden?
Med hvilken fart rammer bolden jorden?

Det skrå kast:
Vi ser nu på et skråt kast. Kastevinklen α er begyndelseshastighedens vinkel med vandret.
Det skrå kast kan beskrives som en kombination af en vandret bevægelse, $x(t)$, og en lodret bevægelse $y(t)$.
Begyndelseshastigheden i den vandrette bevægelse er $v_0 \cdot \cos(\alpha)$ og i den lodrette bevægelse $v_0 \cdot \sin(\alpha)$.
Opskriv et udtryk for hver af funktionerne $x''(t)$, $x'(t)$ og $x(t)$ og for hver af funktionerne $y''(t)$, $y'(t)$ og $y(t)$.

Beregn maksimum for $y(t)$.
Løs ligningen $y(t) = 0$. Hvad finder man så?
Find kastevidden.

A.
En sten kastes på et vandret underlag med begyndelsesfarten 18 m/s og en kastevinkel på 30º.
1) Hvor højt og hvor langt når stenen?
2) Hvor lang tid er stenen i luften?
3) Hvor stor er farten i kasteparablens toppunkt?

B.
Hvilken begyndelsesfart skal en golfbold have, for at slaget kan blive 400 m langt? (Der ses stadig bort fra luftmodstand).

C. Vi skyder til måls (i fysiklaboratoriet)!
Bestem kanonkuglens begyndelsesfart ved måling af kastehøjden ved et lodret kanonskud.
Vælg en genstand at skyde til måls efter, fx et lille plastikdyr.
Lad en afstand mellem kanonen og dyret være fast. Beregn de mulige skudvinkler for at ramme dyret.
Lad dernæst en skudvinkel være fast. Beregn afstanden mellem kanon og dyr for at ramme dyret.
– Blev dyret skudt?

Rapporten er lavet i forbindelse med et samarbejde mellem matematik (både på B-niveau og A-niveau) og fysik om hhv. anvendelse af differentialregning og det skrå kast. Sidste del ”om at skyde til måls” udføres i fysiklaboratoriet. Resten kan lige så godt laves i det ene fag som i det andet. I matematik alene kan man nok alliere sig med en af skolens fysiklærere til sidste del.

Eksempel på eksamensspørgsmål i matematik:

Differentialregning
Gør rede for begrebet differentialkvotient, og vis nogle regneregler for differentialkvotient.
Gør rede for dit projekt *Det skrå kast – om at skyde til måls*.

Matematikrapport om Logaritmer - i samarbejde med kemi

Indledningsvis gennemføres et forsøg i kemitimen (elevforsøg eller demonstrationsforsøg) af følgende karakter:

- Måling af pH af en HCL-opløsning (opl. I) på 0,01 M sammenholdt med den teoretiske værdi

- Fortynding af opl. I 10 gange (opl. II), beregning af $[H_3O^+]$ og teoretisk pH-værdi. Sammenholdt med måling af pH

- Sådan fortsættes endnu engang (opl. III)

Opløsning	I	II	III
Forventet pH			
Målt pH			

- Forsøg kan evt. gentages med NaOH-opløsninger

Definition af 10-talslogaritmefunktionen log(x)

I skal arbejde med jeres måleresultater fra kemitimen, hvor I bestemte pH-værdier!

1) **Hvordan ligger jeres målte pH-værdier i forhold til hinanden?**

2) **Hvordan var styrken af jeres opløsninger i forhold til hinanden?**

Hvis vi skal finde en funktion, der knytter en pH-værdi til en HCL-opløsning, skal den altså opfylde følgende betingelser:

$$y = f(10 \cdot x) = f(x) + 1 \quad \text{og} \quad y = f(\frac{x}{10}) = f(x) - 1$$

3) **Formuler med ord!**

Vi kender funktionen $f(x) = 10^x$

4) **Tegn denne funktions graf.**

5) **Hvad gælder der om *f*(x+1) i forhold til *f*(*x*)?**

6) **Formuler med ord.**

Det er jo lige det modsatte af, hvad vi skal bruge! Men så ”bytter vi om på *x* og *y*”.

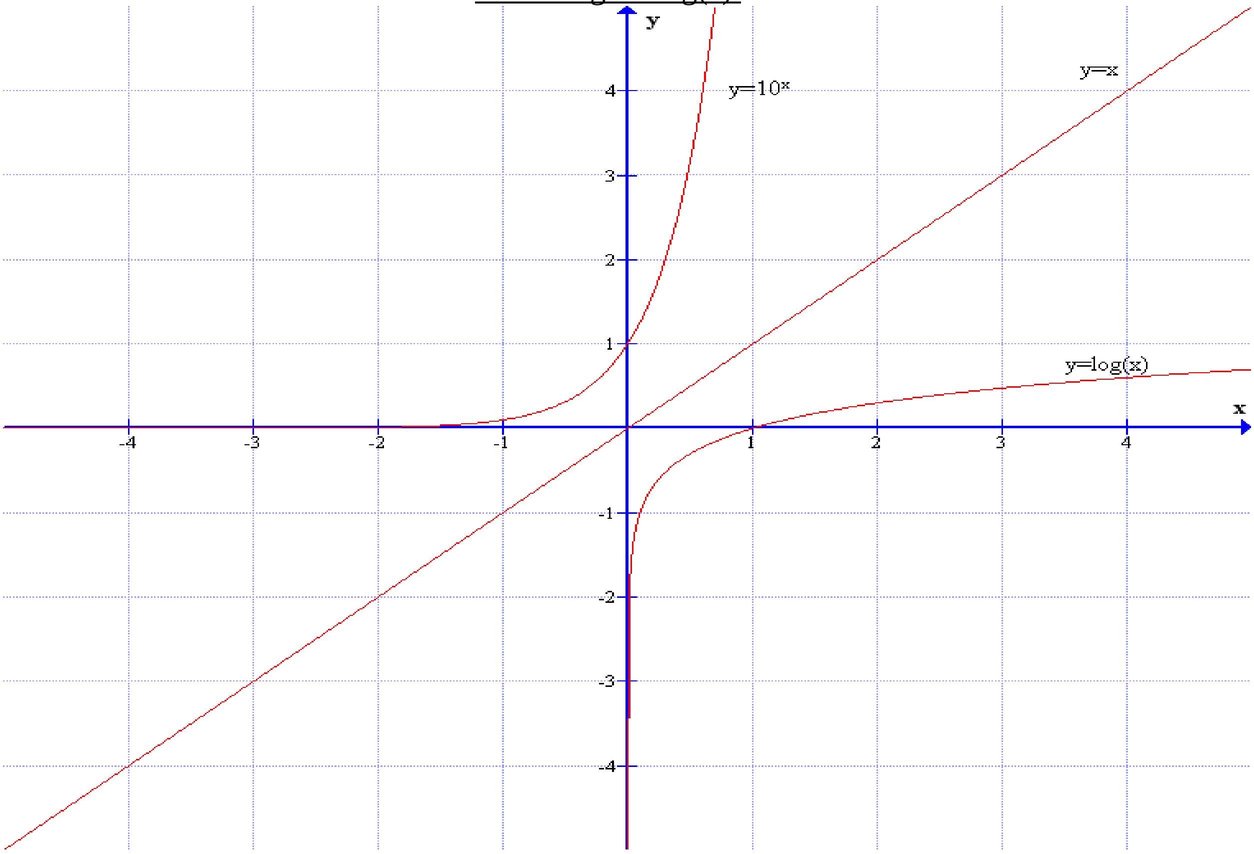
7) **Spejl grafen for *f*(*x*)=10^x i linjen med ligningen *y* = *x* (brug et stykke gennemsigtigt papir)**

8) **Hvilke punkter spejles punkterne (2,10^2), (3,10^3), (-2,10^{-2}) og (-3,10^{-3}) i?**

Vi har nu grafen for en funktion med den ønskede egenskab.

Denne funktion er den omvendte funktion til *f*(*x*)=10^x og kaldes 10-tals-logaritme-funktionen.

Den betegnes log(*x*).



9) **Tegn grafen for log(*x*) på jeres grafregner (den findes i CATALOG).**

10) **Bestem for log(*x*): Dm, Vm, nulpunkt og monotoniforhold**

pH-værdien defineres nu som: $-\log[H_3O^+]$

11) **Bestem ved hjælp af denne definition pH-værdierne for jeres opløsninger**

Regneregler for log(x)

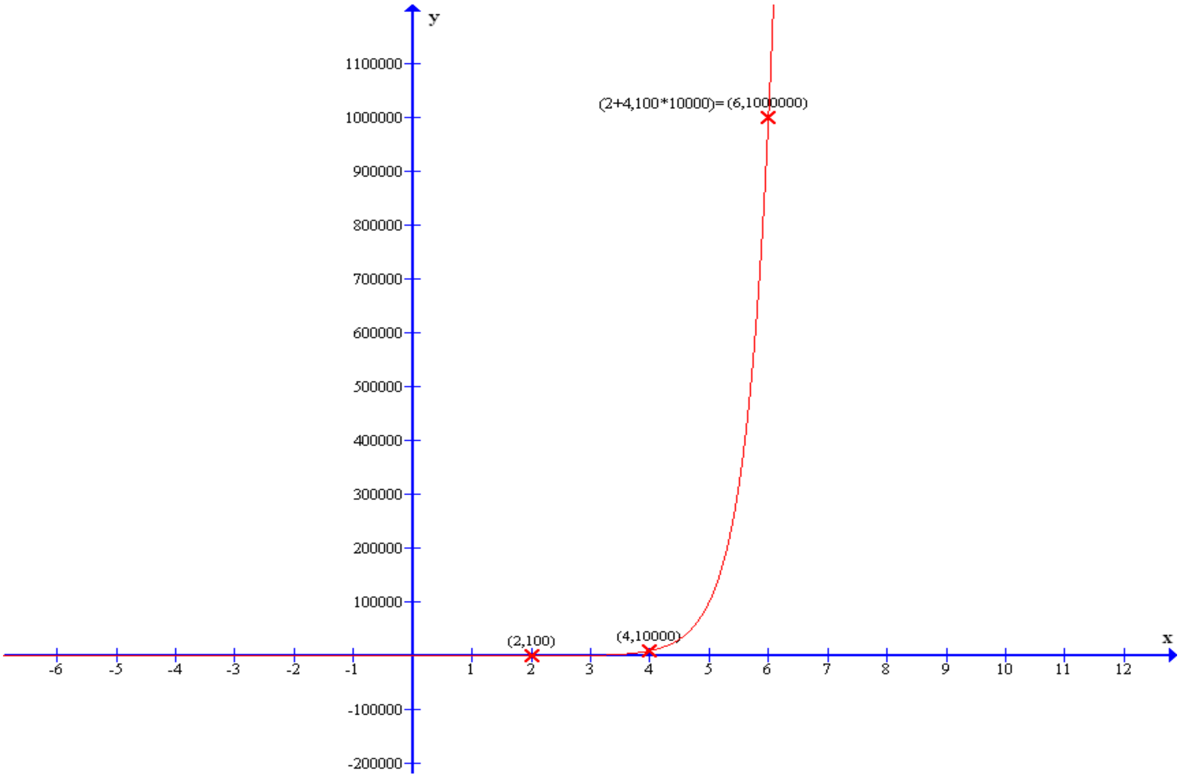
Se igen på $f(x) = 10^x$.

1) **Skriv de potensregneregler I kender op!**

2) **Brug potensregnereglerne til at udfylde højre side af følgende:**

$$f(x_1 + x_2) =$$
$$f(x_1 - x_2) =$$

3) **Formuler med ord, hvad der sker med funktionsværdierne (*y*-værdierne), når man lægger to *x*-værdier sammen eller trækker to *x*-værdier fra hinanden.**



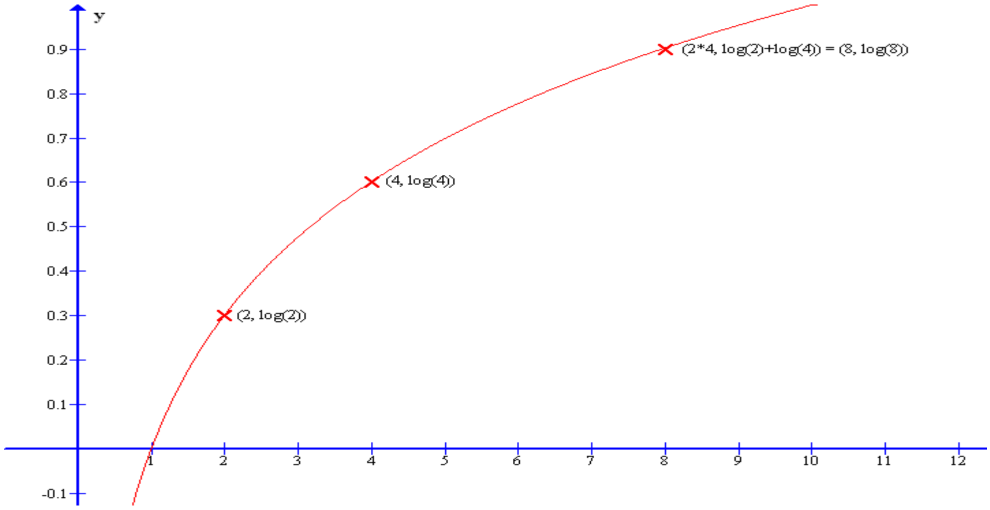
Nu "bytter vi som før om på x og y"! vi spejler i linjen med ligningen $x = y$.
Hvis vi også "spejlvender $f(x)$'s egenskaber opfylder den omvendte funktion (log(x)) at: *y*-værdierne skal lægges sammen, når *x*-værdierne ganges sammen.

4) **Udfyld højre side af følgende:**

a) $\log(x_1 \cdot x_2) =$

$$\text{b) } \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) =$$

$$\text{c) } \log(x^n) =$$ (tip: brug regel a) flere gange)



5) Brug grafregneren til at sandsynliggøre regnereglerne for log(*x*):

$$\text{1) } \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\text{2) } \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\text{3) } \log(a^n) = n\log(a)$$

Eksempel på anvendelse af 1): $\log(5 \cdot 6) = \log(5) + \log(6)$

Ofte bruges reglerne den anden vej:

$$\log(9) - \log(3) = \log\left(\frac{9}{3}\right) = \log(3)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\log(27) = \log(27^{\frac{1}{3}}) = \log(\sqrt[3]{27}) = \log(3)$$

<u>pH-begrebet og vands ionprodukt gennemgås i en kemitime</u>

pH-begrebet er jo defineret som:

$$pH = -\log\left[H_3O^+\right]$$

I tilknytning til pH defineres størrelsen pOH:

$$pOH = -\log\left[OH^-\right]$$

<u>Vands ionprodukt:</u>

I rent vand finder man følgende reaktion (der er en ligevægt, som – lidt løst sagt – er en reaktion der kan løbe i begge retninger)

$$H_2O + H_2O = OH^- + H_3O^+$$

Målinger har vist at

$$\left[H_3O^+\right] = 1,0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{M} \quad \text{og}$$
$$\left[OH^-\right] = 1,0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{M}$$

ved stuetemperatur (værdierne afhænger af temperaturen). Dvs. pH i rent vand er

$$pH = -\log\ H_3O\ = \log(1,0 \cdot 10^{-7}) = 7,0$$

I rent vand gælder også at:

$$pOH = -\log\left[OH^-\right] = \log(1,0 \cdot 10^{-7}) = 7,0$$

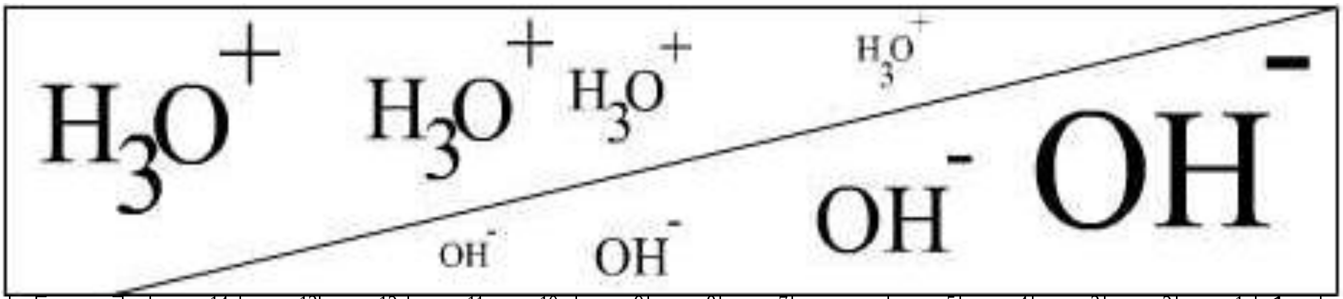
Af ovenstående finder vi også, at produktet af disse koncentrationer – dvs. produktet af oxoniumion- og hydroxidion-koncentrationen er

$$\left[H_3O^+\right] \cdot \left[OH^-\right] = (1,0 \cdot 10^{-7}) \cdot (1,0 \cdot 10^{-7}) = 10^{-14}$$

Sammenhængen $\left[H_3O^+\right] \cdot \left[OH^-\right] = 10^{-14}$ kaldes **vands ionprodukt**, og gælder for alle vandige opløsninger.

- Er $\left[H_3O^+\right] > \left[OH^-\right]$ er opløsningen **sur** og pH < 7,0
- Er $\left[H_3O^+\right] = \left[OH^-\right]$ er opløsningen **neutral** og pH = 7,0
- Er $\left[H_3O^+\right] < \left[OH^-\right]$ er opløsningen **basisk** og pH > 7,0

pH	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\left[H_2O^+\right]$ i mol/L	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}



$\left[OH^-\right]$ i mol/L	10^{-14}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1

Af ionproduktet fås:

$$\log\left[H_3O^+\right]\cdot\left[OH^-\right] = \log(10^{-14}) \Leftrightarrow$$
$$\log\left[H_3O^+\right] + \log\left[OH^-\right] = -14 \Leftrightarrow$$
$$-\log\left[H_3O^+\right] - \log\left[OH^-\right] = -\ -14 \Leftrightarrow$$
$$pH + pOH = 14$$

Denne sammenhæng er nyttig ved beregning af pH i opløsninger hvor man kender $\left[OH^-\right]$.
Er $\left[OH^-\right]$ kendt beregnes pOH, og pH fås da af:

$$pH + pOH = 14 \Leftrightarrow pH = 14 - pOH$$

Eksempler

a) En opløsning hvor $\left[H_3O^+\right]$ = 0,010 M er pH = − log(0,010) = 2,0
Opløsningen er sur.

b) En opløsning hvor $\left[H_3O^+\right]$ = 0,000250 M er pH = − log(0,000250) = 3,6
Opløsningen er sur.

c) En opløsning hvor $\left[H_3O^+\right]$ = 0,000000001 M er pH = − log(0,000000001) = 9,0
Opløsningen er basisk.

d) En opløsning hvor $\left[OH^-\right]$ = 0,001 M er pOH = − log(0,001) = 3,0
dvs. pH = 14 −3,0 = 11
Opløsningen er basisk.

e) En opløsning hvor $\left[OH^{-}\right]$ = 0,0000001 M er pOH = − log(0,0000001) = 7,0
dvs. pH = 14 – 7,0 = 7,0
Opløsningen er neutral.

Opgaver

1) Man har en opløsning hvor $\left[H_3O^{+}\right] = 4,6 \cdot 10^{-9}$ M.

   a) Beregn pH.
   b) Er opløsningen sur, neutral eller basisk?
   c) Beregn $\left[OH^{-}\right]$ i opløsningen

2) Beregn pH i 0,0072 M HNO_3.

3)
   a) Hvad er $\left[OH^{-}\right]$ i 0,0040 M NaOH?
   b) Hvordan beregner man herefter lettest $\left[H_3O^{+}\right]$?
   c) Beregn dernæst $\left[H_3O^{+}\right]$ og pH.

4) Udfyld de tomme felter i følgende tabel.

$\left[H_3O^{+}\right]$	$\left[OH^{-}\right]$	pH	Sur, neutral eller basisk?
$5,7 \cdot 10^{-4}$ M			
	$1,82 \cdot 10^{-4}$ M		
$2,0 \cdot 10^{-7}$ M			
	$6,9 \cdot 10^{-9}$ M		
1,02 M			
	0,52 M		

Svære spørgsmål

5) Beregn pH i 0,0040 M $Ba(OH)_2$.

6) Hvis en opløsning hvor pH = 5,0 fortyndes 10 gange, hvad er da pH i den nye opløsning?

7) – og dernæst 100 gange, hvad er da pH? Er det rimeligt?

8) Beregn pH i en blanding af 0,01 M HCl og 0,01 M NaOH.

9) Beregn pH i en blanding af 0,001 M HNO_3 og 0,02 M KOH.

Ligninger med log(*x*)

Vi skal løse ligningen $\log(x) = 4,2$

log(*x*) er jo den omvendte funktion til 10^x

derfor gælder: $\log(10^x) = x$

1) Hvad gælder der her? $10^{\log(x)} = ?$

Løsningen til ligningen $\log(x) = 4,2$ kan derfor bestemmes som

$$x = 10^{\log(x)} = 10^{4,2} = 15848,9$$

Løsningen til ligningen $\log(x) = -1,3$ findes på tilsvarende måde som

$$x = 10^{-1,3} = 0,05012$$

2) Løs ligningerne:

a) $\log(x) = 2,34$ b) $\log(x) = -6,12$

3) Beregn $\left[H_3O^+\right]$ for en opløsning hvor pH = 12,3 og for en opløsning hvor pH = 0,10. Hvad kan man sige om disse opløsninger?

Skal vi løse en ligning af typen $\log(2x-4) = 1,15$

Skal vi først bestemme grundmængde. Vi har jo bestemt definitionsmængden for log(*x*) til R_+, så vi skal sikre os at

$$2x - 4 > 0$$

Det vil sige: $x > 2$

Nu skal 2*x*-4 bestemmes som:

$$2x - 4 = 10^{1,15} \Leftrightarrow$$

$$2x = 10^{1,15} + 4 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{10^{1,15} + 4}{2} \approx 9,06 \quad \text{(som ligger i grundmængden)}$$

3) Løs ligningerne:

a) $\log(3x+6) = -0,2334$ b) $\log(2-3x) = 3$

Projektet er lavet som et samarbejde mellem matematik (A-niveau) og kemi.

Eleverne har arbejdet på skolen i 2 kemimoduler (incl. forsøg) og 3 matematikmoduler – et modul er på 95 min. Resten har de lavet som hjemmeopgave.

Eksempel på eksamensspørgsmål i matematik:

Logaritmer
Gør rede for 10-tals-logaritmen og regneregler for denne.
Inddrag din rapport om logaritmer og pH.